Лекция 1 (16 сентября 2013)
Обзор основных понятий и результатов курса

1.0. Что такое тета-функция?
1.1. Квазипериодичность
1.2. Алгебро-геометрический смысл тета-функции
1.3. Абелевы интегралы
1.4. Многомерные тета-функции
1.5. Гипотеза Новикова

1.0. Что такое тета-функция? Страшная тайна, с раскрытия которой мы начнём наш курс, заключается в том, что общепринятого *определения* тета-функции не существует. Имеются многочисленные формулы, в которые входят хитроумные индексы и параметры, фиксирование которых определяет *целую* функцию одной или многих комплексных переменных, обозначаемую в зависимости от эпохи и полиграфических технологий θ,Θ,ϑ и т.п.; каждая такая функция в соответствующем контексте по праву называется *тета*-функцией.

Если бы задача заключалась в *запугивании* начинающего, начать можно было бы с цитаты из прекрасной книги [**ГурвицКурант1968,** стр. 197]: *Эрмит ввёл общее понятие тета-функции*

$$\Theta_{\mu,\nu}(v;\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi\mathrm{i}v(n+\frac{\mu}{2}) + \pi\mathrm{i}\tau(n+\frac{\mu}{2})^2 + \pi\mathrm{i}\nu\} \qquad \textbf{(1.0a)}$$

(в русском издании книги в этой формуле допущена опечатка...). Возможно, читателю будет полезно для разминки выполнить упражнение **1.0**.

Однако никого пугать я не хочу, и главная идея курса заключается в том, что *теория тета-функций красива и проста.* Правда, чтобы сделать её таковой, необходимо приложить некоторые усилия по преодолению вековых привычек.

Мы начнём с нетрадиционной формулы

$$\boldsymbol{\Theta}(Z|q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n \qquad \textbf{(1.0b)}$$

(обращайте внимание на варианты написания буквы "тета" и на размеры переменных!)[1]. Она вызывает несколько вопросов, на которые мы сейчас начнём отвечать.

(a) *В каком <u>множестве</u> лежит правая часть формулы* **(1.0b)**?

Дадим два (не вполне взаимоисключающих...) ответа. Во-первых, нашу $\boldsymbol{\Theta}$ можно считать *голоморфной* функцией двух комплексных переменных:

$$\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{O}(\dot{\mathbb{C}} \times \boldsymbol{\Delta});$$

сходимость соответствующего ряда читатель легко проверит, выполнив упражнение **1.1**. Во-вторых, перегруппировав слагаемые ряда **(1.0b)** в виде

$$\boldsymbol{\Theta}(Z|q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(Z^n + \frac{1}{Z^n})q^{n^2} \tag{\textbf{1.0c}}$$

можно считать, что

$$\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{Q}(Z)[[q]].$$

Обе точки зрения гармонично сосуществуют.

(b) *Почему для функции двух переменных используется нестандартный разделитель* $|$, *то есть почему не пишется просто* $\boldsymbol{\Theta}(Z, q)$?

Дело в том, что в существенной части теории q выступает скорее как *параметр*, чем как аргумент. Математического смысла это утверждение не имеет, а психологически означает, что часто при фиксированном q рассматривается голоморфная функция $Z \mapsto \boldsymbol{\Theta}(Z|q)$.

(c) *Какие геометрические представления связаны с* $\boldsymbol{\Theta}$? Многочисленные и разнообразные; однако они лучше раскрываются в других – более громоздких – формулах для тета-функции, к которым мы сейчас и перейдём.

[1] к сожалению, буквой Θ принято обозначать и другой объект, который будет играть важную роль в нашем курсе – так называемый *тета-дивизор*. Мы будем различать эти объекты *жирностью:* Θ и $\boldsymbol{\Theta}$ – *разные* буквы!

Начнём с замены основной комплексной переменной:

$$Z = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} \qquad \textbf{(1.0d)}$$

и получим "новую" функцию

$$\vartheta(z|q) := \mathbf{\Theta}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}|q) =_{\textbf{(1.0b)},\textbf{(1.0d)}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}, \qquad \textbf{(1.0e)}$$

теперь *целую* по основной переменной z.

