12.9.16 / 12.9.22

Лекция 1

1.0. Краткое историческое введение. Элементы алгебраической топологии в работах классиков.

Эйлер: кёнигсбергские мосты, 3 дома и 3 колодца, эйлерова характеристика – её обобщения будут играть очень важную роль в этом курсе.

Риман: род поверхности, многомерная геометрия.

Пуанкаре: качественная теория дифференциальных уравнений и вложенные многообразия, предварительные определения инвариантов (гомотопических и гомологических), гипотеза Пуанкаре.

1.1. Классический подход к описанию топологий. Задолго до строгого определения топологических пространств рассматривались достаточно простые подмножества евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$. Их разбивали на простейшие части – *симплексы* – и описывали схемы *примыкания:* меньший симплекс примыкает к большему, если лежит в его замыкании.

Этот подход весьма эффективен при описании поверхностей, вложенных в $\mathbb{R}^3$, как объединений треугольников; в связи с этим обсуждаемые разбиения называют *триангуляциями,* причём в любой размерности.

В очень простом упражнении **1.1** читателю предлагается поработать с триангуляциями, рассматривавшимися ещё древнегреческими математиками.

1.2. (Абстрактные) симплициальные схемы. Слово *абстрактная* часто будет опускаться.

Объекты категории представляют собой конечные множества с классами выделенных подмножеств

$$\mathcal{SSH} := \{\{(V,S)|\#V < \infty, S \subseteq \mathrm{Sub}(V)\}\}$$

Множество V называется множеством *вершин* (vertices) схемы, а элементы множества S – *симплексами.* Предполагаются выполненными следующие два условия:

$$\forall v \in V; \{v\} \in S:$$

все одноэлементные множества (вершин) суть симплексы;

$$\forall s, s' \in \mathrm{Sub}(V); [[s \in S] \wedge [s' \subset s]] \Longrightarrow [s' \in S]:$$

любое подмножество симплекса – симплекс.

Морфизмы категории определяются как отображения множеств вершин, уважающие симплициальные структуры:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{SSH}}((V,S),(V',S')) := \{f : V \longrightarrow V'|\forall s \in S; f(s) \in S'\}.$$

См. **[Spanier1966].**

Малоэлементные симплициальные схемы изображаются очевидным образом. В упражнении **1.2** читателю предлагается поработать с такими схемами и наглядно, и формально.

1.3. Гомологии симплициальных схем с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$. Это – простейшая, но важная гомологическая теория. Для любой схемы $(V,S) \in\in \mathcal{SSH}$ введём линейное над $\mathbb{F}_2$ *пространство (абстрактных) симплициальных цепей с коэффициентами в* $\mathbb{F}_2$

$$\mathbf{chn}(V,S;\mathbb{F}_2) := \oplus_{s \in S} s\mathbb{F}_2$$

вместе с оператором взятия (абстрактной) границы

$$\partial : \mathbf{chn}(V, S; \mathbb{F}_2) \longrightarrow \mathbf{chn}(V, S; \mathbb{F}_2) : s \mapsto \sum_{v \in s} (s \setminus \{v\}),$$

удовлетворяющего, как легко проверить, тождеству

$$\boxed{\partial^{2\circ} = 0}.$$

Это позволяет определить *группы гомологий*

$$\mathrm{H}_\bullet(V, S; \mathbb{F}_2) := \frac{\ker \partial}{\mathrm{im} \partial}.$$

В упражнении **1.3** читателю предлагается проверить, что тем самым определён *функтор*

$$\mathrm{H}_\bullet(-; \mathbb{F}_2) :: \mathcal{SSH} \longrightarrow\!\!\!\!\longrightarrow (\mathbb{F}_2)\mathcal{VECT}[\mathbf{fin.dim}],$$

а в упражнении **1.4** – вычислить несколько простых пространств гомологий.

