Лекция 1 (16 февраля 2012)
Введение

1.0. Сумма обратных квадратов. Малоизвестный итальянский математик Пьетро Менголи в 1644 году поставил вопрос, почти век остававшийся открытым: *чему равна сумма обратных квадратов?* Этот вопрос называется также *базельской задачей,* поскольку им (безуспешно) занимались математики из династии Бернулли, жившей в Базеле. В 1735 году Эйлер установил равенство

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}, \qquad \textbf{(1.0a)}$$

поразительным образом связывающее рациональное с трансцендентным; см. **[Eul1740]** . Трудно сказать, что замечательнее – *угадать* такой ответ или *обосновать* его, особенно в рамках понятий восемнадцатого века. Эйлер проверил формулу **(1.0a)** численно – сначала с 6, потом с 17 десятичными знаками; в последнем случае он применил интегральное представление *дилогарифма,* которое будет упомянуто позже. В упражнении **1.1** читателю предлагается провести численную проверку **(1.0a)** современными средствами.

Левую часть равенства **(1.0a)** Эйлер разложил на множители:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\dots=$$

$$=(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\dots)(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\dots)(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\dots)\dots \qquad \textbf{(1.0b)}$$

Эта формула "очевидна" и равносильна основной теореме арифметики: если в правой части **(1.0b)** *разумно* раскрыть *все* скобки, – то есть взять лишь из конечного числа скобок в правой части слагаемые, отличные от 1 – то получится как раз сумма обратных квадратов, разложенных на простые множители. В упражнении **1.2.** читателю, однако, предлагается провести строгое доказательство.

Многочисленные и разнообразные обобщения и аналоги формулы (**1.0b**) называются *эйлеровыми произведениями;* они будут составлять значительную часть нашего курса. А сейчас расскажем о несколько неожиданном приложении этой формулы.

С какой вероятностью наугад взятая дробь сократима? Приведём эвристические соображения. Дробь *не*сократима тогда и только тогда, когда её числитель и знаменатель не имеют общих простых множителей. Но на 2 одновременно делятся числители и знаменатели примерно $\frac{1}{2^2}$ всех дробей, на 3 – примерно $\frac{1}{3^2}$, на 5 – примерно $\frac{1}{5^2}$, и так далее. Считая эти свойства делимости *независимыми* (в чём и состоит *эвристичность* нашего рассуждения), перемножим дополнительные вероятности $1 - \frac{1}{p^2}$ по всем простым p и используем формулу **(1.0b)**, просуммировав геометрические прогрессии в её правой части; окажется, что

$$\textit{Вероятность несократимости дроби} = \frac{6}{\pi^2} = .607927... \approx 61\%.$$

Таким образом, наугад взятая дробь сократима с вероятностью около 39%. В упражнении **1.3** читателю предлагается проверить последнюю формулу экспериментально, а в упражнении **1.4** – придать ей точный смысл.

1.1. Первые обобщения. Левая часть формулы Эйлера **(1.0a)**, дающей решение базельской задачи, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, допускает многочисленные обобщения, некоторые из которых мы сейчас упомянем. Для начала заменим *постоянные* в выражении $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ на *переменные.* Сам Эйлер проварьировал 2 в знаменателе этого выражения, получив *дзета-функцию Римана*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \textbf{(1.1a)}$$

– одну из главных героинь нашего курса – и 1 в числителе, получив *дилогарифм*

$$\mathrm{Li}_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \qquad \textbf{(1.1b)}$$

Используемые в настоящее время *обозначения* этих функций введены не Эйлером, а его последователями; то же касается других *высших трансцендентных* функций, с которыми он работал. (Наоборот, обозначения *элементарных трансцендентных* функций, повсеместно используемые с восемнадцатого века, введены Эйлером.)

