Лекция 2 (26 сентября 2011)
Вложения комплексных торов в проективные пространства

2.0. Комплексные торы. Основной транцендентный метод в работе с комплексными абелевыми многообразиями – представление их в виде *комплексных торов,* то есть факторов комплексных линейных пространств по *полным решёткам.* Сейчас будут приведены шесть равносильных определений.

Предложение. *Пусть V – конечномерное комплексное пространство, а $L \subset V$ – дискретная подгруппа его аддитивной группы. Следующие свойства подгруппы L равносильны:*

(а) L изоморфна свободной абелевой группе максимального возможного ранга;
(б) L изоморфна свободной абелевой группе, ранг которой вдвое превосходит размерность пространства V;
(в) фактор-пространство V/L компактно;
(г) фактор-пространство V/L имеет конечный объём [1];
(д) фактор-пространство V/L гомеоморфно произведению окружностей.
(е) группа L допускает систему образующих, которая является базисом пространства V, рассматриваемого как вещественное.

Доказательство получается применением стандартных результатов линейной алгебры, топологии и теории топологических групп.

[1] напомним, что на V, как и на всякой локально-компактной группе, имеется *мера Хаара,* определённая однозначно с точностью до множителя

Любое комплексное абелево многообразие (определённое в лекции 1) изоморфно комплексному тору: достаточно перейти к его *универсальной накрывающей.* Детали читателю предлагается проработать в упражнении **2.1.**

Верно ли обратное, то есть любой ли комплексный тор изоморфен абелеву многообразию?

Ответ утвердителен в размерности 1; одномерные комплексные торы вкладываются в комплексные проективные многообразия с помощью систем *эллиптических функций;* соответствующие конструкции будут приведены в этой и следующей лекциях.

В размерностях, превосходящих 1, ответ отрицателен. Условие *Римана*, обеспечивающие голоморфную вложимость тора в комплексное проективное пространство, будет приведено в одной из последующих лекций.

2.1. Поднятие вложения на универсальную накрывающую. Итак, пусть дано комплексное векторное пространство $V \simeq \mathbb{C}^g$ и решётка максимального ранга $L \subset V$ в нём. Ища вложение тора V/L в $N-$мерное проективное пространство, обозначим компоненты этого вложения

$$(\underline{f_0} : \cdots : \underline{f_N}) : \frac{V}{L} \hookrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$$

так, чтобы его поднятие на универсальную накрывающую имело вид

$$(f_0 : \cdots : f_N) : V \longrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}).$$

Здесь мы воспользуемся классической теоремой А.Картана (даже не формулируя её явно), согласно которой рассматриваемое вложение можно поднять ещё "на этаж выше" , то есть пропустить через *тавтологическое расслоение*

$$\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) : (z_0, \ldots, z_N) \mapsto (z_0 : \cdots : z_N)$$

(читателям, не привыкшим к этому понятию, предлагается упражнение **2.2**).

В нашем случае возможность последнего подъёма означает, что мы можем считать $f_0, \ldots, f_N$ *целыми функциями* на пространстве V; в стандартных обозначениях

$$f_0, \ldots, f_N \in \mathcal{O}[V].$$

2.2. Функциональные уравнения. Пропускаемость отображения

$$V \longrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) : v \mapsto (f_0(v) : \cdots : f_N(v))$$

через тор V/L означает существование для каждого элемента $\lambda \in L$ таких нигде не обращающихся в 0 целых функций e_λ – в стандартных обозначениях

$$e_\lambda \in \mathcal{O}^\times[V]$$

– что для любого $v \in V$ и для любого $k \in \{0, \ldots, N\}$

$$f_k(\lambda + v) = e_\lambda(v) f_k(v). \tag{\textbf{2.2.0}}$$

Функции e_λ часто называют *мультипликаторами.*

Таким образом, задача о вложениях комплексных торов в проективные пространства свелась к чисто аналитической: следует изучить наборы целых функций $f_0, \ldots, f_N \in \mathcal{O}[V]$ и наборы обратимых целых функций $e_\lambda \in \mathcal{O}^\times[V]$ для всех $\lambda \in L$, удовлетворяющих соотношениям **(2.2.0)**. Затем из этих наборов следует выделить те, для которых отображение $(f_0 : \cdots : f_N)$ задаёт *вложение* тора V/L в $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$.