С помощью переразложения **(1.0c)** функция ϑ переписывается в виде

$$\vartheta(z|q) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos(2\pi nz), \qquad \textbf{(1.0f)}$$

особенно удобном для *вещественных* значений аргументов. В упражнении **1.2** читателю предлагается убедиться в том, что с вычислительной точки зрения ϑ – это практически *многочлен* Фурье.

Наконец, сделаем последнюю замену переменной

$$q = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}, \qquad \textbf{(1.0g)}$$

где $\tau \in \mathcal{H}$. Получим "главную героиню"

$$\theta(z|\tau) := \vartheta(z|\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}n^2\tau}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz} \qquad \textbf{(1.0h)}$$

1.1. Квазипериодичность. Догадаемся сделать в формуле **(1.0b)** заменить переменную Z на q^2Z (это можно сделать и в голоморфной, и в формальной версии):

$$\mathbf{\Theta}(q^2Z|q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}(q^2Z)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+2n}Z^n,$$

откуда

$$qZ\mathbf{\Theta}(q^2Z|q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+2n+1}Z^{n+1} =_{m=n+1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2}Z^m,$$

то есть

$$qZ\mathbf{\Theta}(q^2Z|q) = \mathbf{\Theta}Z|q). \qquad \textbf{(1.1a)}$$

Перейдя к переменным z, τ получим из **(1.1a)**

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}\theta(z+\tau|z) = \theta(z|\tau),$$

или

$$\theta(z+\tau|z) = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\tau}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}\theta(z|\tau). \tag{1.1b}$$

Это и есть соотношение *квазипериодичности*, которое лучше воспринимать вместе с очевидным

$$\theta(z+1|\tau) = \theta(z|\tau). \tag{1.1c}$$

Немного поработать с соотношениями квазипериодичности читателю предлагается в упражнении **1.3**.

1.2. Алгебро-геометрический смысл тета-функции. Соотношения квазипериодичности **(1.1b)** и **(1.1c)** говорят о том, что тета-функция $z \mapsto \theta(z|\tau)$ тесно связана с *решёткой* $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. Аргументы функции θ рекомендуется представлять себе следующим образом: классическая комплексная переменная z бегает по плоскости $\mathbb{C}$, на которой выделена эта решётка $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$.

С любой решёткой $L \subset \mathbb{C}$ на комплексной плоскости связан и другой объект: *тор* $\mathbb{C}/\mathrm{L}$. С точностью до изоморфизма этот тор, разумеется, зависит только от *класса подобия* решётки; выбрав представителя этого класса рассматриваемого нами вида, введём специальное обозначение для соответствующего тора

$$E_\tau := \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}; \tag{1.2a}$$

Выбор буквы E связан с тем, что одномерные комплексные торы называются также *эллиптическими* кривыми (они появились сотни лет назад при вычислении длины эллипса). Напомним, что *аффинная* часть рассматриваемой кривой, то есть *проколотый* тор

$$\dot{E}_\tau := \frac{\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}; \tag{1.2b}$$

может быть задан *уравнением Вейерштрасса*

$$y^2 = 4x^3 - \mathrm{g}_2(\tau)x - \mathrm{g}_3(\tau), \tag{1.2c}$$

в котором

$$\mathrm{g}_2(\tau) := 60 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^4},$$

$$\mathrm{g}_3(\tau) := 140 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^6}. \qquad \mathbf{(1.2d)}$$

Изоморфизм между проколотым тором и аффинной кривой, определённой уравнением **(1.2c)**, задаётся *$\wp$-функцией Вейерштрасса*

$$\wp(z|\tau) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} [\frac{1}{(z-m\tau-n)^2} - \frac{1}{(m\tau+n)^2}] \qquad \mathbf{(1.2e)}$$

и её производной по z

$$\wp'(z|\tau) := -\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-m\tau-n)^3}. \qquad \mathbf{(1.2f)}$$

Обе функции мероморфны и *периодичны* (без *квази*!) относительно решётки $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$. Вейерштрассовская $\wp$-функция удовлетворяет *дифференциальному уравнению Вейерштрасса*

$$\wp'(z|\tau)^2 = 4\wp(z|\tau)^3 - \mathrm{g}_2(\tau)\wp(z|\tau) - \mathrm{g}_3(\tau), \qquad \mathbf{(1.2g)}$$

в силу которого пара $(x=\wp, y=\wp')$ и задаёт вышеупомянутый изоморфизм между проколотым тором и аффинной кривой. Этот изоморфизм однозначно продолжается на прокол и отождествляет тор E_τ с соответствующей *проективной* кривой.

