Лекция 3 (3 октября 2011)
Одномерные тета-функции

3.0. Определение "главной" теты. Введём немотивированно – за красоту – выражение

$$\Theta(Z|q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n. \qquad (\mathbf{3.0.0})$$

Его можно рассматривать как формальный ряд $\Theta \in \mathbb{Q}(Z)[[q]]$, а можно – как голоморфную функцию двух переменных $\dot{\mathbb{C}} \times \mathbf{D}_0(1) \to \mathbb{C}$, где $Z \in \dot{\mathbb{C}}$, $q \in \mathbf{D}_0(1)$ и применено обозначение $\mathbf{D}_a(r) := \{u \in \mathbb{C} | |u-a| < r\}$.

Сходимость этого ряда читателю предлагается обосновать в упражнении **3.1**.

"Главная" тета-функция определяется выражением

$$\theta(z|\tau) := \Theta(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}|\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}n^2\tau}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}. \qquad (\mathbf{3.0.1})$$

Эта функция рассматривается как голоморфная на $(z,\tau) \in \mathbb{C}\times\mathcal{H}$; сходимость ряда читателю предлагается проанализировать в упражнении **3.2**.

Иногда выражение **(3.0.0)** для тета-функции мы будем называть *мультипликативной* записью, а выражение **(3.0.1)** – *аддитивной.*

Связь тета-функции с эллиптическими функциями и, в частности, с сигма-функцией будет проясняться постепенно.

3.1. Функциональное уравнение. В мультипликативной записи функциональное уравнение для тета-функции почти очевидно.

Предложение. *Имеет место тождество*

$$qZ\Theta(q^2Z|q) \equiv \Theta(Z|q) \qquad (\mathbf{3.1.0})$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{LHS}(\mathbf{3.1.0}) = qZ\Theta(q^2Z|q) \equiv_{(3.0.0)} qZ\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}(q^2Z)^n \equiv qZ\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+2n}Z^n \equiv$$

$$\equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+2n+1}Z^{n+1} \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1)^2}Z^{n+1} \equiv \sum_{n'\in\mathbb{Z}} q^{n'^2}Z^{n'} \equiv_{(3.0.0)} \Theta(Z|q) = \mathrm{RHS}(\mathbf{3.1.0}).$$

ЧТД

В аддитивной записи получаем

Следствие. *Имеет место тождество*

$$\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}\theta(z+\tau|\tau) \equiv \theta(z|\tau) \qquad (\mathbf{3.1.1})$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{LHS}(\mathbf{3.1.1}) = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}\theta(z+\tau|\tau) \equiv_{(3.0.1)} qZ\Theta(q^2Z|q) \equiv_{(3.1.0)} \Theta(Z|q) \equiv_{(3.0.1)}$$

$$\equiv \theta(z|\tau) = \mathrm{RHS}(\mathbf{3.1.1}).$$

ЧТД

Функция $z \mapsto \theta(z|\tau)$, очевидно, $\mathbb{Z}$-периодична при любом $\tau \in \mathcal{H}$; вместо с переписанным чуть-чуть иначе тождеством **(3.1.1)** это даёт *соотношения квазипериодичности* для тета-функции:

$$\theta(z+1|\tau) \equiv \theta(z|\tau), \qquad (\mathbf{3.1.2})$$

$$\theta(z+\tau|\tau) \equiv \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\tau}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}\theta(z|\tau). \qquad (\mathbf{3.1.3})$$

Эти соотношения имеют тот же вид, что и соотношения квазипериодичности для сигма-функции, выведенные в прошлой лекции: сдвиг на период приводит к умножению на экспоненту многочлена линейной функции. Вскоре мы рассмотрим класс таких функций и установим некоторые их общие свойства.

3.2. Тригонометрическая форма и сходимость. Группируя члены ряда **(3.0.1)** с противоположными номерами и всё-таки пользуясь *обозначением* $q = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \tau}$, перепишем этот ряд в более привычном виде:

$$\theta(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n^2 \tau} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z} + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n z}) =$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2\pi n z) =$$

$$= 1 + 2q \cos(2\pi z) + 2q^4 \cos(4\pi z) + 2q^9 \cos(6\pi z) + 2q^{16} \cos(8\pi z) + \ldots. \quad (\mathbf{3.2.0})$$

При фиксированном $\tau \in \mathcal{H}$ – и, следовательно, при фиксированном $q \in \mathbb{C}$, удовлетворяющем $|q| < 1$, – ряд Фурье **(3.2.0)** сходится фантастически быстро!

Читателям рекомендуется убедиться в этом, проделав упражнения **3.3** и **3.4.**

3.3. Нули тета-функции. Мы найдём серию нулей функции $z \mapsto \theta(z|\tau)$ (в центрах фундаментальных параллелограммов решётки $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$), а в следующем разделе покажем, что других нулей у тета-функции нет.

Теорема. *При любом $\tau \in \mathcal{H}$ функция $z \mapsto \theta(z|\tau)$ обращается в ноль в каждой точке сдвинутой решётки $\frac{1+\tau}{2} + \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\theta(\frac{1+\tau}{2}|\tau) = 0$$

– остальное следует из соотношений квазипериодичности.

