Задачи для экзамена по курсу «Введение в некоммутативную геометрию»

Для получения оценки «4» нужно сдать одну задачу, для получения оценки «5» — две задачи. Задачи в списке сгруппированы по темам, названия тем набраны **жирным** *шрифтом. Сдавать две задачи из одной и той же темы нельзя. Если в задаче несколько утверждений (или пунктов), то для сдачи нужно доказать все утверждения (решить все пункты).*

Решения задач нужно присылать на следующие адреса электронной почты (лучше присылать решения на несколько адресов сразу или даже на все сразу):

sergeev@mi.ras.ru
komlov@mi.ras.ru
palvelev@mi.ras.ru
innocenti.maresin@gmail.com

C*-алгебры

1. Показать, что построенные в лекции 1 функторы, задающие эквивалентность категорий компактных хаусдорфовых топологических пространств и унитальных коммутативных C*-алгебр, сопоставляют *метризуемым* пространствам *сепарабельные* C*-алгебры и наоборот.

Теорема Гельфанда–Наймарка

2. Показать, что представление π_φ, построенное при доказательстве теоремы Гельфанда-Наймарка по состоянию φ, неприводимо тогда и только тогда, когда состояние φ — *чистое*.

Векторные расслоения

3. Доказать свойства функтора Γ, построенного в лекции 2:

1) функтор Γ является *строгим*, то есть если для двух морфизмов расслоений $f, g\colon E \to E'$ выполнено равенство $\Gamma f = \Gamma g$, то $f = g$;

2) функтор Γ является *полным*, то есть любой гомоморфизм модулей $\Gamma(E) \to \Gamma(E')$ есть образ некоторого морфизма расслоений $E \to E'$;

3) функтор Γ сохраняет короткие точные последовательности, причем переводит расщепляющиеся короткие точные последовательности в расщепляющиеся.

C*-модули

4. Доказать, что если $\mathcal{A}$ — унитальная C*-алгебра, то модуль ${}^n\mathcal{A}$, состоящий из n-мерных строк элементов алгебры $\mathcal{A}$, является C*-модулем над $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$ со спариванием

$$\big((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)\big) := (a_1^*, \dots, a_n^*)^t (b_1, \dots, b_n)$$

(пример 4 из семинара 4).

5. а) Проверить, что введенный на лекции 3 модуль $l^2_{\mathcal{A}}$ является C*-модулем.

б) Доказать, что если $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, то $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \cong l^2(\mathcal{A})$.

6. Описать все конечномерные C*-алгебры. *Указание:* любая C*-алгебра $\mathcal{A}$ является модулем над своим *центром* $Z(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} \colon ab = ba \ \forall b \in \mathcal{A}\}$.

Тензорные произведения C*-алгебр

В следующих двух задачах используется понятие тензорного произведения C-алгебр. Тензорным произведением двух C*-алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называется пополнение их алгебраического тензорного произведения $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ относительно нормы, обладающей перекрестным свойством: $\|a_1 \otimes a_2\| = \|a_1\|_{\mathcal{A}_1} \|a_2\|_{\mathcal{A}_2}$. В приведенных ниже случаях такая норма существует и единственна.*

7. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ — C*-алгебра компактных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Доказать, что $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ и $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{K}) \cong \mathcal{K}$.

8. Доказать, что $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{A}$.

K-группы

9. Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — C*-алгебра всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Показать, что $K_0(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = 0$ и $K_1(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = 0$.

10. Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор (то есть окружность). Показать, что

$$K_1^{top}(C(\mathbb{T})) = \mathbb{Z} \text{ и } K_0^{top}(C(\mathbb{T})) = \mathbb{Z}.$$

Фредгольмовы операторы

11. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства, а ограниченные операторы $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ и $G : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ таковы, что для

некоторого $N \in \mathbb{N}$ операторы $(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - GF)^N$ и $(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - FG)^N$ имеют след. Показать, что индекс оператора F можно найти по формуле

$$\operatorname{ind} F = \operatorname{Tr}(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} - GF)^N - \operatorname{Tr}(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} - FG)^N.$$

Морита-эквивалентность

12. Пусть две унитальные C*-алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ морита-эквивалентны. Построить биективное соответствие между невырожденными представлениями C*-алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, переводящее неприводимые представления в неприводимые. *Указание:* использовать ГНС-конструкцию.

s-Числа компактных операторов

13. Пусть $1 < p < \infty$. Показать, что если положительный оператор T принадлежит пространству $\mathcal{L}^{p+} = \mathcal{L}^{p,\infty}$, то $T^p \in \mathcal{L}^{1+} = \mathcal{L}^{1,\infty}$. Показать, что обратное утверждение неверно.

Вычет Водзицки

14. Пусть M есть n-мерное компактное риманово многообразие, Δ_M — оператор Лапласа–Бельтрами на M. Тогда

$$\operatorname{Res} \Delta_M^{-n/2} = \Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

где Ω_n есть площадь единичной $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}.

Фредгольмовы модули

15. Пусть $\mathcal{H} = L^2(S^1)$, а $H\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — преобразование Гильберта:

$$H\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k\theta}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\operatorname{sgn} k) a_k e^{2\pi i k\theta},$$

где считается $\operatorname{sgn} 0 = 1$. Пусть представление π алгебры $\mathcal{A} = C^\infty(S^1)$ задано операторами умножения: $(\pi(a)f)(x) = a(x)f(x)$. Тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, S)$ является нечетным фредгольмовым модулем. Доказать, что для любых $a, b \in \mathcal{A}$ верно равенство

$$\int a\, db = c \int_{S^1} a(x) b'(x) dx,$$

где слева стоит интеграл, определяемый фредгольмовым модулем, а справа — обычный интеграл Лебега; c — некоторая константа.

Гомологии Хохшильда

16. Показать, что подкомплекс $D.(\mathcal{A})$ в комплексе $C.(\mathcal{A})$ — ациклический, то есть группы гомологий $H_n(D.(\mathcal{A}), b) = 0$ при $n > 0$.