12.10.1 / 12.11.9

Лекция 3
Гомологии многообразий

3.0. Постановка вопросов. Определив в двух первых лекциях гомологии полиэдров и общих топологических пространств, мы в этой лекции сделаем первый шаг к освоению гомологий главных героев этого курса: алгебраических многообразий. На данной стадии мы можем обсуждать лишь *комплексные* алгебраические многообразия: на алгебраических многообразиях над произвольными алгебраически замкнутыми полями мы топологии (или её обобщений...) пока не вводили.

Под *алгебраическим многообразием* мы в этой лекции будем понимать *гладкое неприводимое проективное* алгебраическое многообразие над $\mathbb{C}$, а под *топологическим многообразием* – компактное связное многообразие, как правило, ориентируемое. На первом этапе мы будем обсуждать гомологии алгебраических многообразий как топологических – то есть забыв их истинную структуру и помня лишь *комплексную* топологию. [1]

Итак, в центре нашего внимания – *забывающий функтор*

$$\mathbf{forget} :: \mathcal{VAR}/\mathbb{C} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{TOP},$$

и нас интересуют функторы на категории комплексных алгебраических многообразий $\mathcal{VAR}/\mathbb{C} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{A}$, со значениями в каких-либо абелевых категориях, пропускающиеся через этот забывающий функтор.

Широко говоря, нас интересуют следующие вопросы:

[1] В дальнейшем на алгебраических многообразиях (над *произвольными* полями!) будет рассматриваться более слабая *топология Зарисского* и обобщённые топологии: *этальная* и *плоская.*

• как охарактеризовать (с точностью до гомеоморфизма) топологические многообразия?
• какие из этих многообразий возникают в результате забывания структура алгебраического многообразия ?
• как описать *все* алгебраические многообразия с заданной топологией?

Пока в нашем распоряжении имеются лишь функторы *гомологий*

$$V \mapsto\mapsto \mathrm{H}_\bullet(\mathbf{forget}(V);\mathbb{K}),$$

сформулированные вопросы трансформируются в следующие:

• какими могут быть числа Бетти топологических многообразий?
• какие из этих наборов чисел Бетти реализуются алгебраическими многообразиями?
• как описать *все* алгебраические многообразия с заданными числами Бетти?

3.1. Первые ответы. Приступим к первому обзору известных результатов, полностью или частично отвечающие на поставленные вопросы.

Прежде всего отметим, что гомологии многообразий – *наблюдаемые* инварианты, градуированные модули конечного типа. Точнее, для топологического многообразия M

$$\mathrm{rank}\ \mathrm{H}_\bullet(M;\mathbb{Z}) < \infty \text{ и } \mathrm{H}_k(M;\mathbb{Z}) = 0 \text{ при } k > \dim\ M.$$

Традиционно для n-мерного многообразия M прежде всего изучаются изучаются *числа Бетти*

$$\mathrm{b}_k(M) := \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}_k(M;\mathbb{Q}).$$

Производящая функция для чисел Бетти многообразия (или более общего пространства *конечного гомологического типа*) называется *многочленом Пуанкаре*

$$\mathrm{P}_M(x) := \sum_{k=0}^{\dim M} \mathrm{b}_k(M)x^k.$$

Ориентируемость многообразия M может быть определена в гомологических терминах: она равносильна изоморфизму

$$\mathrm{H}_{\dim M}(M;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Для ориентируемых топологических многообразий и имеет место *двойственность Пуанкаре,* согласно которой имеет место *симметрия* чисел Бетти

$$\mathrm{b}_k(M) = \mathrm{b}_{\dim M-k}(M) \text{ для } k = 0, \ldots, \dim M.$$

В терминах многочлена Пуанкаре эта симметрия формулируется ещё короче и означает его *возвратность*:

$$\mathrm{P}_M(x) = x^{\dim M}\mathrm{P}_M(\frac{1}{x}).$$

Поскольку интересующие нас алгебраические многообразия *комплексны*, соответствующие им топологические *чётномерны.*Таким образом, с учётом двойственности Пуанкаре первая серия наблюдаемых величин, связанных с топологическим многообразием M– числа

$$\mathrm{b}_1(M), \ldots, \mathrm{b}_{\frac{\dim M}{2}}(M)$$

– мы опустили $\mathrm{b}_0(M) = 1$.