Переходя к мультипликативной записи, вычисляем

$$\theta(\frac{1+\tau}{2}|\tau) = \Theta(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(\frac{1+\tau}{2})}|q) = \Theta(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(1+\tau)}|q) = \Theta(-q|q) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}(-q)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2+n} = \sum_{n\in 2\mathbb{Z}} q^{n^2+n} - \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} q^{n^2+n} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{(2m)^2+2m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{(2m+1)^2+2m+1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{4m^2+2m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{4m^2+6m+2} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{4m^2+2m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{4(m-1)^2+6(m-1)+2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{4m^2+2m} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{4m^2+2m} = 0.$$

ЧТД

Из приведённого рассуждения *не* следует, что все обнаруженные нули – *простые.* Это, однако, верно и будет установлено в следующем разделе.

Читателю рекомендуется проделать упражнение **3.5.**

3.4. Общие квазипериодические функции. Введём понятие, охватывающее уже разобранные нами примеры.

3.4.0. Определение. Для ненулевых комплексных чисел $\pi_{1,2} \in \dot{\mathbb{C}}$ с невещественным отношением

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} \notin \mathbb{R}$$

и произвольных комплексных чисел $M_{1,2}, N_{1,2} \in \mathbb{C}$ рассмотрим в кольце целых функций подмножество $(\vec{\pi}; \vec{M}, \vec{N})$-*квазипериодических* функций

$$\mathcal{O}[\mathbb{C}] \supset \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} = \mathcal{Q}_{\binom{\pi_1}{\pi_2};\binom{M_1}{M_2},\binom{N_1}{N_2}} := \{f | f(z+\pi_{1,2}) \equiv e^{M_{1,2}z+N_{1,2}} f(z)\}.$$

Очевидно, каждое множество квазипериодических функций $\mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}}$ является *векторным подпространством* алгебры целых функций $\mathcal{O}[\mathbb{C}]$ – как мы вскоре покажем, *конечномерным.*

3.4.1. Обозначения. Наши функции переменной $z \in \mathbb{C}$, завися от решётки L как от "параметра" , являются целыми или голоморфными в $\mathbb{C} \setminus L$.

Имеются три вида зависимости рассматриваемых функций от решёток.

• Зависимость от решётки L без выделенного базиса; применяются обозначения

$$f_L \text{ для } f \in \{\sigma, W, \wp\}.$$

• Зависимость от решётки $L = \mathbb{Z}\pi_1 + \mathbb{Z}\pi_2$ с выделенным базисом; обычно подразумевается $\mathbf{Im}\frac{\pi_1}{\pi_2} > 0$. Применяются обозначения

$$z \mapsto f(z|\pi_1, \pi_2) \text{ или } f(\_|\pi_1, \pi_2) \text{ для } f \in \{\sigma, W, \wp\}.$$

• Зависимость от решётки $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ с выделенным *нормализованным* базисом; всегда подразумевается $\mathbf{Im}\tau > 0$. Применяются обозначения

$$z \mapsto f(z|\tau) \text{ или } f(\_|\tau) \text{ для } f \in \{\sigma, W, \wp, \theta\}.$$

В последнем случае рассматриваемые функции являются просто голоморфными или мероморфными функциями на $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$.

Если все элементы, входящие в некоторую формулу, зависят от решётки единообразно, то указание на эту зависимость опускается; так происходит, например, в записи дифференциального уравнения Вейерштрасса

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

в которой может подразумеваться зависимость от решётки любого из трёх типов; конкретный вид зависимости должен восстанавливаться по контексту.

3.4.2. σ и θ как квазипериодические функции. Согласно предыдущим двум разделам и выведенным ранее соотношениям квазипериодичности,

$$\sigma_{\mathbb{Z}\pi_1+\mathbb{Z}\pi_2} = \sigma(\_|\pi_1, \pi_2) = \sigma_{\vec{\pi}} \in \mathcal{Q}_{\binom{\pi_1}{\pi_2};\binom{-2W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_1}{2})}{-2W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_2}{2})},\binom{-\pi_1 W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_1}{2})+\pi\mathrm{i}}{-\pi_2 W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_2}{2})+\pi\mathrm{i}}}, \qquad (\mathbf{3.4.2.0})$$

$$\theta(\_|\tau) \in \mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}}{0},\binom{-\pi\mathrm{i}\tau}{0}}. \qquad (\mathbf{3.4.2.1})$$

Конкретизировать эти включения для квадратной решётки читателю предлагается в упражнении **3.6.**

3.4.3. Нули квазипериодических функций. Множество нулей любой L-квазипериодической функции, очевидно, L-инвариантно.

Фундаментальным параллелограммом функции с квазипериодами π_1, π_2 называется любое множество вида

$$\Pi_a := \{a + t_1\pi_1 + t_2\pi_2 | t_1, t_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\},$$

где $a \in \mathbb{C}$–произвольное комплексное число.

Фундаментальный параллелограмм ненулевой квазипериодической функции называется *общим,* если на его границе нет нулей этой функции.

