Семинар №1. C*-алгебры.

C*-алгебры. Примеры и простейшие свойства

Определение 1. *Банаховой алгеброй (над полем $\mathbb{C}$)* называется банахово пространство над $\mathbb{C}$, являющееся также ассоциативной алгеброй над $\mathbb{C}$, в котором норма и операция умножения связаны следующим условием: для любых элементов a и b

$$\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|.$$

Определение 2. *C^*-алгеброй* называется банахова алгебра $\mathcal{A}$, в которой определена антилинейная инволюция $a \mapsto a^*$, удовлетворяющая условию: $(ab)^* = b^*a^*$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$, и для всех элементов $a \in \mathcal{A}$ выполняется равенство

$$\|a^*a\| = \|a\|^2. \tag{1}$$

Упражнение 1. Покажите, что инволюция $*$ в C*-алгебре изометрична: $\|a^*\| = \|a\|$ для любого элемента a.

Примеры C*-алгебр.

1. Простейший пример коммутативной C*-алгебры — это поле $\mathbb{C}$, рассматриваемое как алгебра над собой, с обычной нормой $\|z\| = |z|$.

2. Гораздо более содержательный пример — это пространство $C(X)$ непрерывных (комплекснозначных) функций на компактном (хаусдорфовом) топологическом пространстве X. Норма в этом пространстве задается стандартным образом: $\|f\| = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$, а инволюция - поточечным комплексным сопряжением: $f^* := \bar{f}$.

3. Еще один важный пример — это введенное на лекции пространство $C_0(X)$ непрерывных функций на *локально компактном* топологическом пространстве X, «обращающихся в нуль на бесконечности». Формальное определение этого пространства таково:

$$C_0(X) = \{f \in C(X) \colon \forall \varepsilon > 0 \text{ множество } \{x \in X \colon |f(x)| \geqslant \varepsilon\} \text{ компактно}\}.$$

Можно также рассмотреть бóльшее пространство $BC(X)$ непрерывных *ограниченных* функций на локально компактном топологическом пространстве X. В двух последних примерах инволюция опять задается комплексным сопряжением: $f \mapsto \bar{f}$, а норма функции f есть $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$.

Замечание 1. Как показано на лекции (теорема Гельфанда – Наймарка), *любая* коммутативная C*-алгебра изоморфна алгебре $C_0(X)$ для подходящего локально компактного пространства X.

4. Примерами некоммутативных C*-алгебр могут служить алгебры $n \times n$-матриц $Mat_n(\mathbb{C})$ и алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. (Очевидно, алгебра матриц $Mat_n(\mathbb{C})$ представляет собой частный случай алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, когда пространство $\mathcal{H}$ n-мерно.) Здесь инволюция есть переход к сопряженному оператору, а норма — это операторная норма: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Унитальные C*-алгебры. Добавление единицы

Чаще всего мы будем рассматривать C*-алгебры, имеющие единичный элемент (единицу) $\mathbb{1}$ (они называются *унитальными*). Алгебра $C(X)$ функций на компактном пространстве имеет единицу - это функция, тождественно равная 1. Если пространство X локально компактно, но не компактно, то в алгебре $BC(X)$ тоже есть единица (это также тождественно единичная функция), а вот алгебра $C_0(X)$ единицей не обладает. Алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ содержит единичный элемент — это тождественный оператор Id.

Упражнение 2. Покажите, что в унитальной C*-алгебре $\|\mathbb{1}\| = 1$. (Указание: докажите, что $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$.)