3.2. Алгебраические кривые. В этом (единственном) случае известны полные ответы на поставленные выше вопросы.

• Любая ориентируемая поверхность гомеоморфна *связному объединению* однозначно определённого количества торов; это количество называется *родом* поверхности.

• На любой ориентируемой поверхности имеется хотя бы одна структура комплексной алгебраической кривой.

• Множество структур комплексной алгебраической кривой на поверхности рода g при $g = 0$ состоит из единственного элемента, при $g = 1$ естественно параметризуется *множеством* комплексных чисел (каждой комплексной кривой E рода 1 взаимно однозначно сопоставляется её так называемый *j-инвариант* $j(E) \in \mathbb{C}$), а при $g > 1$ параметризуется так называемым *пространством модулей $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ комплексных алгебраических кривых рода g, неприводимым квазипроективным комплексным многообразием размерности $3g - 3$.*

Из сказанного вытекают и простые ответы на вопросы о числах Бетти. Любое чётное натуральное число $b_1 = 2g$ реализуется как число Бетти поверхности рода g. Каждое такое число является числом Бетти алгебраической кривой. Множество алгебраических кривых с заданным чётным числом Бетти b_1 совпадает с множеством кривых рода $\frac{b_1}{2}$.

Как мы увидим, в высших размерностях дела обстоят несравненно сложнее.

3.3. Промежуточные структуры. Начиная с комплексной размерности 2, которой и будет в осноном посвящена оставшаяся часть лекции, между топологической и алгебраической структурой многообразия имеется целый ряд промежуточных структур. При ослаблении требований к многообразиям их класс на каждом шагу будет расширяться.

<u>От алгебраических многообразий к кэлеровым</u>. (Проективные) алгебраические многообразия можно определить как компактные комплексные, голоморфно вкладываемые в проективные пространства $\mathbf{P}_n(\mathbb{C})$. Забывая вложение, можно сохранить воспоминание об *эрмитовой метрике,* индуцированной на вложенном многообразии метрикой *Фубини-Штуди,* задаваемой в однородных координатах $(Z_0 : \cdots : Z_n)$ надлежащим образом понимаемой формулой

$$(\mathrm{d}s)^2 := \partial\overline{\partial} \log \sum_{\alpha=0}^{n} \mathrm{d}Z_\alpha \mathrm{d}\overline{Z_\alpha}.$$

Эрмитова метрика на комплексном многообразии, задаваемая скалярными произведениями $(u, v) \mapsto (u \cdot v)$ на касательных пространствах, определяет на этом многообразии дифференциальную форму $(u, v) \mapsto \mathrm{Im}(u \cdot v)$, которая в случае метрики, индуцированной метрикой Фубини-Штуди, *замкнута.* Эрмитовы метрики с таким свойством называются *кэлеровыми*; комплексные многообразия, на которых можно ввести кэлерову метрики, также называются *кэлеровыми.*

Как мы только что поняли, любое *алгебраическое многообразие – кэлерово (в силу существования метрики Фубини-Штуди).* Обратное неверно: *общие* комплексные торы $\frac{\mathbb{C}^n}{\textit{общие}\text{ решётки ранга } 2n}$ не допускают структуры алгебраического многообразия.

Выделение алгебраических многообразий среди кэлеровых *гомологическими* условиями – вопрос сложный. Вуазен в [Voisin2004] нашёл на четырёхмерном комплексном торе конфигурацию точек, раздутие которых даёт многообразие с *алгеброй* когомологий, не изоморфной алгебре когомологий никакого алгебраического многообразия; очевидно, в этом примере речь идёт о более тонких гомологических инвариантах, чем набор чисел Бетти (мы введём их в последующих лекциях). Существуют ли примеры, сохраняющие указанное свойство при любых бимероморфных преобразованиях – по-видимому, неизвестно.