Назовём *числом Лежандра* пространства $\mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}}$ поделённый на $2\pi\mathrm{i}$ определитель (левого минора матрицы параметров пространства)

$$\frac{\vec{\pi} \wedge \vec{M}}{2\pi\mathrm{i}} := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \det \begin{pmatrix} \pi_1 & M_1 \\ \pi_2 & M_2 \end{pmatrix} = \frac{\pi_1 M_2 - \pi_2 M_1}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Мы будем также пользоваться словосочетанием *число Лежандра* квазипериодической функции, имея в виду (только что определённое) число Лежандра содержащего его пространства. Этим понятием надо пользоваться с осторожностью, поскольку квазипериодическая функция (например, тождественный 0) содержится во многих пространствах квазипериодических функций.

Теорема. *Количество (подсчитанных с кратностью) нулей ненулевой квазипериодической функции, содержащихся в её общем фундаментальном параллелограмме, равно её числу Лежандра.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} \setminus \{0\}$, а Π_a – её общий параллелограмм периодов; перепишем соотношения квазипериодичности в виде

$$\frac{f(z+\pi_{1,2})}{f(z)} \equiv \mathrm{e}^{M_{1,2}z+N_{1,2}}. \qquad (\mathbf{3.4.3.0})$$

Согласно принципу аргумента, упомянутое количество нулей, умноженное на $2\pi\mathrm{i}$, равно

$$\int_{\partial\Pi_a} \mathrm{d}\log f =$$

$$= \int_a^{a+\pi_2} \mathrm{d}\log f + \int_{a+\pi_2}^{a+\pi_1+\pi_2} \mathrm{d}\log f + \int_{a+\pi_1+\pi_2}^{a+\pi_2} \mathrm{d}\log f + \int_{a+\pi_1}^{a} \mathrm{d}\log f =_{(3.4.3.0)}$$

$$= -\int_a^{a+\pi_2} M_1 \mathrm{d}z + \int_a^{a+\pi_1} M_2 \mathrm{d}z = \pi_1 M_2 - \pi_2 M_1.$$

ЧТД

Следствие 0. *Число Лежандра любой ненулевой квазипериодической функции натурально.* ■

Следствие 1. *Следующие свойства ненулевой квазипериодической функции равносильны:*

(а) её число Лежандра равно нулю;

(б) она не имеет нулей;

(в) она является экспонентой многочлена степени не выше второй.

Доказательство. (а)$\Longleftrightarrow$(б) следует из теоремы.

(б)$\Longrightarrow$(в): пусть

$$f \in \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} \setminus \{0\}.$$

Если f не имеет нулей, то $f = \mathrm{e}^F$, где F– некоторая целая функция. Квазипериодическое соотношение для f принимает вид

$$\mathrm{e}^{F(z+\pi_{1,2})} \equiv \mathrm{e}^{M_{1,2}z+N_{1,2}} \mathrm{e}^{F(z)}.$$

Логарифмируя и два раза дифференцируя это соотношение, убеждаемся с помощью теоремы Лиувилля, что F– квадратный трёхчлен.

(в)$\Longrightarrow$(б) очевидно.

ЧТД

Применяя теорему к сигма-функции Вейерштрасса $\sigma_{\vec{\pi}} \in \mathcal{Q}_{\binom{\pi_1}{\pi_2};\binom{-2W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_1}{2})}{-2W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_2}{2})},\binom{-\pi_1 W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_1}{2})+\pi\mathrm{i}}{-\pi_2 W_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_2}{2})+\pi\mathrm{i}}}$ и вспоминая, что эта функция имеет ровно один ноль в каждом параллелограмме периодов, получаем

Следствие 2. *Для любых квазипериодов π_1, π_2 имеет место соотношение*

$$-\pi_1 \mathrm{W}_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_2}{2}) + \pi_2 \mathrm{W}_{\vec{\pi}}(\frac{\pi_1}{2}) = \pi\mathrm{i}. \blacksquare$$

Обычно эта формула и называется *соотношением Лежандра,*что объясняет нашу терминологию. Теорему этого раздела можно назвать *обобщённым соотношением Лежандра.*

Применяя теорему и следствие 2 из неё к квадратной решётке, мы получаем возможность обосновать полученные ранее эмпирические результаты. Читателю предлагается проделать это в упражнении **3.7.**

Применяя теорему к тета-функции $\theta(\_|\tau) \in \mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi \mathrm{i}}{0},\binom{-\pi \mathrm{i}\tau}{0}}$, получаем

Следствие 3. *Любая тета-функция $\theta(\_|\tau)$ имеет в любом своём параллелограмме периодов ровно один нуль.* ■

3.4.4. Умножение квазипериодических функций. Следующий факт очевиден: для любых параметров $\vec{\pi}, \vec{M}, \vec{N}, \vec{M}', \vec{N}'$

$$\mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}}\mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M}',\vec{N}'} \subseteq \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M}+\vec{M}',\vec{N}+\vec{N}'}. \blacksquare$$

В предыдущей главе мы рассмотрели вложение эллиптической кривой в плоскость, в котором фигурировал *куб* сигма-функции Вейерштрасса. Описать эту конструкцию на языке пространств квазипериодических функций читателю предлагается в упражнении bf 3.8.