Если C*-алгебра $\mathcal{A}$ не унитальна, можно вложить ее в унитальную алгебру следующим способом. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{A}^\dagger = A \oplus \mathbb{C}$, состоящее из пар (a, λ), где $a \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, и определим умножение в нем так, чтобы алгебра $\mathcal{A}$ вкладывалась в $\mathcal{A}^\dagger$ отображением $a \mapsto (a, 0)$, а элемент $(0, 1)$ был единичным в $\mathcal{A}^\dagger$. Очевидно, единственный способ сделать это — положить

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu).$$

Норму в $\mathcal{A}^\dagger$ определим следующим образом:

$$\|(a, \lambda)\|_{\mathcal{A}^\dagger} = \sup_{b \in \mathcal{A}, \|b\|_{\mathcal{A}} \leqslant 1} \|ab + \lambda b\|_{\mathcal{A}}.$$

Инволюция в $\mathcal{A}^\dagger$ задается естественным образом: $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$.

Упражнение 3. Проверьте, что функция $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^\dagger}$ действительно задает норму на $\mathcal{A}^\dagger$ и что $\mathcal{A}^\dagger$ является банаховой алгеброй относительно этой нормы.

C*-свойство (1) для получившейся алгебры $\mathcal{A}^\dagger$ доказывается так:

$$\begin{aligned}\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\|_{\mathcal{A}^\dagger} = \sup\{a^*ab + \bar\lambda ab + \lambda a^*b + \bar\lambda\lambda b\|_{\mathcal{A}} \colon \|b\|_{\mathcal{A}} \geqslant 1\} \geqslant \\ \sup\{b^*a^*ab + \bar\lambda b^*ab + \lambda b^*a^*b + \bar\lambda\lambda b^*b\|_{\mathcal{A}} \colon \|b\|_{\mathcal{A}} \geqslant 1\} = \\ \sup\{\|(ab+\lambda b)^*(ab+\lambda b)\|_{\mathcal{A}} \colon \|b\|_{\mathcal{A}} \geqslant 1\} = \\ \sup\{\|ab+\lambda b\|^2_{\mathcal{A}} \colon \|b\|_{\mathcal{A}} \geqslant 1\} = \|(a,\lambda)\|^2_{\mathcal{A}^\dagger}\end{aligned}$$

(обратное неравенство следует из легко проверяемой изометричности инволюции в $\mathcal{A}^\dagger$ и свойств нормы в банаховой алгебре).

Упражнение 4. Проверьте, что $\|(a,0)\|_{\mathcal{A}^\dagger} = \|a\|_{\mathcal{A}}$.

Вследствие последнего упражнения C*-алгебра $\mathcal{A}$ изометрично вкладывается в $\mathcal{A}^\dagger$ как замкнутая подалгебра (и даже двусторонний идеал): элементу $a \in \mathcal{A}$ сопоставляется пара $(a,0)$. C*-алгебру $\mathcal{A}^\dagger$ мы будем называть унитализацией C*-алгебры $\mathcal{A}$.

Замечание 2. Если C*-алгебра $\mathcal{A}$ — это алгебра $C_0(X)$ для локально компактного, но некомпактного пространства X, то можно показать, что $\mathcal{A}^\dagger$ — это алгебра непрерывных функций на одноточечной компактификации X:

$$(C_0(X))^\dagger = C(X \cup \{\infty\}).$$

Более подробно это будет обсуждаться далее.

Спектры элементов C*-алгебры и их свойства

Определение 3. Пусть $\mathcal{B}$ — банахова алгебра с единицей $\mathbb{1}$. *Спектром* элемента $x \in \mathcal{B}$ называется множество тех комплексных чисел λ, для которых элемент $x - \lambda\mathbb{1}$ необратим:

$$\operatorname{sp} x = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon x - \lambda\mathbb{1} \text{ необратим}\}.$$

Для упрощения рассуждений мы будем считать, что $\|\mathbb{1}\| = 1$ (это, в частности, верно в C*-алгебрах, см. упражнение 2.) Однако все доказанные утверждения о спектрах элементов банаховых алгебр верны и без этого предположения.

Следующие свойства спектра верны для любой унитальной банаховой алгебры.