Обозначение ζ (как и традиционная буква s для аргумента $s \mapsto \zeta(s)$) введено *Риманом* в **[Riem1859]**. Имя Римана закрепилось за названием ζ, поскольку именно он строго определил эту функцию как мероморфную функцию *комплексной* переменной, голоморфную на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, с помощью *аналитического продолжения,* о котором будет подробно рассказано ниже; некоторые авторы, однако, предлагают называть эту функцию *дзета-функцией Эйлера-Римана.*

Название "дилогарифм" было введено Хиллом в **[Hill1828]**. Иногда дилогарифм называется *функцией Спенса* по имени автора работы **[Spe1809].** Обозначение дилогарифма до сих пор не вполне устоялось – многие авторы пишут не Li_2, а L_2. Мы опираемся на современный фундаментальный справочник **[Lew1981].**

Эйлер, видимо, первым рассмотрел *дзета-функцию Римана* **(1.1a)** – не уточняя области её определения. Дилогарифм несколько старше. Формула **(1.1b)** равносильна

$$\mathrm{Li}_2(x) := -\int_0^x \frac{\log(1-t)\mathrm{d}t}{t}, \tag{1.1c}$$

и этот интеграл впервые появляется в письме Лейбница Иоганну Бернулли, написанному в 1696 году; обосновать равносильность двух определений дилогарифма читателю предлагается в упражнении **1.5**. Дилогарифм изучался Абелем **[Abel1881]** в его теории функциональных уравнений (Абель жил с 1802 по 1829 годы, и указанная ссылка относится к полному собранию его сочинений). Лобачевский в **[Лоб1836]** выразил объём идеального тетраэдра в гиперболическом пространстве через функцию, которую впоследствии назвали *функцией Лобачевского* и обозначили

$$\text{л}(\phi) := -\int_0^\phi \log|2\sin u|\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\phi)}{n^2};$$

эта функция тесно связана с дилогарифмом, см. замечательный современный обзор в статье Милнора **[Mil1982].**

Формулу Эйлера **(1.0a)** мы теперь можем записать в виде

$$\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \textbf{(1.1d)}$$

Перед нами – простейшее соотношение между значениями дзета-функции и дилогарифма; с девятнадцатого века по настоящее время обнаруживаются его многочисленные и разнообразные обобщения, находящие применения в различных разделах математики и физики.

Один из источников получения таких обобщений – *соотношение отражения*

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) \equiv \frac{\pi^2}{6} - \log x \log(1-x), \qquad \textbf{(1.1e)}$$

полученное Эйлером **[Eul1740]**; читателю предлагается обосновать его в упражнении **1.6**. Из этого соотношения, например, при $x = \frac{1}{2}$ следует, что

$$\mathrm{Li}_2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\log 2)^2}{2}; \qquad \textbf{(1.1f)}$$

иначе говоря,

$$\frac{1}{2^1\cdot 1^2} + \frac{1}{2^2\cdot 2^2} + \frac{1}{2^3\cdot 3^2} + \frac{1}{2^4\cdot 4^2} + \frac{1}{2^5\cdot 5^2} + \dots =$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \dots)^2.$$

В работе Цагира **[Zag1988]**, являющейся прекрасным обзором современной теории дилогарифма, отмечается, что у большинства транцендентных функций либо имеется бесконечное множество явно вычисляемых значений, либо их нет вовсе; у дилогарифма же их известно ровно *восемь* (включая тривиальное $\mathrm{Li}_2(0) = 0$), два из которых мы привели. Это – одна из причин, побудившая Цагира написать, что дилогарифм – единственная известная ему функция, обладающая *чувством юмора.*

Соединяя два рассмотренных обобщения, мы придём к понятию *полилогарифма*

$$\mathrm{Li}_s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}, \qquad \textbf{(1.1g)}$$