3.4.5. Экспоненты квадратных трёхчленов. Умножение на эти простейшие квазипериодические функции будет применено для приведения общих квазипериодических функций к стандартному виду.

В следующей формуле используется сокращение

$$\vec{\pi}^2 := \begin{pmatrix} \pi_1^2 \\ \pi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Утверждение. *При любой паре квазипериодов $\vec{\pi}$ функция $z \mapsto \mathrm{e}^{Az^2+Bz}$ лежит в пространстве $\mathcal{Q}_{\vec{\pi};2A\vec{\pi},2A\vec{\pi}^2+B\vec{\pi}}$.*

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\mathrm{e}^{A(z+\pi_{1,2})^2+B(z+\pi_{1,2})}}{\mathrm{e}^{Az^2+Bz}} \equiv \mathrm{e}^{2A\pi_{1,2}z+A\pi_{1,2}^2+B\pi_{1,2}}.$$

ЧТД

3.4.6. Умножение на экспоненты квадратных трёхчленов. Мы сейчас убедимся в том, что при помощи такого умножения любую квазипериодическую функцию можно преобразовать в функцию, *периодическую* по одному из аргументов.

Предложение. *Для любых параметров $\vec{\pi}, \vec{M}, \vec{N}$, определяющих число Лежандра ℓ, имеет место равенство*

$$[z \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{M_2}{2\pi_2}z^2+(\frac{M_2}{2}-\frac{N_2}{\pi_2})z}]\mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} = \mathcal{Q}_{\binom{\pi_1}{\pi_2};\binom{-\frac{2\pi i\ell}{\pi_2}}{0},\binom{N_1-\frac{\pi_1}{\pi_2}N_2+\frac{\pi_1}{2\pi_2}(\pi_2-\pi_1)M_2}{0}}.$$

Доказательство. По определению,

$$\pi_1 M_2 - \pi_2 M_1 = 2\pi i\ell. \qquad (0)$$

При произвольных $A, B \in \mathbb{C}$ согласно формулам двух последних разделов

$$[z \mapsto \mathrm{e}^{Az^2+Bz}]\mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} = \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M}+2A\vec{\pi},\vec{N}+A\vec{\pi}^2+B\vec{\pi}}.$$

Мы хотим добиться выполнения соотношений

$$\begin{cases} M_2 + 2A\pi_2 = 0 & (1) \\ N_2 + A\pi_2^2 + B\pi_2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Из (1) получаем

$$A = -\frac{M_2}{2\pi_2} \qquad (3),$$

и, подставляя это равенство в (2), получаем

$$B = -\frac{N_2 + A\pi_2^2}{\pi_2} = -\frac{N_2 - \frac{M_2}{2}\pi_2}{\pi_2} = \frac{M_2}{2} - \frac{N_2}{\pi_2}. \qquad (4)$$

Остаётся вычислить

$$M_1 + 2A\pi_1 =_{(3)} M_1 - \frac{\pi_1 M_2}{\pi_2} = \frac{\pi_2 M_1 - \pi_1 M_2}{\pi_2} =_{(0)} -\frac{2\pi i\ell}{\pi_2}$$

и

$$N_1 + A\pi_1^2 + B\pi_1 =_{(3),(4)} N_1 - \frac{M_2}{2\pi_2}\pi_1^2 + (\frac{M_2}{2} - \frac{N_2}{\pi_2})\pi_1 = \frac{2\pi_2 N_1 - \pi_1^2 M_2 + \pi_1\pi_2 M_2 - 2\pi_1 N_2}{2\pi_2} =$$

$$= N_1 - \frac{\pi_1}{\pi_2}N_2 + \frac{\pi_1}{2\pi_2}(\pi_2 - \pi_1)M_2.$$

ЧТД

В дальнейшем мы в основном будем работать с пространствами *полупериодических* функций

$$\mathcal{Q}_{\binom{\pi_1}{\pi_2};\binom{M}{0},\binom{N}{0}}.$$

В упражнении **(3.9)** читателю предлагается применить описанную конструкцию к функции $\sigma(\_|\mathrm{i})$.

3.4.7. Перемасштабирование. Для произвольного $p \in \mathbb{C}^\times$ определим *перемасштабирующий* автоморфизм $\mathbb{C}$-алгебры

$$\mathbf{M}_p : \mathcal{O}[\mathbb{C}] \longrightarrow \mathcal{O}[\mathbb{C}] : f \mapsto [z \mapsto f(\frac{z}{p})].$$

Следующая формула очевидна.

