

# Алгебро-геометрические методы в теории интегрируемых систем:

классические интегрируемые системы и системы Хитчина

Е.Ю.Бунькова, П.Г.Гриневич, О.К.Шейнман

## Аннотация

Первая часть курса, посвященная алгебро-геометрическим методам интегрирования солитонных уравнений (КдФ, КП, НУШ – см. программу ниже) была прочитана в весеннем семестре 2020 года.

Настоящая, вторая, часть курса посвящена алгебро-геометрическим методам интегрирования систем с конечным числом степеней свободы (классические интегрируемые системы, системы Хитчина и Калоджеро–Мозера)

## Программа

1. Некоторые классические интегрируемые системы. Классические методы: теорема Лиувилля, метод разделения переменных (2 лекции).
2. Метод разделения переменных как средство построения интегрируемых систем (1 лекция)
3. Волчок Эйлера–Арнольда–Манакова. Представление Лакса с рациональным спектральным параметром. Интегрирование в тэта-функциях (2 лекции).
4. Представление Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности. "Парадокс размерности". Параметры Тюринга. Иерархии коммутующих потоков. Гамильтонова теория (2 лекции).
5. Системы Хитчина – классическое определение. Спектральные кривые гиперэллиптических систем Хитчина (2 лекции).
6. Спектральная кривая и разделение переменных. Разделение переменных для систем Хитчина. "Элементарное" определение систем Хитчина (1 лекция).
7. Метод обратной задачи рассеяния для систем Хитчина (1 лекция).
8. Системы Калоджеро–Мозера, их связь с солитонными уравнениями и алгебро-геометрическое интегрирование (1 лекция).

### Программа первой части курса

1. Римановы поверхности как одномерные комплексные многообразия. Род неособой римановой поверхности. Мероморфные функции, дифференциалы, тензоры на компактных римановых поверхностях.
2. Абелевы дифференциалы 1-го, 2-го и 3-го рода на компактных римановых поверхностях. Билинейные соотношения Римана. Канонический базис голоморфных дифференциалов. Существование и единственность для абелевых дифференциалов 2-го и 3-го рода с нулевыми  $a$ -периодами.
3. Теорема Римана-Роха.
4. Матрица Римана. Отображение Абеля.
5. Тета-функции Римана. Обращение преобразования Абеля в терминах нулей тета-функций. Вектор римановых констант.
6. Римановы поверхности с особенностями. Арифметический и топологический род. Мероморфные функции и мероморфные дифференциалы на поверхностях с особенностями. Двойные точки. Разрешение особенностей.
7. Одномерные голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и дивизоры.
8. Интегрируемые системы в размерности  $1+1$ . Представление Лакса. Представление нулевой кривизны.
9. Примеры: уравнения Кортевега-де Фриза, Нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Синус-Гордон
10. Спектральная кривая одномерного оператора с периодическими коэффициентами. Конечнозонные операторы. Конечнозонные решения КдФ. Формула Итса-Матвеева. Формула Итса для волновой функции.
11. Проблема отбора вещественных и регулярных решений. “Простая группа” – Уравнение Кортевега-де Фриза, дефокусирующее Нелинейное уравнение Шредингера.
12. “Сложная группа”. Фокусирующее Нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Синус-Гордон. Дифференциалы Черенника. Теорема о регулярности вещественных решений. Число компонент многообразия вещественных решений уравнения Синус-Гордон для фиксированной кривой.
13. Уравнение Кадомцева-Петвиашвили. Конструкция Кричевера. Две вещественных редукции. Их регулярные вещественные решения. М-кривые.
14. Двумерный оператор Шредингера. Конечнозонные при одной энергии потенциалы. Условия потенциальности и вещественности на спектральные данные при одной энергии.
15. Регулярные вещественные многосолитонные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили-2 как пределы регулярных вещественных конечнозонных решений.