называемого также *функцией Жонкьера* по имени автора работы **[Jonq1889]**. Мы не будем уточнять области определения этой функции двух переменных; обычно она рассматривается при натуральных s. Несложный случай *целых неположительных* s читателю предлагается разобрать в упражнении **1.7.** Хотя этот случай и относится к элементарной математике, полученные читателем формулы позволят, например, "вычислить"

$$-\mathrm{Li}_{-3}(-1) = 1 - 8 + 27 - 64 + 125 \ldots,$$

освоив тем самым пример *суммирования по Абелю.*

Ещё в одном направлении дзета-функцию Римана обобщает *дзета-функция Гурвица*

$$\zeta(s, q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^s}. \tag{\textbf{1.1h}}$$

От изобилия связанных с ней классических формул разбегаются глаза; ограничимся приведением одной, предваряющей изучение связи $\zeta(s)$ с $\zeta(1-s)$:

$$\zeta(1-s, q) = \frac{1}{2s}[\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} s/2}\beta(q; s) + \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} s/2}\beta(1-q; s)], \tag{\textbf{1.1i}}$$

где

$$\beta(q; s) := 2\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n q}}{(2\pi n)^s} = \frac{2\Gamma(s+1)}{(2\pi)^s}\mathrm{Li}_s(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} q}). \tag{\textbf{1.1j}}$$

Областей определения мы пока не уточняем, подразумевая аналитические продолжения. В упражнении **1.8** читателю предлагается поработать с дзета-функцией Гурвица при $q = \frac{1}{2}$, $s = 2$, заодно "вычислив"

$$.5 + 1.5 + 2.5 + 3.5 + \ldots.$$

Все рассмотренные обобщения суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ перекрываются *трансцендентой Лерха*

$$\Phi(x, s, q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+q)^s}, \tag{\textbf{1.1k}}$$

введённой в работе **[Ler1887]**. Для неё известно интегральное представление

$$\Phi(x, s, q) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}\mathrm{e}^{-qt}}{1 - x\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t, \tag{\textbf{1.1l}}$$

поработать с которым читателю предлагается в упражнении **1.9.**

1.2. Суммы обратных натуральных степеней. В этом разделе мы будем рассматривать дзета-функцию Римана как функцию *вещественной переменной*

$$\zeta : \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

в упражнениях **1.10** и **1.11** читателю предлагается провести некоторые численные рассмотрения, связанные со сходимостью этого ряда.

Отвечая на вопрос Менголи про $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, Эйлер заодно вычислил $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$ и так далее. Провести некоторые вычисления, пройдя по пути Эйлера, читателю предлагается в упражнении **1.12**; в случае успешного выполнения этого упражнения читатель, вероятно, почувствует, что поведение дзета-функции на множестве *чётных* натуральных аргументов современной наукой понято.

Что же касается *нечётных* натуральных аргументов, то положение с пониманием поведение дзета-функции на их множестве можно назвать просто катастрофическим. На вопрос *чему равна* $\zeta(2k+1)$ при положительных натуральных k внятного ответа дать не удаётся ни в одном случае. *Иррациональность* $\zeta(3)$ установлена Апери **[Ap1979]** в 1978 году; в 2000-м Ривоаль **[Riv2000]** установил бесконечность множества иррациональных чисел среди $\zeta(3)$,$\zeta(5)$,$\zeta(7)$, ... а в 2001-м Зудилин **[Зуд2002]**– иррациональность одного из $\zeta(5)$,$\zeta(7)$,$\zeta(9)$, $\zeta(11)$. Предположение, высказанное ещё Эйлером

$$\zeta(2k+1) \notin \mathbb{Q}(\pi),$$

не установлено ни при одном натуральном k.

Вместе с тем какая-то общая природа значений дзета-функции Римана в чётных и нечётных числах, видимо, существует; одно из свидетельств этому обнаружил Апери. Доказывая иррациональность $\zeta(3)$, он заодно предложил и новое доказательство иррациональности $\zeta(2)$ – разумеется, уже известной и вытекающей из формулы Эйлера и *трансцендентности* π. В обоих доказательствах использовалась *слишком хорошая* приближаемость $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ рациональными числами:

$$\zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} \tag{1.2a}$$

и

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}. \tag{1.2b}$$

Несколько лет назад Бейли, Борвейн и Брэдли **[BBB2006]** добавили к формулам Апери ещё одну:

$$\zeta(4) = \frac{36}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}. \tag{1.2c}$$

Дальше продолжить список пока не удаётся; разные авторы пишут многочисленные формулы, но они не так кратки и красивы.