Утверждение. *Для любых параметров $\vec{\pi}, \vec{M}, \vec{N}$ и любого $p \in \mathbb{C}^\times$ имеет место равенство*

$$\mathbf{M}_p \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} = \mathcal{Q}_{p\vec{\pi};\frac{\vec{M}}{p},\vec{N}}.\blacksquare$$

Применяя это соотношение к пространствам полупериодических функций, получаем

Следствие. *Для любых полупериодов $\vec{\pi}$, любого $\ell \in \mathbb{N}$ и любого $N \in \mathbb{C}$ имеет место равенство*

$$\mathbf{M}_{\frac{1}{\pi_2}} \mathcal{Q}_{\binom{\pi_1}{\pi_2};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell/\pi_2}{0},\binom{N}{0}} = \mathcal{Q}_{\binom{\pi_1/\pi_2}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell}{0},\binom{N}{0}}.\blacksquare$$

В дальнейшем мы примем стандартное сокращение

$$\tau := \frac{\pi_1}{\pi_2} \in \mathcal{H}$$

и будем работать в основном с пространствами полупериодических функций

$$\mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell}{0},\binom{N}{0}}.$$

Соотношения квази(или полу?)периодичности в них для $f \in \mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell}{0},\binom{N}{0}}$ принимают вид

$$f(z+1) \equiv f(z),$$

$$\boxed{f(z+\tau)\equiv \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\ell z+N}f(z)}.$$

3.4.8. Размерность. Мы пришли к основному результату теории.

Теорема. *Если число Лежандра пространства квазипериодических функций* $2\pi\mathrm{i}$*-натурально и положительно, то оно совпадает с размерностью этого пространства.*

Доказательство. Поскольку пространства квазипериодических функций, как мы знаем из предыдущих разделов, изоморфны пространствам нормализованных полупериодических функций, достаточно доказать теорему для этих последних пространств, то есть установить равенство

$$\dim \mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell}{0},\binom{N}{0}} = \ell,$$

в котором ℓ – положительное натуральное число. В силу периодичности любая функция $f\in\mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell}{0},\binom{N}{0}}$ разлагается в ряд Фурье:

$$f(z)\equiv\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}. \tag{3.4.8.0}$$

Соотношение квазипериодичности $f(z+\tau)\equiv \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\ell z+N}f(z)$ в силу (3.4.8.0) принимает вид

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n(z+\tau)}\equiv\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\ell z+N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz},$$

или

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\tau}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}\equiv\mathrm{e}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n-\ell)z}\equiv\mathrm{e}^{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{n+\ell}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}, \tag{3.4.8.1}$$

что даёт счётную систему соотношений

$$c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\tau}=\mathrm{e}^{N}c_{n+\ell}. \tag*{$(\mathbf{3.4.8.2})_n$}$$

Снова введя $q:=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}$ и $Q:=q^2=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$, перепишем эту систему в виде

$$c_{n+\ell}=\mathrm{e}^{-N}Q^nc_n. \tag*{$(\mathbf{3.4.8.3})_n$}$$

Очевидно, пространство формальных решений этой системы ℓ-мерно, но надо убедиться в том, что все эти решения задают сходящиеся ряды Фурье, и мы выразим все c_n явно через $c_0, \ldots, c_{\ell-1}$.

Для этого мы поделим с остатком все (целые!) номера n на ℓ, то есть представим все $n \in \mathbb{Z}$ в виде $n = \nu\ell + r$, где $\nu \in \mathbb{Z}$ и $r \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$. Тогда

$$c_{\ell+r} =_{(3.4.8.3)_r} \mathrm{e}^{-N} Q^{\ell+r} c_r, \tag*{$(\mathbf{3.4.8.4})_1$}$$

$$\begin{aligned} c_{2\ell+r} &=_{(3.4.8.3)_{\ell+r}} \mathrm{e}^{-N} Q^{2\ell+r} c_{\ell+r} =_{(3.4.8.4)_1} \mathrm{e}^{-N} Q^{2\ell+r} \mathrm{e}^{-N} Q^{\ell+r} c_r = \\ &= \mathrm{e}^{-2N} Q^{(1+2)\ell+2r} c_r, \end{aligned} \tag*{$(\mathbf{3.4.8.4})_2$}$$

$$\begin{aligned} c_{3\ell+r} &=_{(3.4.8.3)_{2\ell+r}} \mathrm{e}^{-N} Q^{3\ell+r} c_{2\ell+r} =_{(3.4.8.4)_2} \mathrm{e}^{-N} Q^{3\ell+r} \mathrm{e}^{-2N} Q^{(1+2)\ell+2r} c_r = \\ &= \mathrm{e}^{-3N} Q^{(1+2+3)\ell+3r} c_r, \end{aligned} \tag*{$(\mathbf{3.4.8.4})_3$}$$

$$\begin{aligned} c_{2\ell+r} &=_{(3.4.8.3)_{\ell+r}} \mathrm{e}^{-N} Q^{2\ell+r} c_{\ell+r} =_{(3.4.8.4)_1} \mathrm{e}^{-N} Q^{2\ell+r} \mathrm{e}^{-N} Q^{\ell+r} c_r = \\ &= \mathrm{e}^{-2N} Q^{(1+2)\ell+2r} c_r, \end{aligned} \tag*{$(\mathbf{3.4.8.4})_2$}$$

и по индукции устанавливается

$$c_{\nu\ell+r} = \mathrm{e}^{-\nu N} Q^{(1+2+3+\cdots+\nu)\ell+\nu r} c_r = \mathrm{e}^{-\nu N} q^{\ell\nu(\nu+1)+2\nu r} c_r, \tag*{$(\mathbf{3.4.8.4})_\nu$}$$

причём эта формула выполняется для всех $\nu \in \mathbb{Z}$. Поскольку $|q| < 1$, эти коэффициенты ряда Фурье убывают, причём очень быстро.