1.4. Функтор реализации симплициальной схемы. Словесно: множество вершин вкладывается в евклидово пространство достаточно большой размерности так, чтобы вершины оказались в общем положении, а затем берётся объединение выпуклых оболочек симплексов. Интуитивно ясно, что топология полученного объединения не зависит от вложения вершин, но для строгого определения конструкции удобно в качестве евклидова пространства взять пространство вещественно-значных функций на множестве (абстрактных) вершин.

Таким образом, мы определяем функтор

$$\mathbf{top} :: \mathcal{SSH} \longrightarrow\!\!\!\!\longrightarrow \mathcal{TOP} ::$$

$$:: (V, S) \mapsto\!\!\!\mapsto \{x \in \mathbb{R}^V | \sum_{v \in V} x(v) = 1 \text{ и } \exists s \in S; \mathrm{supp}(x) \subseteq s\}.$$

Непрерывное отображение, соответствующее морфизму схем $(V, S) \to (V', S')$, определяемому отображением множеств вершин $f : V \to V'$, задаётся формулой

$$f_* : \mathbf{top}(V, S) \longrightarrow \mathbf{top}(V', S') : x \mapsto [v' \mapsto \sum_{v \in f^{-1\circ}(v')} x(v)].$$

Функториальность описанной конструкции читателю предлагается проверить в упражнении **1.5**.

Топологическое пространство $\mathbf{top}(V, S)$, построенное по симплициальной схеме (V, S), будем называть *моделью* этой схемы.

Наши модели симплициальных схем определяются вместе с вложениями в евклидовы пространства, размерности которых часто оказываются завышенными в том смысле, что проекции евклидовых пространств на свои подпространства могут быть инъективны (и, разумеется, *кусочно-линейны...*) на моделях.

Так, триангуляции *компактных ориентируемых поверхностей* могут быть спроектированы в трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$. В упражнении **1.6** читателю предлагается проделать это для тора.

1.5. Полиэдры и их симплициальные гомологии. Топологическое пространство называется *полиэдром,* если оно гомеоморфно топологической модели какой-либо симплициальной схемы. Её гомологии и определяются как гомологии этой схемы.

Тот факт, что полученные гомологии зависят только от топологии исходного пространства и не зависят от выбора моделм – трудная теорема классической математики, см., например. **[Понтрягин1986].** Мы ограничимся тем, что предложим читателю в задаче ??? проверить этот факт в нескольких частных случаях, и пойдём другим путём.

1.6. Ориентации симплексов. Под *геометрическим* $k-$симплексом мы будем понимать выпуклую оболочку множества из $k+1$ точки в общем положении в евклидовом пространстве достаточно большой размерности; слова *в общем положении* означают, что множества из k направленных рёбер, выходящих из любой вершины и понимаемые как векторы, линейно независимы.

Обозначим через $\mathsf{Aff}_n(\mathbb{R})$ группу аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$; она представляет собой полупрямое произведение группы $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ и группы сдвигов $\mathbb{R}^n$. Выделим в ней подгруппу $\mathsf{Aff}_n^+(\mathbb{R})$ индекса 2, состоящую из преобразований, $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$-компонента которых имеет положительный определитель; это – группа *сохраняющих ориентацию* преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

Группа $\mathsf{Aff}_n^+(\mathbb{R})$ действует на множестве $k-$симплексов в любом пространстве $\mathbb{R}^n$ (это множество непусто при $n \geq k+1$). В дальнейшем мы будем отождествлять геометрические симплексы, переводимые друг в друга этой группой, и называть орбиту этой группой *ориентированным симплексом*; традиционны из этой орбиты выбирается представитель с вершинами $(1,0,0,\dots),(0,1,0,0,\dots),(0,0,1,0,0,\dots)$, именуемый *стандартным (геометрическим) симплексом.*

Орбиту, содержащую симплекс с вершинами $\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_k$, будем обозначать $[\mathrm{v}_0,\dots,\mathrm{v}_k]$.