В основной части курса мы представим $\wp$-функцию в виде отношения произведения тета-функций со сдвинутыми аргументами. Тогда с $\wp$-функцией можно будет работать практически; ряды же **(1.2e)** и **(1.2f)** сходятся очень медленно.

Мы ввели тета-функции как сугубо *трансцендентные* объекты; но, как мы увидим в основной части курса, соотношения квазипериодичности позволят интерпретировать их алгебро-геометрически, как *сечения линейных расслоений* над алгебраическими кривыми E_τ.

В упражнении **1.4** читателю предлагается установить связь между дифференциальным уравнением Вейерштрасса и (стационарным) уравнением *Кортевега-де-Фриза*, которое будет играть важную роль в нашем курсе.

1.3. Абелевы интегралы. На связь между одномерными комплексными торами и алгебраическими кривыми можно взглянуть и с другой точки зрения, более близкой к реальной истории. Пусть нас интересует – определённый или неопределённый – интеграл вида

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{P(x)}}, \tag{1.3a}$$

где P – многочлен. Если его степень равна 1 или 2, то он берётся в элементарных функциях, так что первая нетривиальная степень – это $\deg P = 3$. Чтобы установить связь с предыдущим разделом, нормируем этот интеграл так, чтобы $P(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$, где теперь $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ – *числа*, удовлетворяющие единственному условию $g_2^3 \neq 27 g_3^2$, равносильному отсутствию у многочлена P кратных корней. Рассмотрев алгебраическую кривую

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \tag{1.3b}$$

лишь написанием коэффициентов (и их смыслом...) отличающуюся от кривой **(1.2g)** из предыдущего раздела. Интеграл **(1.3a)** можно теперь переписать в виде

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y}; \tag{1.3c}$$

оказывается, что дифференциал $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ *регулярен* (над $\mathbb{C}$ – голоморфен...) всюду на кривой **(1.3b)**, в том числе в выколотой ("бесконечной") точке; с точностью до пропорциональности он является единственным дифференциалом с этим свойством. Произведя с этим дифференциалом формальные манипуляции (которые будут обоснованы в основной части курса)

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}\wp}{\wp'} = \frac{\mathrm{d}\wp}{\frac{\mathrm{d}\wp}{\mathrm{d}z}} = \mathrm{d}z,$$

мы убедимся в том, что при изоморфизме кривой **(1.3b)** с тором E_τ дифференциал $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ переходит в дифференциал, *пропорциональный* дифференциалу dz; вопрос о коэффициенте пропорциональности является тонким, и мы сейчас на нём останавливаться не будем.

Мы получили новую характеризацию решётки $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, связанной с кривой **(1.3b)** : это её *решётка периодов*, то есть результат интегрирования соответствующим образом нормированного регулярного дифференциала по *всем* циклам тора. Это утверждение можно записать в несколько нетрадиционном виде:

$$\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} = \int_{\mathrm{H}_1(E_\tau;\mathbb{Z})} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{y}, \tag{\textbf{1.3d}}$$

где константа λ подобрана таким образом, что интеграл по *некоторому* циклу равен 1:

$$\exists a \in \mathrm{H}_1(E_\tau;\mathbb{Z}); \int_a \frac{\lambda \mathrm{d}x}{y} = 1. \tag{\textbf{1.3e}}$$

От неприятной константы λ можно избавиться, определив τ как *отношение* периодов:

$$\tau = \frac{\int_b \frac{\mathrm{d}x}{y}}{\int_a \frac{\mathrm{d}x}{y}}, \tag{\textbf{1.3f}}$$

где a и b – любые образующие группы гомологий $\mathrm{H}_1(E_\tau;\mathbb{Z})$, выбранные так, чтобы формула **(1.3f)** обеспечивала $\mathrm{Im}\tau > 0$ (если это условие не выполнено, то у одной из образующих нужно поменять знак).

Всё это допускает обобщение на высшие роды!