Формулы **(1.2a,b,c)** никак не менее интересны, чем вытекающие из них результаты об иррациональности. Их доказательства весьма сложны; см., например, работу Бёйкерса **[Beu1987]**. В упражнении **1.13** читателю предлагается поработать с ними численно.

К формулам **(1.2a)** и **(1.2b)** примыкают разложения $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ в бесконечные цепные дроби:

$$\zeta(2) = \cfrac{5}{3 + \cfrac{1^4}{11\cdot 1^2 + 11\cdot 1 + 3 + \cfrac{2^4}{11\cdot 2^2 + 11\cdot 2 + 3 + \cfrac{3^4}{11\cdot 3^2 + 11\cdot 3 + 3 + \ldots}}}}, \tag{1.2d}$$

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 - \cfrac{1^6}{34\cdot 1^3 + 51\cdot 1^2 + 27\cdot 1 + 5 - \cfrac{2^6}{34\cdot 2^3 + 51\cdot 2^2 + 27\cdot 2 + 5 - \cfrac{3^6}{34\cdot 3^3 + 51\cdot 3^2 + 27\cdot 3 + 5 - \ldots}}}}. \tag{1.2e}$$

В упражнении **1.14** читателю предлагается подумать об этих разложениях.

1.3. Дзета-функция коммутативного кольца. Бегло осветив обобщения дзета-функции Римана, носящие аналитический характер, мы перейдём к основному для нашего курса обобщению.

Пусть A – произвольное *кольцо*; здесь и далее под этим термином мы всегда подразумеваем *коммутативное кольцо с единицей.* Введя обозначение

$$\mathrm{ideal}(A) := \{\text{идеалы кольца} A\},$$

считая, как принято, запись $\mathfrak{a} \triangleleft A$ синонимичной записи $\mathfrak{a} \in \mathrm{ideal}(A)$ и договорившись (как не очень принято), что $A \triangleleft A$, перепишем определение дзета-функции Римана в виде

$$\zeta(s) \equiv \zeta_{\mathbb{Z}}(s) := \sum_{\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}} \frac{1}{[\#(\mathbb{Z}/\mathfrak{a})]^s}.$$

Такую функцию можно попытаться ввести для *любого* кольца A, положив

$$\zeta_A(s) := \sum_{\mathfrak{a} \triangleleft A} \frac{1}{[\#(A/\mathfrak{a})]^s}. \qquad \textbf{(1.3a)}$$

Психологически мы склонны рассматривать это выражение при *достаточно больших* вещественных аргументах $s >> 1$ или при комплексных аргументах с достаточно большой вещественной частью $\mathrm{Re}(s) >> 1$, поэтому для идеала $\mathfrak{a} \triangleleft A$, для которого фактор-кольцо $A/\mathfrak{a}$ бесконечно, мы положим $\frac{1}{[\#(A/\mathfrak{a})]^s} := 0$. Тогда *слагаемые* в правой части выражения **(1.3.a)** определены для *любых* колец A, и, например,

$$\zeta_{\mathbb{C}[z]} \equiv 1.$$

С другой стороны, для *некоторых* колец A область сходимости правой части выражения **(1.3.a)** может оказаться пустой; такой пример читателю предлагается рассмотреть в упражнении **1.15.** Далее мы будем рассматривать лишь такие кольца A, что область сходимости выражения **(1.3.a)** будет непустой; она всегда окажется сдвинутой правой полуплоскостью. Один из классов таких колец, свойства которых близки к свойствам кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ – класс *дедекиндовых* колец.