Упражнение 5. Для любого элемента $x \in \mathcal{B}$ его спектр $\operatorname{sp} x \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant \|x\|\}$. (Указание: покажите, что если $\|x\| < 1$, то элемент $\mathbb{1} + x$ обратим и обратный элемент задается сходящимся рядом:

$$(\mathbb{1} + x)^{-1} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n. \tag{2}$$

Выведите из этого, что если $|\lambda| > \|x\|$, то элемент $x - \lambda\mathbb{1}$ обратим.)

Упражнение 6. Спектр любого элемента $x \in \mathcal{B}$ замкнут (а значит, компактен). (Указание: покажите, используя формулу (2), что элемент, близкий к обратимому, обратим.)

Определение 4. *Спектральным радиусом* $r(x)$ элемента $x \in \mathcal{B}$ называется максимум модуля элементов $\operatorname{sp} x$ (или, что то же самое, радиус наименьшего замкнутого круга в $\mathbb{C}$ с центром в нуле, содержащего $\operatorname{sp} x$).

Упражнение 7 (*). Докажите, что для спектрального радиуса справедлива следующая формула Коши – Адамара:

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}. \tag{3}$$

Указание: эта формула вытекает из следующих утверждений:

1. Для любого элемента x $\operatorname{sp}(x^n) = (\operatorname{sp} x)^n$, т.е. $\lambda \in \operatorname{sp}(x^n)$ тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_1^n$, где $\lambda_1 \in \operatorname{sp} x$. (Чтобы показать это, разложите многочлен $t^n - \lambda$ на множители и докажите по индукции, что при любом $k \in \mathbb{N}$ произведение *коммутирующих* элементов $x_1 x_2 \dots x_k$ обратимо тогда и только тогда, когда каждый элемент x_j, $j = 1, \dots, k$ обратим.)
2. $r(x) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}$.
3. Если f — непрерывный линейный функционал на $\mathcal{B}$ ($f \in \mathcal{B}^*$), то числовая функция $\tilde{f}(\lambda) := f((x - \lambda\mathbb{1})^{-1})$ голоморфна в дополнении к спектру x, т.е. в $\mathbb{C} \setminus \operatorname{sp} x$. (Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$(x - \lambda\mathbb{1})^{-1} - (x - \mu\mathbb{1})^{-1} = (\lambda - \mu)(x - \lambda\mathbb{1})^{-1}(x - \mu\mathbb{1})^{-1}.$$

В силу линейности функционала f

$$\frac{f((x-(\lambda+h)\mathbb{1})^{-1})-f((x-\lambda\mathbb{1})^{-1})}{h} = \\ f\left(\frac{(x-(\lambda+h)\mathbb{1})^{-1}-(x-\lambda\mathbb{1})^{-1}}{h}\right) = \\ -f\left((x-(\lambda+h)\mathbb{1})^{-1}(x-\lambda\mathbb{1})^{-1}\right).$$

Пользуясь формулой (2), можно показать, что

$$(x-(\lambda+h)\mathbb{1})^{-1}(x-\lambda\mathbb{1})^{-1}\to(x-\lambda\mathbb{1})^{-2} \text{ при } h\to 0,$$

а значит, в силу непрерывности функционала f также и

$$f\left((x-(\lambda+h)\mathbb{1})^{-1}(x-\lambda\mathbb{1})^{-1}\right)\to f\left((x-\lambda\mathbb{1})^{-2}\right) \text{ при } h\to 0.)$$

4. Для любого $f\in\mathcal{B}^*$ функция $\tilde{f}(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda=\infty$ разлагается в степенной ряд:

$$\tilde{f}(\lambda)=\lambda^{-1}\left(f(\mathbb{1})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x^n)}{\lambda^n}\right),$$

сходящийся в круге $|\lambda|>r(x)$.

5. Для любого $f\in\mathcal{B}^*$ верно неравенство $r(x)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}|f(x^n)|^{1/n}$.

