

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Г. Коллюцкий, н.с. ИППИ им. А.А.Харкевича РАН

Аннотация. Понятие предельных циклов ввёл Пуанкаре, создавая *качественную теорию дифференциальных уравнений*. Он занимался задачей  $n$  тел, не решённой до сих пор. Уже тогда, в конце XIX века, становилось понятно, что обычно найти решение дифференциального уравнения в явном виде нельзя. Основная идея Пуанкаре состояла в том, чтобы исследовать свойства решений, не находя их. Прежде всего его интересовала асимптотика решений, т.е. их поведение при больших временах.

Одной из самых известных задач в этой области, мотивировавшей многочисленные исследования в течение уже более чем века, является 16-я проблема Гильберта, а точнее вторая её часть. В ней требуется найти верхние оценки на число предельных циклов полиномиальных векторных полей на плоскости. 16-я проблема не решена до сих пор, даже в случае квадратичных векторных полей.

В этом курсе мы пройдём путь от классических теорем Пуанкаре, Андронова и Понтрягина до самых свежих результатов и открытых задач.

## Программа курса

- (1) Введение. Векторные поля и поля направлений на плоскости и на сфере. Особые точки, предельные циклы и полициклы
- (2) Теория Пуанкаре-Бендиксона
- (3) Теорема Андронова-Понтрягина
- (4) Уравнение Ван Дер Поля
- (5) Квадратичные векторные поля
- (6) 16-я проблема Гильберта: исторический обзор. Теорема конечности Ильяшенко и Экаля. Стратегия Руссари
- (7) Теорема о нулях и росте голоморфных функций
- (8) Проблема Гильберта-Смейла. Уравнения Льенара
- (9) Примеры локальных и нелокальных бифуркаций с рождением предельных циклов
- (10) \*О-минимальная геометрия. Теорема Габриэлова

Для понимания курса заведомо достаточно знакомства со стандартными курсами ОДУ и ТФКП. Если вы не знакомы с дифференциальными уравнениями, то этот курс можно воспринимать как вводный, но многие недостающие знания придётся восстанавливать по книге [Ag] в сентябре. Без знания ТФКП можно понять курс в целом (по модулю нескольких лекций во второй половине курса).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ар] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Москва: Наука, 1971.
- [Ан] Д. В. Аносов, *Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем*, Москва: МЦНМО, 2008.
- [ИYa] Yu. S. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. **86**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.