Пусть S – риманова поверхность рода $g > 1$. Главное отличие от случая $g = 1$ заключается в том, что образующие в гомологиях надо теперь подобрать специальным образом: так, чтобы

$$\mathrm{H}_1(S,\mathbb{Z}) = \oplus_{i=1}^{g}(\mathbb{Z}a_i \oplus \mathbb{Z}b_i), \tag{\textbf{1.3g}}$$

и при этом

$$\begin{gathered} \forall i, j \in \{1, \dots, g\}; \\ (a_i \cdot a_j) = (b_i \cdot b_j) = 0, \\ (a_i \cdot b_j) = -(b_j \cdot a_i) = \delta_{ij}. \end{gathered} \tag{\textbf{1.3h}}$$

Такой базис называется *симплектическим*; он легко строится, если поверхность рода g стандартным образом реализована как склейка $4g$-угольника.

Аналог формулы **(1.3e)**заключается в том, что в g-мерном пространстве регулярных дифференциалов $\Omega^1[S]$ можно найти такой базис

$$\Omega^1[S] = \oplus_{i=1}^{g} \mathbb{C}\omega_i,$$

что

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}. \qquad \textbf{(1.3i)}$$

Оставшиеся периоды

$$\int_{b_i} \omega_j =: \tau_{ij} \qquad \textbf{(1.3j)}$$

образуют $g \times g$-матрицу $\vec{\tau}$, обладающую (в силу *билинейных соотношений Римана*, которые мы подробно обсудим в основной части курса) двумя свойствами – *симметричностью* и *положительной определённостью мнимой части*, которые позволяют считать её точкой *верхней полуплоскости Зигеля*

$$\mathcal{H}_g := \{\vec{\tau} \in \mathrm{Matr}_{g\times g}(\mathbb{C}) | {}^t\vec{\tau} = \vec{\tau}, \mathrm{Im}\vec{\tau} >> 0\}. \qquad \textbf{(1.3k)}$$

Обозначим

$$\mathrm{Per}_g \subset \mathcal{H}_g$$

множество матриц периодов *всех* римановых поверхностей рода g; замечательный факт (*теорема Торелли*) заключается в том, что любая риманова поверхность восстанавливается по своей матрице периодов, поэтому размерность множества матриц периодов известна:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Per}_g = 3g - 3. \qquad \textbf{(1.3l)}$$

Размерность верхней полуплоскости Зигеля очевидна:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_g = \frac{g(g+1)}{2}. \qquad \textbf{(1.3m)}$$

Поэтому при $g \geq 4$ множество периодов оказывается в верхней полуплоскости Зигеля аналитическим подмногообразием *положительной коразмерности.*

Задача описания этого подмногообразия называется *проблемой Шоттки*; самим Шоттки она была решена при $g = 4$. В 1970-е годы С.П.Новиков сформулировал гипотезу, которая решает проблему Шоттки в терминах *многомерных тета-функций* (см. ниже). В течение нескольких лет она была доказана рядом авторов.

1.4. Многомерные тета-функции. Взглянем на формулу **(1.0h)** и подумаем, можно ли сохранить смысл слагаемых $\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n^2 \tau} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z}$ в её правой части при замене $\tau \in \mathcal{H}$ на $\vec{\tau} \in \mathcal{H}_g$.

Считая $\vec{\tau}$ матрицей квадратичной формы, можно предложить очевидный аналог выражения $n^2\tau$ при $\vec{n} \in \mathbb{Z}^g$: это – результат применения квадратичной формы к вектору, то есть *число* $\vec{n} \cdot \vec{\tau}\vec{n} := \sum_{i,j=1}^{g} n_i \tau_{ij} n_j$. Здесь и ниже для $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^g$ мы всегда используем *комплексное*, (а не *эрмитово*) скалярное произведение $\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{i=1}^{g} u_i v_i$. Аналог выражения nz очевиден при $\vec{z} \in \mathbb{C}^g$.

Таким образом, мы готовы определить *основную* тета-функцию

$$\theta(\vec{z}|\vec{\tau}) := \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^g} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \vec{n}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \vec{n} \cdot \vec{z}}. \tag{1.4a}$$

Как и в случае $g = 1$, её надо понимать либо как голоморфную функцию на $\mathbb{C}^g \times \mathcal{H}_g$, либо как семейство целых функций g комплексных переменных $\vec{z} \mapsto \theta(\vec{z}|\vec{\tau})$, параметризованное точками $\vec{\tau} \in \mathcal{H}_g$.