6. $r(x)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$. (Указание. Чтобы показать это, воспользуйтесь *принципом равномерной ограниченности*: если множество $M\subset\mathcal{B}$ таково, что для любого $f\in\mathcal{B}^*$ числовое множество $\{f(x)\colon x\in M\}$ ограничено, то множество M ограничено по норме. В качестве множества M следует взять множество $\left\{\dfrac{x^n}{(1+\varepsilon)^n(r(x))^n)}\right\}$ для любого $\varepsilon>0$ и достаточно больших n.)

Упражнение 8. Покажите, что спектр любого элемента унитальной банаховой алгебры не может быть пустым. (Указание. Покажите, что если $\operatorname{sp}x$ пуст, то для любого функционала $f\in\mathcal{B}^*$ числовая функция $\tilde{f}(\lambda):=f((x-\lambda\mathbb{1})^{-1})$ является целой функцией, стремящейся к нулю на бесконечности.)

Упражнение 9. Покажите, что если элементы x и y коммутируют, то $r(xy) \leqslant r(x)r(y)$.

Если $\mathcal{A}$ — унитальная C*-алгебра, то спектр ее элемента определяется так же, как в любой унитальной банаховой алгебре. (Если $\mathcal{A}$ — неунитальная C*-алгебра, под спектрами ее элементов иногда подразумевают спектры их образов в ее унитализации $\mathcal{A}^{\dagger}$.) Для некоторых классов элементов алгебры $\mathcal{A}$ (например, самосопряженных, то есть таких, что $a^* = a$), спектры этих элементов обладают дополнительными свойствами.

Упражнение 10. Покажите, что если $a^* = a$, то $\operatorname{sp} a \in \mathbb{R}$. (Указание. Достаточно доказать, что число $-i$ не может содержаться в спектре самосопряженного элемента. Если предположить, что $-i \in \operatorname{sp} a$, то для любого вещественного t имеем $t+1 \in \operatorname{sp}(t\mathbb{1} + ia)$, откуда

$$(t+1)^2 \leqslant \|t\mathbb{1} + ia\|^2 = \|(t\mathbb{1} - ia)(t\mathbb{1} + ia)\| = \|t^2\mathbb{1} + a^2\| \leqslant t^2 + \|a^2\|.)$$

Упражнение 11. Покажите, что если $a^* = a$, то $r(a) = \|a\|$. (Указание: воспользуйтесь формулой (3) для спектрального радиуса, выбирая $n = 2^k$.)

Мультипликативные функционалы

Определение 5. *Мультипликативным функционалом* на C*-алгебре $\mathcal{A}$ называется линейный функционал $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ такой, что $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$.

Упражнение 12. Если $\mathcal{A}$ — унитальная алгебра, то для любого ненулевого мультипликативного функционала μ на $\mathcal{A}$ верно равенство $\mu(\mathbb{1}) = 1$.

Если $\mathcal{A}$ — неунитальная алгебра, то любой ненулевой мультипликативный функционал на $\mathcal{A}$ однозначно продолжается до мультипликативного функционала на ее унитализации $\mathcal{A}^{\dagger}$. В самом деле, в силу предыдущего упражнения для продолженного функционала должно выполняться свойство $\mu(\mathbb{1}_{\mathcal{A}^{\dagger}}) = 1$, а тогда продолжение на всю алгебру $\mathcal{A}^{\dagger}$ однозначно определяется по линейности, и нетрудно проверить, что построенное продолжение действительно будет мультипликативным функционалом на $\mathcal{A}^{\dagger}$. А вот нулевой функционал можно продолжить двумя способами:

полагая $\mu(\mathbb{1}_{\mathcal{A}^\dagger}) = 0$ (тогда получится тождественно нулевой функционал на $\mathcal{A}^\dagger$) или $\mu(\mathbb{1}_{\mathcal{A}^\dagger}) = 1$.

Оказывается, из свойства мультипликативности линейного функционала на C*-алгебре автоматически следуют два важных свойства.