ЧТД

3.4.9. Сдвиги аргумента. Для произвольного $\alpha \in \mathbb{C}$ определим *сдвиг аргумента* как автоморфизм $\mathbb{C}$-алгебры

$$\mathbf{T}_\alpha : \mathcal{O}[\mathbb{C}] \longrightarrow \mathcal{O}[\mathbb{C}] : f \mapsto [z \mapsto f(z - \alpha)].$$

Утверждение. *Для любых параметров $\vec{\pi}, \vec{M}, \vec{N}$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$ имеет место равенство*

$$\mathbf{T}_\alpha \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} = \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}-\alpha\vec{M}}.$$

Доказательство. Для любой $f \in \mathcal{Q}_{\vec{\pi};\vec{M},\vec{N}} \setminus \{0\}$ имеем

$$\frac{\mathbf{T}_\alpha[f](z + \pi_{1,2})}{\mathbf{T}_\alpha[f](z)} \equiv \frac{f(z - \alpha + \pi_{1,2})}{f(z - \alpha)} \equiv \mathrm{e}^{M_{1,2}(z-\alpha)+N_{1,2}}$$

ЧТД

Следствие. *Для любого $\ell \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathcal{H}$ и любых $\alpha, N \in \mathbb{C}$ имеет место равенство*

$$\mathbf{T}_\alpha \mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell}{0},\binom{N}{0}} = \mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i}\ell}{0},\binom{N+2\pi\mathrm{i}\ell\alpha}{0}}.$$

3.5. Отступление: разложение в произведение. Мы легко получим это разложение с точностью до неизвестной функции от τ. Нули тета-функции нам известны: это –

$$z = (m+\frac{1}{2})\tau + n + \frac{1}{2}, \text{ где } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Переходя к мультипликативным обозначениям, получаем нули

$$Z = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}[(m+\frac{1}{2})\tau+n+\frac{1}{2}]} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}[(2m+1)\tau+2n+1]} = -q^{2m+1}.$$

Естественно рассмотреть произведение

$$\hat{\Theta}(Z|q) := \prod_{m=1}^{\infty}[(1+q^{2m-1}Z)(1+\frac{q^{2m-1}}{Z})] : \qquad \mathbf{(3.5.0)}$$

это – функция от $Z \in \dot{\mathbb{C}}$ с теми же нулями, что и Θ. Легко проверяется абсолютная равномерная сходимость этого произведения в любом кольце $\{Z \in \mathbb{C} | 0 < r < |Z| < R\}$.

Предложение. *При любом $q \in \Delta$ функции $\hat{\Theta}$ и Θ пропорциональны.*

Доказательство. Функция $\hat{\Theta}$ удовлетворяет тому же функциональному уравнению, что и Θ:

$$qZ\hat{\Theta}(q^2Z|q) =_{(3.5.0)} qZ\prod_{m=1}^{\infty}[(1+q^{2m-1}q^2Z)(1+\frac{q^{2m-1}}{q^2Z})] =$$

$$= qZ\prod_{m=1}^{\infty}[(1+q^{2m+1}Z)(1+\frac{q^{2m-3}}{Z})] = qZ\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m+1}Z)\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{q^{2m-3}}{Z}) =$$

$$= qZ(1+\frac{1}{qZ})\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m+1}Z)\prod_{m=2}^{\infty}(1+\frac{q^{2m-3}}{Z}) =$$

$$= (1+qZ)\prod_{m'=1}^{\infty}(1+q^{2m'+1}Z)\prod_{m''=2}^{\infty}(1+\frac{q^{2m''-3}}{Z}) =_{m'=m-1,m''=m+1}$$

$$= (1+qZ)\prod_{m=2}^{\infty}(1+q^{2m-1}Z)\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{q^{2m-1}}{Z}) =$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1}Z)\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{q^{2m-1}}{Z}) =_{(3.5.0)} \hat{\Theta}(Z|q).$$

Поэтому, если мы введём функцию

$$\hat{\theta}(z|\tau) := \hat{\Theta}(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z}|\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\tau}),$$

то сможем утверждать, что отношение $\frac{\hat{\theta}(\_|\tau)}{\theta(\_|\tau}$ *периодическая* регулярная функция и потому в силу теоремы Лиувилля – ненулевая константа.

ЧТД

Поработать с частным случаем читателю предлагается в упражнении **3.10.**

Для вычисления остающегося неизвестным множителя мы используем классический факт, приводя его элементарное доказательство. [1]

Формула Эйлера. *В кольце* $\mathbb{Q}[[x]]$ *имеет место равенство*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}. \qquad (\mathbf{3.5.1})$$

Доказательство. Мысленно раскрывая скобки в левой части, имеем

$$\mathrm{LHS}(\mathbf{3.5.1}) = 1 + \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_w}(-1)^w x^{n_1+\cdots+n_w}, \qquad (\mathbf{3.5.2})$$

где подразумевается суммирование по всем строго убывающим последовательностям положительных натуральных чисел.