Проверка сходимости ряда **(1.4a)** снова предоставляется читателю в упражнении **1.5**.

1.5. Гипотеза Новикова. Сформулируем эту гипотезу, сравнительно быстро ставшую теоремой, следуя приложению Шиоты к книге **[Мамфорд1988]**. Как мы увидим, она имеет вид не просто дифференциального уравнения, а относится к *исчислению предикатов* на некотором аналитическом языке.

Нам понадобится небольшая техническая деталь. Точка $\vec{\tau}$ называется *специальной*, если представляющая её матрица либо имеет блочный вид, либо приводится к нему некоторыми преобразованиями, которые будут обсуждаться в основной части курса. Специальные точки образуют многообразие положительной коразмерности, а остальные называются *общими*.

Обозначим

$$\mathcal{H}_g^\circ \subset \mathcal{H}_g$$

множество общих точек.

Для общей матрицы $\vec{\tau} \in \mathcal{H}_g^\circ$ выпишем предикат Новикова, равносильный тому, что она является матрицей периодов.

$$[\vec{\tau} \in \mathrm{Per}_g] \Longleftrightarrow [\exists \vec{a}_1 \in \mathbb{C}^g \setminus \{\vec{0}\}, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{C}^g;$$

$$\exists Q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C} : (t_1, t_2, t_3) \mapsto \sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} t_i t_j;$$

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{C}^g;$$

$$u(t_1, t_2, t_3; \vec{v}) := \mathrm{e}^{Q(t_1,t_2,t_3)} \theta(t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + t_3 \vec{a}_3 + \vec{v} | \vec{\tau})$$

является решением уравнения *Кадомцева-Петвиашвили* :

$$(u_{111} + 12 u u_1 - 4 u_3)_1 + 3 u_{22} = 0].$$

Здесь нижними индексами, как обычно в теории нелинейных дифференциальных уравнений, обозначены частные производные $\frac{\partial}{\partial t_i}$.

Основная цель курса – разобраться в имеющихся доказательствах этой во многих отношениях замечательной гипотезы.

Немного освоиться с её формулировкой читателю поможет упражнение **1.6**.

Упражнения

1.0. Не вдумываясь в вопросы сходимости, проверьте, что функция Эрмита, определённая формулой **(1.0a)**, при любых значениях параметров μ, ν удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\left(\frac{\partial^2}{(\partial v)^2} - 4\pi \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial v}\right) \cdot \Theta_{\mu,\nu} = 0$$

(оно приобретает вещественный вид и физический смысл при замене τ на $\mathrm{i}t$).

1.1. Докажите, что на любом компакте в $\dot{\mathbb{C}} \times \mathbf{\Delta}$ ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n$$

сходится абсолютно и равномерно.

1.2. Фиксируйте несколько значений $q \in (-1, 1)$ и с помощью доступных вам технических средств изобразите графики вещественных функций $x \mapsto \vartheta(x|q)$. Сколько членов ряда для ϑ достаточно взять для того, чтобы увеличение количества членов не меняло график?

1.3. Напишите соотношения квазипериодичности для функции ϑ. Затем, пользуясь доступными вам техническими средствами, проверьте их численно, взяв наугад несколько q из единичного круга.

1.4. Опираясь на дифференциальное уравнение Вейерштрасса, убедитесь в том, что функция $z \mapsto \wp(z|\tau)$ удовлетворяет (стационарному) уравнению *Кортевега-де-Фриза* $u''' - 12uu' = 0$.

1.5. Проверьте сходимость ряда, определяющего функцию $\theta(\vec{z}|\vec{\tau})$. **Указание.** См. **[Мамфорд1988]**, стр. 99.

1.6. Положите в предикате Новикова $\vec{a}_2 = \vec{a}_3 = \vec{0}$. Сильно ли он упростился?

Литература

[ГурвицКурант1968] А.Гурвиц, Р.Курант, *Теория функций.* Перевод с нем. М., «Наука», 1968.
[Мамфорд1988] Д. Мамфорд *Лекции о тета-функциях.* Перевод с англ. М., «Мир», 1988.