Как мы вскоре увидим, достаточно ограничиться *элементарными* мультипликаторами e_λ, тогда как среди функций $f_0, \ldots, f_N$ встретятся высшие трансцендентные функции, входящие в сокровищницу классического комплексного анализа.

Сейчас мы изучим зависимость системы мультипликаторов e_λ от элементов решётки $\lambda \in L$.

Предложение. *Если функции $f_0, \ldots, f_N \in \mathcal{O}[V]$ и мультипликаторы $e_\lambda \in \mathcal{O}^\times[V]$ удовлетворяют соотношениям* **(2.2.0)**, *то для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ и для любого $v \in V$ имеет место равенство*

$$e_{\lambda_1+\lambda_2}(v) = e_{\lambda_1}(\lambda_2 + v) e_{\lambda_2}(v). \tag{\textbf{2.2.1}}$$

Доказательство. Для каждой $f \in \{f_0, \dots, f_N\}$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ имеем

$$f(\lambda_1+\lambda_2+v) \equiv e_{\lambda_1+\lambda_2}(v)f(v) \equiv e_{\lambda_1}(\lambda_2+v)f(\lambda_2+v) \equiv e_{\lambda_1}(\lambda_2+v)e_{\lambda_2}(v)f(v).$$

Поскольку для любого $v \in V$ среди $f \in \{f_0, \dots, f_N\}$ найдётся такая, что $f(v) \neq 0$, отсюда следует требуемое.

ЧТД

В упражнении **2.3** читателю предлагается исследовать мультипликаторы простейшего вида в случае одной переменной.

2.3. Действие группы на точки и на функции. Немного сменим точку зрения на рассматриваемые объекты. Решётку L будем теперь считать не подгруппой аддитивной группы пространства V, а группой, *действующей* на этом пространстве (сдвигами). Специальной буквы для этого действия вводить не будем, а будем обозначать его применение жирной точкой $\bullet$, так что в обозначениях предыдущего раздела

$$\lambda \bullet v \equiv v + \lambda.$$

Расширим наши рассмотрения: сохранив обозначение, будем теперь считать V произвольным *комплексным многообразием,* а букву L заменим на букву Γ и будем считать Γ произвольной *не обязательно коммутативной группой,* действующей на многообразии V *биголоморфными преобразованиями.* Это действие по-прежнему будем обозначать жирной точкой $\bullet$, то есть считать определённым отображение

$$\Gamma \times V \longrightarrow V : (\gamma, v) \mapsto \gamma \bullet v.$$

Задача изучения голоморфных отображений

$$V \longrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) : v \mapsto (f_0(v) : \dots : f_N(v))$$

ставится дословно так же, как в изученном частном случае, и требование постоянства этого отображениях на орбитах Γ приводит к системе мультипликаторов $\{e_\gamma \in \mathcal{O}^\times[V] | \gamma \in \Gamma\}$, входящих в соотношения

$$f_k(\gamma \bullet v) = e_\gamma(v) f_k(v) \qquad (\mathbf{2.3.0}),$$

обобщающие соотношения **(2.2.0).** Соотношение **(2.2.1)** заменяется на

$$e_{\gamma_1\gamma_2}(v) = e_{\gamma_1}(\gamma_2 \bullet v)e_{\gamma_2}(v), \qquad (\mathbf{2.3.1})$$

которое читателю предлагается проверить в упражнении **2.4.**

Теперь перейдём от действия группы Γ на точках многообразия V к действию на голоморфных *функциях* на V, то есть на множестве $\mathcal{O}[V]$. Оно будет обозначаться точкой $\cdot$ и определяется формулой

$$(\gamma \cdot f)(v) := f(\gamma^{-1} \bullet v)$$

для всех $\gamma \in \Gamma, f \in \mathcal{O}[V], v \in V$.