[1] видимо, придуманное одним из первых американских математиков Ф. Франклиным -см. **[Fra1881]**. Современное изложение см. в **[Энд1982]**; используемая ниже терминология относится к "фольклору" московских математических школ – соответствующее доказательство мне рассказал Д. Звонкин

Обозначим множество всех таких последовательностей

$$\mathbf{Dec} = \coprod_{w=1}^{\infty} \mathbf{Dec}_w,$$

где для $w \in \dot{\mathbb{N}}$ обозначено $\mathbf{Dec}_w := \{n : \{1, \dots, w\} \to \dot{\mathbb{N}} : i \mapsto n_i\}$.

Подразумевая изображения последовательностей *диаграммами Юнга,* введём на множестве последовательностей $\mathbf{Dec}$ четыре функции

$$\text{ширина width} : \mathbf{Dec} \longrightarrow \mathbb{N} : (n_1, \dots, n_w) \mapsto w;$$

$$\text{площадь area} : \mathbf{Dec} \longrightarrow \mathbb{N} : (n_1, \dots, n_w) \mapsto n_1 + \dots + n_w;$$

$$\text{стенка wall} : \mathbf{Dec} \longrightarrow \mathbb{N} : (n_1, \dots, n_w) \mapsto n_w;$$

$$\text{лесенка stair} : \mathbf{Dec} \longrightarrow \mathbb{N} :$$

$$: (n_1, \dots, n_w) \mapsto \max\{s | \exists d; (n_1, \dots, n_s) = (d, d-1, d-2, \dots, d-s+1)\}.$$

Разобъём все последовательности на *лестничные* и *стеночные,* введя множества лестничных

$$\mathbf{S} := \{n | \mathrm{stair}(n) < \mathrm{wall}(n)\}$$

и стеночных

$$\mathbf{W} := \{n | \mathrm{stair}(n) \geq \mathrm{wall}(n)\}.$$

Наконец, введём множества *пентагональных* последовательностей двух типов

$$\mathbf{Pent}' := \{(2w-1, 2w-2, \dots, w) | w \in \dot{\mathbb{N}}\}$$

и

$$\mathbf{Pent}'' := \{(2w, 2w-1, \dots, w+1) | w \in \dot{\mathbb{N}}\};$$

объединим их в множество

$$\mathbf{Pent} := \mathbf{Pent}' \bigcup \mathbf{Pent}''.$$

Как нетрудно проверить, определены взаимно обратные сохраняющие площадь отображения "лесенка на стенку"

$$\mathrm{sw} : \mathbf{S} \setminus \mathbf{Pent} \longrightarrow \mathbf{W} :$$

$: (n_1,\dots,n_{\mathrm{stair}(n)};n_{\mathrm{stair}(n)+1},\dots,n_w)\mapsto(n_1{-}1,\dots,n_{\mathrm{stair}(n)}{-}1;n_{\mathrm{stair}(n)+1},\dots,n_w;\mathrm{stair}(n))$
и "стенка на лесенку"

$$\mathrm{ws}:\mathbf{W}\setminus\mathbf{Pent}\longrightarrow\mathbf{S}:$$

$: (n_1,\dots,n_{\mathrm{wall}(n)};n_{\mathrm{wall}(n)+1},\dots,n_{w-1};n_w)\mapsto(n_1{+}1,\dots,n_{\mathrm{wall}(n)}{+}1;n_{\mathrm{wall}(n)+1},\dots,n_{w-1})$.
Этих конструкций достаточно для доказательства тождества, поскольку

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\mathrm{LHS}(\mathbf{3.5.1})=_{(3.5.2)}1+\sum_{n_1>n_2>\dots>n_w}(-1)^w x^{n_1+\dots+n_w}=$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbf{Dec}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=1+\sum_{n\in(\mathbf{W}\setminus\mathbf{Pent})\coprod(\mathbf{S}\setminus\mathbf{Pent})\coprod\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbf{W}\setminus\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}+\sum_{n\in\mathbf{S}\setminus\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}+\sum_{n\in\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbf{W}\setminus\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}+\sum_{n\in\mathbf{W}\setminus\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}\circ\mathrm{ws}(n)}x^{\mathrm{area}\circ\mathrm{ws}(n)}+\sum_{n\in\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbf{W}\setminus\mathbf{Pent}}\left[(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}+(-1)^{\mathrm{width}\circ\mathrm{ws}(n)}x^{\mathrm{area}\circ\mathrm{ws}(n)}\right]+\sum_{n\in\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbf{W}\setminus\mathbf{Pent}}\left[(-1)^{\mathrm{width}(n)}+(-1)^{\mathrm{width}\circ\mathrm{ws}(n)}\right]x^{\mathrm{area}(n)}+\sum_{n\in\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbf{Pent}}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbf{Pent}'}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}+\sum_{n\in\mathbf{Pent}''}(-1)^{\mathrm{width}(n)}x^{\mathrm{area}(n)}=$$

$$=1+\sum_{w=1}^{\infty}(-1)^w x^{\frac{(3w-1)w}{2}}+\sum_{w=1}^{\infty}(-1)^w x^{\frac{(3w+1)w}{2}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k x^{\frac{(3k+1)k}{2}}=\mathrm{RHS}(\mathbf{3.5.1}).$$

ЧТД

Читателю предлагается применить полученную формулу в упражнении **(3.11).**

Теперь мы готовы установить основной результат.