Упражнение 13. Докажите, что если μ — мультипликативный функционал на унитальной C*-алгебре $\mathcal{A}$, то μ ограничен и $\|\mu\| = 1$. (Указание. Покажите, что для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ $\mu(a) \in \operatorname{sp} a$.)

Поскольку, как уже отмечалось, любой мультипликативный функционал на неунитальной алгебре продолжается на ее унитализацию, то норма любого мультипликативного функционала на неунитальной алгебре не превосходит 1. (На самом деле эта норма в точности равна 1, как и в унитальном случае: это можно показать, используя теорему Гельфанда – Наймарка (теорема 1.1) из лекции.)

Упражнение 14. Докажите, что если μ — мультипликативный функционал на C*-алгебре $\mathcal{A}$, то для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ выполнено $\mu(a^*) = \overline{\mu(a)}$. Таким образом, функционал μ является $*$-гомоморфизмом из C*-алгебры $\mathcal{A}$ в C*-алгебру $\mathbb{C}$. (Указание. Достаточно ограничиться случаем унитальных C*-алгебр. Докажите сначала, что если $a^* = a$, то $\mu(a) \in \mathbb{R}$. Чтобы доказать это, рассмотрите элемент $u := \exp(ia)$ и покажите, что u —*унитарный*, т.е. $u^{-1} = u^*$. Далее покажите, что $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$ и выведите из этого, что $|\mu(u)| = 1$. После этого используйте равенство $\mu(u) = \exp(i\mu(a))$.)

Пусть $\mathcal{A}$ — C*-алгебра. Обозначим множество *ненулевых* мультипликативных функционалов на $\mathcal{A}$ через $M(\mathcal{A})$. (Это множество может оказаться пустым.) Из сказанного выше следует, что $M(\mathcal{A})$ содержится в единичном шаре сопряженного пространства к $\mathcal{A}$ (то есть пространства непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{A}$): $M(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_1^*$.

По теореме Банаха – Алаоглу единичный шар $\mathcal{A}_1^*$ является компактом в *-слабой топологии на $\mathcal{A}^*$. Покажем, что множество $M(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ замкнуто в *-слабой топологии. Действительно, указанное множество есть в точности множество функционалов $\mu \in \mathcal{A}^*$, удовлетворяющих условиям $\mu(ab) - \mu(a)\mu(b) = 0$ для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$, а числовые функции $\mu \mapsto \mu(a)\mu(b) - \mu(ab)$ на $\mathcal{A}^*$ непрерывны относительно *-слабой топологии на $\mathcal{A}^*$. Тем самым множество $M(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ есть общее множество нулей семейства непрерывных функций. Поэтому оно замкнуто, а поскольку оно лежит в единичном шаре $\mathcal{A}_1^*$, то оно компактно. Следовательно, пространство $M(\mathcal{A})$, наделенное топологией, которая индуцирована *-слабой топологией на $\mathcal{A}^*$, локально компактно.

Более того, если $\mathcal{A}$ — унитальная алгебра, то $M(\mathcal{A})$ не только локально компактно, но и компактно. В самом деле, в этом случае непрерывная функция $\varepsilon_{\mathbb{1}}\colon \mu \mapsto \mu(\mathbb{1})$ принимает значение 1 на $M(\mathcal{A})$ и 0 на нулевом функционале в A^*. Поэтому само множество $M(\mathcal{A})$ замкнуто в *-слабой топологии на $\mathcal{A}^*$, а значит, компактно.

Если $\mathcal{A}$ — унитальная C*-алгебра, то, как отмечалось в указании к упражнению 13, для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ число $\mu(a) \in \operatorname{sp} a$. Оказывается, для *коммутативных* унитальных C*-алгебр верно и обратное утверждение. Более точно, при доказательстве теоремы Гельфанда – Наймарка (теорема 1.1) в лекции была использована следующая лемма о мультипликативных функционалах (которую можно назвать мультипликативным вариантом теоремы Хана – Банаха).