К сожалению, принятое нами обозначение, хоть и принято в современной литературе – см, например, **[SaGr2006]** – расходится с классическим обозначением *дзета-функций Дедекинда,* которые привязаны к *полям алгебраических чисел,* хотя строятся, как и у нас, по *кольцам целых чисел* в них. Так, дзета-функцию Римана ζ Дедекинд обозначил бы не $\zeta_{\mathbb{Z}}$, а $\zeta_{\mathbb{Q}}$; см, например, **[Коб1984].**

Вычислим дзета-функцию "неклассического" кольца, больше всего напоминающего кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ – кольца многочленов над конечным полем, $\mathbb{F}_q[x]$.

Введём для произвольного поля $\Bbbk$ обозначения

$\Bbbk[x]_1 :=$ { унитарные (то есть со старшим коэффициентом 1) многочлены} $\subset \Bbbk[x]$,

$$\mathrm{Irr}(\Bbbk) := \{f \in \Bbbk[x]_1 \mid f \text{ неприводим}\}$$

и

$$\mathrm{Irr}_d(\Bbbk) := \{f \in \mathrm{Irr}(\mathbf{k}) \mid \deg f = d\}.$$

Имеем

$$\zeta_{\mathbb{F}_q[x]}(s) = \sum_{f\in\mathbb{F}_q[x]_1} \frac{1}{q^{s\deg f}} = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{f\in\{\mathbb{F}_q[x]_1 \mid \deg f = d\}} \frac{1}{q^{sd}} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{q^d}{q^{sd}} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{q^{(s-1)d}} = \frac{1}{1-\frac{1}{q^{s-1}}}.$$

Таким образом,

$$\zeta_{\mathbb{F}_q[x]}(s) = \frac{1}{1-qq^{-s}}. \qquad \textbf{(1.3b)}$$

Введём переобозначение, которым регулярно будем пользоваться в дальнейшем: с помощью

$$T = q^{-s},$$

и обозначив

$$\mathbf{Z}_A(q^{-s}) := \zeta_A(s),$$

где буква $\mathbf{Z}$ – это *заглавная дзета*, перепишем **(1.3b)** в виде

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{F}_q[x]}(T) = \frac{1}{1-qT}. \qquad \textbf{(1.3c)}$$

Рациональность этой функции по T является простейшим примером одного из главных результатов курса, первой из серии *гипотез Вейля*, доказанной *Дворком.*

Остаётся построить аналог *эйлерова произведения* рассматриваемой функции. При переходе от арифметики натуральных чисел $\mathbb{N}$ к арифметике целых чисел $\mathbb{Z}$ простые *числа* превращаются в образующие простых *идеалов*, определённые с точностью до знака, то есть с точностью до действия мультипликативной группы

$$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}.$$

Её аналогом в кольце $\mathbb{F}_q[x]$ является группа

$$\mathbb{F}_q[x]^\times = \mathbb{F}_q^\times,$$

а аналогом простых чисел – *неприводимые унитарные многочлены* , множество которых мы обозначили $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q)$. Степени распределяют эти аналоги простых чисел по конечным множествам $\mathrm{Irr}_d(\mathbb{F}_q)$, и изучение порядков этих множеств до некоторой степени моделирует изучение *закон распределения простых.*

Поскольку любой унитарный многочлен единственным образом представляется в виде произведения степеней неприводимых унитарных многочленов, имеем

$$\zeta_{\mathbb{F}_q[x]}(s) = \prod_{F\in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q)} [1 + \frac{1}{q^{s\deg F}} + \frac{1}{q^{2s\deg F}} + \dots] = \prod_{F\in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q)} \frac{1}{1-\frac{1}{q^{s\deg F}}} =$$

$$= \prod_{d=1}^{\infty} \prod_{F\in \mathrm{Irr}_d(\mathbb{F}_q)} \frac{1}{1-\frac{1}{q^{sd}}} = \prod_{d=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{q^{sd}})^{\#\mathrm{Irr}_d(\mathbb{F}_q)}}. \qquad \mathbf{(1.3d)}$$