Преимущество действия $\cdot$ пред действием $\bullet$ заключается в том, что $\mathcal{O}[V]$ – (аддитивная) *группа,* и действие $\cdot$ превращает её в Γ-*модуль.*

Это же действие $\cdot$ превращает и мультипликативную группу $\mathcal{O}^\times[V]$ в Γ- модуль, которым мы сейчас займёмся.

Предложение. *Пусть отображение (не морфизм групп!)*

$$c : \Gamma \longrightarrow \mathcal{O}^\times[V]$$

задано с помощью системы мультипликаторов $\{e_\gamma \in \mathcal{O}^\times[V] | \gamma \in \Gamma\}$, *удовлетворяющих соотношениям* **(2.3.1)***формулой*

$$[c(\gamma)](v) := e_{\gamma^{-1}}(v) \qquad (\mathbf{2.3.2})$$

для всех $\gamma \in \Gamma, v \in V$. *Тогда для всех* $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ *имеет место соотношение*

$$c(\gamma_1\gamma_2) = c(\gamma_1)[\gamma_1 \cdot c(\gamma_2)]. \qquad (\mathbf{2.3.3})$$

Доказательство. Для любого $v \in V$ имеем

$$[c(\gamma_1\gamma_2)](v) =_{(2.3.2)} e_{(\gamma_1\gamma_2)^{-1}}(v) = e_{\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}}(v) =_{(2.3.1)} e_{\gamma_2^{-1}}(\gamma_1^{-1} \bullet v)e_{\gamma_1^{-1}}(v) =_{(2.3.2)}$$

$$= [c(\gamma_2)](\gamma_1^{-1} \bullet v)[c(\gamma_1)](v) = [\gamma_1 \cdot c(\gamma_2)](v)[c(\gamma_1)](v) =$$
$$= [c(\gamma_1)](v)[\gamma_1 \cdot c(\gamma_2)](v).$$

ЧТД

2.4. Когомологическая интерпретация функциональных уравнений. Пусть Γ – группа, а M – Γ-модуль, записываемый аддитивно (в силу традиции; наше ближайшее применение вводимых понятий будет связано как раз с мультипликативной группой). В этой (ещё более общей, чем в предыдущем разделе) ситуации мы снова чуть-чуть сменим обозначения и вместо записи

$$\Gamma \times M \longrightarrow M : (\gamma, m) \mapsto \gamma \cdot m$$

будем использовать *левоэкспоненциальную запись*

$$\Gamma \times M \longrightarrow M : (\gamma, m) \mapsto^{\gamma} m.$$

Эта запись обладает следующими легко запоминающимися свойствами: для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, m \in M$

$$^{(\gamma_1\gamma_2)}m =^{\gamma_1} (^{\gamma_2}m);$$

для всех $\gamma \in \Gamma, m_1, m_2 \in M$

$$^{\gamma}(m_1 + m_2) =^{\gamma} m_1 +^{\gamma} m_2.$$

В гомологической алгебре принята следующая терминология. Отображение $c : \Gamma \to M$ называется *скрещенным (гомо)морфизмом,* если для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ имеет место соотношение

$$c(\gamma_1, \gamma_2) = c(\gamma_1) +^{\gamma_1} c(\gamma_2).$$

Аддитивная группа всех скрещенных гомоморфизмов (относительно поэлементного сложения) называется также *группой 1-коциклов* Γ *с коэффициентами в* M и обозначается

$$\mathrm{Z}^1(\Gamma, M).$$

Каждый элемент $m \in M$ определяет *главный скрещенный (гомо)морфизм,* задаваемый формулой

$$\gamma \mapsto^{\gamma} m - m.$$

Аддитивная группа всех главных скрещенных гомоморфизмов (относительно поэлементного сложения) называется также *группой 1-кограниц* Γ *с коэффициентами в* M и обозначается

$$\mathrm{B}^1(\Gamma, M).$$

Тот факт, что каждый главный скрещенный гомоморфизм является скрещенным гомоморфизмом, читателю предлагается проверить в упражнении **2.5.**