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная унитальная C^*-алгебра и $a \in \mathcal{A}$. Тогда для любого числа $\lambda \in \operatorname{sp} a$ найдется такой мультипликативный функционал μ на $\mathcal{A}$, что $\mu(a) = \lambda$.*

Доказательство. Покажем, что ядро всякого мультипликативного функционала на $\mathcal{A}$ есть максимальный идеал в $\mathcal{A}$ (т.е. идеал, не содержащийся ни в каком большем идеале, кроме идеала, совпадающего со всей алгеброй) и наоборот, любой максимальный идеал в $\mathcal{A}$ есть ядро некоторого мультипликативного функционала. Допустим, что это установлено. Главный идеал алгебры $\mathcal{A}$ вида $(a - \lambda\mathbb{1})\mathcal{A}$ содержится в некотором максимальном идеале. Это следует из леммы Цорна: множество собственных идеалов алгебры $\mathcal{A}$ можно частично упорядочить по включению, а если $\{I_\alpha\}$ — линейно упорядоченное подмножество в этом множестве, то $\cup_\alpha I_\alpha$ — собственный идеал, поскольку ни один из идеалов I_α не содержит единицы, а значит, $\cup_\alpha I_\alpha$ — верхняя грань подмножества $\{I_\alpha\}$. Значит, для некоторого мультипликативного функционала μ выполнено $(a - \lambda\mathbb{1})\mathcal{A} \subset \ker\mu$. В частности, $a - \lambda\mathbb{1} \in \ker\mu$, а тогда $\mu(a) = \lambda$, что и требовалось.

Пусть μ — мультипликативный функционал на $\mathcal{A}$. Тогда $\ker\mu$ — идеал в $\mathcal{A}$. Пусть J — идеал в $\mathcal{A}$, строго содержащий $\ker\mu$, и пусть $a_0 \in J \backslash \ker\mu$. Тогда $\mu(a_0) \neq 0$. Элемент $a_0 - \mu(a_0)\mathbb{1}$ содержится в $\ker\mu$, а значит, и в J, поэтому $a_0 - (a_0 - \mu(a_0)\mathbb{1}) = \mu(a_0)\mathbb{1}$ содержится в J. Тогда $\mathbb{1} \in J$, а значит, $J = \mathcal{A}$.

Обратно, пусть I — (собственный) максимальный идеал в $\mathcal{A}$. Тогда I замкнут. Действительно, замыкание идеала I тоже является идеалом, а потому должно совпадать с I или с $\mathcal{A}$. Но собственный идеал не может быть плотным в $\mathcal{A}$, поскольку множество обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}$ открыто, а идеал, содержащий обратимый элемент, совпадает со всей алгеброй.

Поскольку I замкнут, то факторалгебра $\mathcal{A}/I$ является коммутативной банаховой алгеброй с единицей. В этой алгебре нет собственных ненулевых идеалов (иначе прообраз такого идеала при стандартной проекции $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$) был бы собственным идеалом в $\mathcal{A}$, содержащим I). Это значит, что факторалгебра $\mathcal{A}/I$ является полем, т.е. любой ее ненулевой элемент обратим (поскольку ненулевые главные идеалы алгебры $\mathcal{A}/I$ совпадают с ней самой). Тогда $\mathcal{A}/I = \mathbb{C}$. Действительно, если x — любой ее элемент, то $\operatorname{sp} x$ непуст (см. упражнение 8), а если $\lambda \in \operatorname{sp} x$, то $x - \lambda \mathbb{1}_{\mathcal{A}/I} = 0$, т.е. $x = \lambda \mathbb{1}_{\mathcal{A}/I}$.

Итак, $\mathcal{A}/I = \mathbb{C}$. Тогда стандартная проекция $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ является мультипликативным функционалом. Очевидно, ядро этого функционала совпадает с I. Лемма доказана.