

Спецкурс Ультрафильтры, ультрарасширения и их приложения

Лектор Д. И. Савельев (ИППИ РАН)

Аннотация В 70-х гг. прошлого века было понято, что ультрарасширения полугрупп могут быть использованы для получения результатов рамсеевского типа в теории чисел, алгебре и динамических системах. Яркими примерами таких результатов служат теорема Хиндмена о конечных произведениях в полугруппах, обобщения теоремы ван дер Вардена об арифметических прогрессиях, такие, как теорема Хэлеса – Джеветта о свободных конечнопорождённых полугруппах, а также теорема Фюрстенберга – Вейсса о совместном возвращении. В дальнейшем эта техника получила бурное развитие и привела ко многим результатам, как правило, не имеющим (известных) альтернативных доказательств. В последнее время конструкция ультрарасширений была обобщена на произвольные модели первого порядка, что позволило получить неассоциативные аналоги теоремы Хиндмена и других результатов. В рамках спецкурса будет обсуждаться как абстрактная конструкция ультрарасширений моделей, так и различные её приложения, включая упомянутые выше результаты и их обобщения. Предварительных знаний от слушателей не требуется.

Программа 1-го семестра

1. Фильтры и ультрафильтры. Ультрафильтры со специальными свойствами (κ -равномерные и κ -полные ультрафильтры, r -точки и q -точки и др.).
2. Фильтры и ультрафильтры на топологических пространствах. Сходимость по фильтру, бикомпактность. Некоторые приложения (теорема Тихонова, аменабельность и др.).
3. Пространство ультрафильтров. Бикомпактификации Стоуна – Чеха и Волмэна.
4. Теорема Рамсея. Некоторые её приложения (теорема Шура) и обобщения (теорема Эрдёша – Душника – Миллера и др.). Слабо компактные и рамсеевские кардиналы.
5. Порядок Рудин – Кислера, ультрафильтры Рамсея.
6. Модели первого порядка. Элементарные вложения. Ультрапроизведения, теоремы Лося и Фрейне – Морель – Скотта.
7. Ультрарасширения моделей первого порядка. Ультрафильтры как кванторы. Первая теорема о расширении.
8. Топологические свойства ультрарасширений. Правотопологические модели. Вторая теорема о расширении.
9. Формулы, сохраняющиеся при ультрарасширениях.
10. Идемпотенты в правотопологических алгебрах. Идемпотентные ультрафильтры.
11. Теорема Хиндмена о конечных произведениях и её обобщения. Некоторые приложения (обобщения теоремы Шура).
12. Топологии Зариского на алгебрах. Теорема о размерности.

Во 2-ом семестре планируется изучить дальнейшие приложения ультрарасширений, включая теоремы ван дер Вардена об арифметических прогрессиях, Хэлеса – Джеветта о свободных конечнопорождённых полугруппах, Фюрстенберга – Вейсса о совместном возвращении.

Расписание Спецкурс будет проходить по понедельникам, начиная с 15 сентября, в 16 ч. 45 мин. в здании Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу ул. Губкина, д. 8, комн. 530. По окончании лекции в 18 ч. 30 мин. в той же аудитории будет проходить семинар по теории доказательств.