<u>От кэлеровых многообразий к комплексным</u>. Описание этого расширения значительно легче. Наличие кэлеровой метрики на компактном комплексном многообразии накладывает существенные ограничения на его топологию, причём выражающиеся в терминах чисел Бетти. Так, в последующих лекциях мы обсудим *разложение Ходжа*, приводящее к выражению чисел Бетти через *числа Ходжа*

$$\mathrm{b}_k = \sum_{p+q=k} \mathrm{h}^{p,q},$$

удовлетворяющие соотношениям симметрии $\mathrm{h}^{p,q} = \mathrm{h}^{q,p}$. Из этих соотношений следует, что *у кэлерова многообразия числа Бетти с нечётными номерами чётны*; с этим явлением мы уже встречались в размерности 1. В высших размерностях благодаря ему легко построить примеры компактных комплексных некэлеровых многообразий; таковы, например, *произведения нечётномерных сфер разных размерностей.*Комплексная структура на *всех* произведениях нечётномерных сфер, обобщающая комплексные структуры на вещественно-двумерном торе, была введена Калаби и Экманом в **[CalabiEckmann1953]**.

<u>От комплексных многообразий к квазикомплексным</u>. При этом расширении воспоминание о комплексной структуре сохраняется "в линейном

приближении". Гладкое многообразие называется *квазикомплексным*[2], если комплексная структура на всех его касательных пространствах. Очевидно, все такие многообразия чётномерны и – чуть менее очевидно – ориентируемы.

Простейший пример квазикомплексного многообразия, квазикомплексная структура которого *неинтегрируема,* то есть не происходит ни из какой комплексной – шестимерная сфера $\mathbf{S}^6$. При введении этой структуры используются *октанионы*, а относительно её неинтегрируемости см. **[Bryant1998].** Вопрос у существовании других комплексных структур на $\mathbf{S}^6$ был долгое время открыт (другие *квази*комплексные были известны). Было распространено предположение об отсутствии комплексных структур на $\mathbf{S}^6$; однако недавно такая структура была обнаружена венгерским математиком Этези, существенно использовавшим *физические* соображения, см. **[Etesi2011]**.

От квазикомплексных многообразий к гладким. Существование квазикомплексных структур на гладких многообразиях – довольно редкое явление. Так, среди сфер $\mathbf{S}^n$ они существуют лишь для $n = 2$ и $n = 6$, см. **[BorelSerre1951]**.

От гладких многообразий к топологическим. Хотя несглаживаемые топологические многообразия довольно трудно придумать и явно построить и хотя долгое время их существование было под вопросом, оказалось, что, например, среди односвязных четырёхмерных многообразий они в некотором смысле преобладают.

3.4. Алгебраические поверхности. В духе этой лекции *комплексные* поверхности следует рассматривать среди вещественных четырёхмерных многообразий. Как мы видели, все введённые классы многообразий нетривиально входят друг в друга.

С помощью образования несвязных сумм простейших четырёхмерных многообразий легко показать, что все пары чисел Бетти $(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$ реализуются в классе*гладких* 4-многообразий. По мере наложения более жёст-

[2]в англоязычной литературе иногда используется термин *quasicomplex*, но чаще – *almost complex*

ких ограничений на многообразия на пары $(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$ также накладываются ограничения; многие вопросы остаются открытыми.

Всё же множества *алгебраических* поверхностей с заданными $(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$ параметризуются квазипроективными комплексными многообразиями, вообще говоря, приводимыми. Имеются пары $(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$, относительно которых неизвестно, пусты ли эти многообразия. Мы вернёмся к рассмотрению этих многообразий в дальнейших лекциях, когда в нашем распоряжении будут более сильные средства, чем пары чисел Бетти.

Литература

[BorelSerre1951] Borel, A., Serre, J.-P.: *Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques.* Applications. C.R. Acad. Sci. Paris 233 680-682 (1951)

[Bryant1998] R. Bryant, *The geometry of almost complex 6-manifolds,* Séminaire Besse, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, June 8, 1998 (1, 2).

[CalabiEckmann1953] E. Calabi and B. Eckmann,*A class of compact complex manifolds which are not algebraic.* Annals of Mathematics, 58, 494–500 (1953).

[FreedmanQuinn1990] M. H. Freedman and F. Quinn, *Topology of* 4*-Manifolds*, Princeton Math. Series 39, Princeton, NJ, 1990.

[Etesi2011] G. Etesi, *The six dimensional sphere is a complex manifold,* ArXiv, math.DG/0505634.

[Voisin2004] C. Voisin, *On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds.* Inventiones Math. Volume 157, Number 2, 329 - 343 (2004).