Пользуясь указанной выше стандартной заменой переменных и соединяя это равенство с предыдущим, получаем

$$\prod_{d=1}^{\infty} \frac{1}{(1-T^d)^{\#\mathrm{Irr}_d(\mathbb{F}_q)}} = \frac{1}{1-qT}. \qquad \mathbf{(1.3e)}$$

В качестве завершающей задачи **1.16.** этой лекции читателю предлагается извлечь из этого равенства

Упражнения

1.1. Сколько слагаемых N ряда $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, надо взять, чтобы вычислить эту сумму с точностью до миллионных? Пользуясь доступными вам средствами, проверьте равенство **(1.0a)** с точностью до миллионных.

1.2. Строго докажите равенство **(1.0b)**, интерпретируя его левую и правую части как фундаментальные последовательности рациональных чисел.

1.3. Возьмите десять случайных пар натуральных чисел – например, разбейте произвольным образом на пары двадцать номеров телефонов ваших знакомых. Предскажите, у скольких из них найдётся нетривиальный общий делитель. Проверьте предсказание.

1.4. Введите для положительного натурального $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\mathrm{COPRIME}_n := \{(a,b) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} | a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\}$$

пар взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих n. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathrm{COPRIME}_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Найдите такое N, что при любом натуральном $n > N$

$$.6 < \frac{\#\mathrm{COPRIME}_n}{n^2} < .62$$

1.5. Докажите тождество

$$-\int_0^x \frac{\log(1-t)\mathrm{d}t}{t} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

при $0 \le x < 1$. Обоснуйте законность почленного интегрирования.

1.6. Докажите тождество **(1.1e),** продифференцировав обе его части, установив их равенство с точностью до константы и обосновав законность перехода к пределу при $x \to 1-$.

1.7. Докажите *рациональность* по x полилогарифмов $\mathrm{Li}_0(x), \mathrm{Li}_{-1}(x), \mathrm{Li}_{-2}(x), \ldots$. Установите рекуррентное соотношение, связывающее эти функции. Вычислите $\mathrm{Li}_{-3}(x) \in \mathbb{Q}(x)$.

1.8. Свяжите $\zeta(s, \frac{1}{2})$ с $\zeta(s)$. Вычислите $\zeta(2, \frac{1}{2})$ и примените к полученному результату формулы **(1.1i)** и **(1.1j)**.

1.9. Собрав вместе все известные значения трансценденты Лерха **(1.1k),** изучите для них интегралы **(1.1l)** . **1.10.** Сколько слагаемых N ряда $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$, чтобы вычислить с точностью до миллионных $\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4)$?

1.11. Пользуясь доступными вам средствами, вычислите с точностью до тысячных *постоянную Эйлера* $\lim_{N\to\infty}(-\log N + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n})$.

1.12. Найдите в каком-нибудь учебнике и разберите доказательство тождества Эйлера

$$\sin(\pi x) \equiv \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} \cdots \equiv \pi x(1 - \frac{x^2}{1^2})(1 - \frac{x^2}{2^2})(1 - \frac{x^2}{3^2}) \ldots.$$

(а) Приравняв коэффициенты при x^3 в разложении $x \mapsto \sin(\pi x)$ в ряд и в произведение, получите Эйлеровское решение базельской задачи. Найдя в Интернете сведения о численной проверке Эйлером полученной формулы и пользуясь доступными вам вычислительными средствами, проверьте формулу с удвоенной (по сравнение с Эйлером) точностью.

(б) Продолжив применение "формулы Виета" к тому же тождеству, вычислите ещё несколько $\zeta(2k)$ для положительных натуральных k.

(в) Взяв *логарифмическую производную* тождества, вычислите *производящую функцию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k};$$

она окажется *элементарной.* Примените полученный результат к проверке (б).

(г) Исходя из дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \operatorname{ctg} y = -1 - \operatorname{ctg}^2 y,$$

выведите рекурренцию для последовательности $\zeta(2k)$ при положительных натуральных k.