Теорема. *Для всех $q \in \Delta_1$ и $Z \in \dot{\mathbb{C}}$ имеет место равенство*

$$\Theta(Z|q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n = \prod_{m=1}^{\infty} [(1-q^{2m})(1+q^{2m-1}Z)(1+\frac{q^{2m-1}}{Z})] \qquad (\mathbf{3.5.2})$$

Доказательство. Согласно доказанному предложению, имеет место тождество

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n = f(q) \prod_{m=1}^{\infty} [(1+q^{2m-1}Z)(1+\frac{q^{2m-1}}{Z})] \qquad (\mathbf{3.5.3})$$

с неизвестной функцией f. Перепишем это соотношение в виде

$$f(q) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n}{\prod_{m=1}^{\infty} [(1+q^{2m-1}Z)(1+\frac{q^{2m-1}}{Z})]} \qquad (\mathbf{3.5.4})$$

Для применения формулы Эйлера подставим в **(3.5.4)** $Z = -q^{\frac{1}{3}}$. Получим

$$f(q) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2+\frac{n}{3}}}{\prod_{m=1}^{\infty} [(1-q^{2m-\frac{2}{3}})(1-q^{2m-\frac{4}{3}})]} =_{x:=q^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}}{\prod_{m=1}^{\infty} [(1-x^{3m-1})(1-x^{3m-2})]} =_{(3.5.1)} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)}{\prod_{m=1}^{\infty} [(1-x^{3m-1})(1-x^{3m-2})]} =$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{\infty} [(1-x^{3m})(1-x^{3m-1})(1-x^{3m-2})]}{\prod_{m=1}^{\infty} [(1-x^{3m-1})(1-x^{3m-2})]} = \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^{3m}) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{2m}).$$

ЧТД

В упражнении 3.12 читателю предлагается применить доказанную теорему к теории разбиений.

Упражнения

3.1. Покажите, что ряд **(3.0.0)** для Θ равномерно и абсолютно сходится на компактах $\{(Z,q) \in \dot{\mathbb{C}} \times \mathbf{D}_0(1) | \frac{1}{R} \le |Z| \le R, |q| \le r\}$ для любых $R, r \in \mathbb{R}_{>0}$.

3.2. Покажите, что ряд **(3.0.1)** для θ равномерно и абсолютно сходится на подходящих подмножествах множества $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$.

3.3. Оцените эффективно сходимость ряда **(3.2.0)** при фиксированном $\tau \in \mathcal{H}$. Взяв какое-либо конкретное $\tau \in \mathcal{H}$, оцените количество членов ряда **(3.2.0)** , достаточное для вычисления значения этого ряда в фундаментальном параллелограмме решётки $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ с точностью до миллионных.

3.4. Постройте график вещественной функции $x \mapsto \theta(x|\mathrm{i})$. Найдите приближённо несколько нулей функции $x \mapsto \theta(x + \frac{\mathrm{i}}{2}|\mathrm{i})$.

3.5. Вычислите приближённо $\theta(\frac{3-5\mathrm{i}}{2}|\mathrm{i})$.

3.6. Упростите (хотя бы предположительно) соотношения **(3.4.2.0)** и **(3.4.2.1)** для случая квадратной решётки $L = \mathbb{Z}\mathrm{i} + \mathbb{Z}$.

3.7. Обоснуйте результаты предыдущего упражнения с помощью теоремы раздела **(3.4.3).**

3.8. Опишите пространство квазипериодических функций, содержащее куб сигма-функции Вейерштрасса, и найдите его базис, связанный с $(\wp, \wp')$-вложением эллиптической кривой в проективную плоскость.

3.9. Умножьте сигма-функцию квадратной решётки на экспоненту квадратного трёхчлена так, чтобы получившаяся функция была $\mathbb{Z}$-периодична.

3.10. Изучите вещественные функции $\hat{\theta}(\_|\tau)$ и $\theta(\_|\tau)$.

3.11. Вычислите двумя способами $.9 \cdot .99 \cdot .999 \cdot .9999 \ldots$

3.12. Положите в формуле **(3.5.2)**$Z = 1$ и интерпретируйте полученный результат в терминах разбиений.

Литература

[Fra1881] Franklin F., *Sur le développement du produit infini* $(1-x)(1-x^2) \times (1-x^3) \ldots$. Comptes Rendus **82** , 1881.
[Энд1982] Эндрюс Дж., *Теория разбиений.* М., "Наука" , 1982.