Для абстрактных симплексов примем аналогичные определения и обозначения, заменив $\mathsf{Aff}_n^+(\mathbb{R})$ на группу *чётных перестановок* A_n.

1.7. Симплициальные гомологии с произвольными коэффициентами. Далее $\mathbb{K}$ – произвольное (коммутативное с 1) кольцо. Определим $\mathbb{K}-$модуль *симплициальных цепей с коэффициентами в* $\mathbb{K}$

$$\mathbf{chn}(V,S;\mathbb{K}) := \oplus_{k=0}^{\infty} \oplus_{\{v_0,\dots,v_k\}\in S} \mathbb{K}[v_0,\dots,v_k],$$

где приняты соотношения

$$[v_{\sigma(0)},\dots,v_{\sigma(k)}] = \mathrm{sgn}\sigma[v_0,\dots,v_k]$$

для всех $\sigma \in \mathsf{S}_{k+1}$.

Оператор границы

$$\partial : \mathbf{chn}(V,S;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbf{chn}(V,S;\mathbb{K})$$

определяется теперь формулой

$$\partial[v_0,\dots,v_k] := \sum_{j=0}^{k}(-1)^j[v_0,\dots,v[j] \text{ deleted},\dots,v_k].$$

В упражнении **1.8** читателю предлагается проверить ключевое соотношение

$$\boxed{\partial^2 = 0}.$$

Оно позволяет определить *модуль гомологий*с коэффициентами в кольце $\mathbb{K}$

$$\mathrm{H}_{\bullet}(V, S; \mathbf{K}) := \frac{\ker \partial}{\mathrm{im} \partial}.$$

В заключительных упражнениях этой лекции читателю предлагается вычислить некоторые гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и сравнить их с гомологиями (уже вычисленными и новыми) с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$.

Упражнения

1.1. Какие из платоновых тел определяют триангуляции сферы? Вспомните или вычислите количества вершин, рёбер и граней этих триангуляций; выпишите очевидные закономерности, связывающие эти количества.

1.2. Перечислите симплициальные схемы с не более чем 4 вершинами. Приведите несколько примеров их морфизмов друг в друга. Какие из этих схем *однородны?*

1.3. Проверьте, что сопоставление симплициальной схеме её пространства гомологий (с коэффициентами в поле из двух элементов) функториально.

1.4. Вычислите гомологии с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$ малоэлементных симплициальных схем, перечисленных в упражнении **1.2**.

1.5. Проверьте, что **top** – функтор.

1.6. Изобразите какую-либо триангуляцию тора, представляющую собой объединение треугольников в $\mathbb{R}^3$. Подсказка. Триангулируйте тор, представленный в виде квадрата с отождествлёнными противоположными сторонами, а в $\mathbb{R}^3$ вложите то, что получится, "на глазок."

1.7. Рассмотрите несколько триангуляций сферы и тора и убедитесь в том, что гомологии полученных симплициальных схем с коэффициентами в поле из двух элементов не зависят от выбора ваших триангуляций.

1.8. Проверьте, что квадрат оператора границе в модуле симплициальных коцепей симплициальной схемы с коэффициентами в кольце равен нулю.

1.9. Вычислите гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ малоэлементных симплициальных схем, перечисленных в упражнении **1.2**.

1.10. Рассмотрите те же триангуляции сферы и тора, что в упражнении **1.7,**
, и вычислите их гомологии с коэффициентами в кольце целых чисел.

1.11. Придумайте триангуляцию вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ и вычислите её гомологии с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$ и в $\mathbb{Z}$. <u>Подсказка</u>. Воспользуйтесь икосаэдром.

1.12 (трудное!). Придумайте триангуляцию комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ и вычислите её гомологии с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$ и в $\mathbb{Z}$.

Литература

[**Spanier1966**], Erwin H. Spanier, *Algebraic Topology.* McGraw-Hill, 1966.
[Понтрягин1986] Л.С.Понтрягин. *Основы комбинаторной топологии.* 3-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.:мат. лит., 1986