1.13. Сколько членов рядов **(1.2a)**, **(1.2b) и (1.2c)** приближают $\zeta(2)$, $\zeta(3)$ и $\zeta(4)$ с точностью до тысячных, до миллионных, до миллиардных? Проверьте полученные результаты.

1.14. Поработайте по своему усмотрению с бесконечноэтажными дробями **(1.2d)** и **(1.2e).** В частности, с помощью доступных вам современных средств вычислите несколько их конечноэтажных приближений. Сопоставьте полученные результаты с результатами упражнения **1.4.** . Докажите фундаментальность обеих последовательностей конечноэтажных приближений (они называются *подходящими дробями*). Попытайтесь помечтать об обобщениях.

1.15. Покажите, что область сходимости правой части выражения **(1.3.a)** пуста для кольца

$$\mathbb{F}_q[x_1, x_2, \dots]$$

многочленов от счётного множества переменных над конечным полем.

1.16. Пользуясь формулой **(1.3e)**, найдите "закон распределения" неприводимых многочленов над конечным полем по степеням. **Указание.** Полезно воспользоваться *формулой обращения Мёбиуса.*

Л и т е р а т у р а

[Abel1881] N. H. Abel, *Note sur la fonction* $\psi x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \dots$ *In Oeuvres complétes de Niels Henrik Abel, Nouvelle édition publée aux frais de l' Etat Norvégien, par MM. L. Sylow X et S. Lie, vol. 2, pp. 189-193. Christiana: Grondahl and Son.*
[Ap1979] R.Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$. Journee arithmétiques de Luminy. Astérisque 61 (1979), 11-13.
[BBB2006] D. Bailey, J.M. Borwein, and D. Bradley, *Experimental Determination of Apéry-like Identities for* $\zeta(2n+2)$. Experiment. Math., 15:3 (2006), 281-290.
[**Beu1987**] - F.Beukers,*Irrationality proofs using modular forms,* Journées Arithmétiques de Besancon 1985, Astérisque 147-148 (1987), 271-284.
[Eul1740] L.Euler, *De summis serierum reciprocarum.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, 123-134
[Hill1828] C. J.Hill, *Ueber die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale.* J. Reine Angew. Math. 3, 1828, 101-159.
[Jonq1889] A. Jonquiére, *Note sur la série* $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s}$. Bull. Soc. Math. France 17, 1889, 142-152.
[Ler1887] M.Lerch, *Note sur la fonction* $\Re(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i} x}}{(w+k)^s}$, Acta Math. 11, 1887, 19-24.
[Lew1981] L.Lewin, *Polylogarithms and associated functions.* Elsevier, 1981.
[Mil1982] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: The first 150 years.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 6:1, 1982, 9-24.

[Riem1859] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse,* in Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860), 671–680.

[Riv2000] T.Rivoal, *La fonction Zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 331, 2000, 267-270.

[SaGr2006] M. du Sautoy and F. Grunewald, *Zeta functions of groups and rings,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006 © 2006 European Mathematical Society, 131-149.

[Spe1809] W.Spence, *An essay of the theory of the various orders of logarithmic transcendents; with an inquiry into their applications to the integral calculus and the summation of series.* London: J. Murray, 1809.

[Zag1988] D. Zagier, *The Dilogarithm function in Geometry and Number Theory,* Number Theory and related topics, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. 12 Bombay (1988), 231 - 249.

[Зуд2002] В. В. Зудилин, *Об иррациональности значений дзета-функции Римана,* Изв. РАН. Сер. матем., 66:3 (2002), 49–102

[Коб1984] Н.Коблиц, *Введение в эллиптические кривые и модулярные формы,* пер. с английского, М., "Мир" , 1984.

[Лоб1836] Н.И. Лобачевский, *Применения воображаемой геометрии к некоторым интегралам,* Учёные записки Казанского Университета, 1836.