Фактор-группа группы коциклов по группе кограниц называется (пока 1-й) *группой когомологий* и обозначается

$$\mathrm{H}^1(\Gamma, M) := \frac{\mathrm{Z}^1(\Gamma, M)}{\mathrm{B}^1(\Gamma, M)}.$$

Связь с другими когомологическими теориями и с более наглядными понятиями будет прояснена в последующих лекциях.

Вернёмся к основной конструкции *этой* лекции. Вложению в проективное пространство универсальной накрывающей тора V/L

$$V \longrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) : v \mapsto (f_0(v) : \cdots : f_N(v)),$$

осуществляемому целыми функциями $f_0, \ldots, f_N \in \mathcal{O}[V]$, мы сопоставили систему "поправочных" функций-мультипликаторов $e_\lambda \in \mathcal{O}^\times[V]$, определяющих поведение функций $f_0, \ldots, f_N$ при сдвигах аргументов на элементы решётки L.

Оказалось (см. **(2.3.2)**), что функция $c : L \to \mathcal{O}^\times[V] : \lambda \mapsto [v \mapsto e_{-\lambda}(v)]$ является коциклом,

$$c \in \mathrm{Z}^1(L, \mathcal{O}^\times[V]).$$

Естественно выяснить, что произойдёт с коциклом c при замене на *когомологичный* коцикл $\hat{c}$, определяемый, скажем, формулой

$$\hat{c}(\lambda) = c(\lambda)\frac{{}^\lambda\phi}{\phi}$$

для $\lambda \in L$, где $\phi \in \mathcal{O}^\times[V]$.

Здесь уместно вспомнить, что проективное вложение определяется не просто набором целых функций $f_0, \ldots, f_N \in \mathcal{O}[V]$, а *классом эквивалентности* таких наборов относительно умножения всего набора на обратимую голоморфную функцию.

Выберем обратимую функцию $\phi \in \mathcal{O}^\times[V]$ и заменим набор $f_0, \ldots, f_N$ на набор $\hat{f}_0, \ldots, \hat{f}_N$, положив

$$\hat{f}_k := \phi f_k$$

для $k \in \{0, \ldots, N\}$. Тогда для $v \in V, \lambda \in L$ имеем

$$\hat{f}_k(\lambda + v) = \phi(\lambda + v) f_k(\lambda + v) = \phi(\lambda + v) e_\lambda(v) f_k(v) = \phi(\lambda + v) e_\lambda(v) \frac{\hat{f}_k(v)}{\phi(v)} =$$

$$= \frac{\phi(\lambda + v)}{\phi(v)} e_\lambda(v) \hat{f}_k(v).$$

Введя систему мультипликаторов

$$\hat{e}_\lambda(v) := \frac{\phi(\lambda + v)}{\phi(v)} e_\lambda(v)$$

для набора $\hat{f}_0, \ldots, \hat{f}_N$, согласно **(2.3.2)** мы свяжем с ней коцикл

$$\hat{c} : L \to \mathcal{O}^\times[V] : \lambda \mapsto [v \mapsto \hat{e}_{-\lambda}(v)],$$

который с учётом равенства

$$\hat{e}_{-\lambda}(v) = \frac{\phi(-\lambda + v)}{\phi(v)} e_{-\lambda}(v)$$

даёт

$$\hat{c}(\lambda) = \frac{{}^\lambda\phi}{\phi} c(\lambda),$$

как и ожидалось.

Подведём итог. Каждому отображению комплексного тора в проективное пространство мы сопоставили элемент некоторой группы когомологий (абстрактной группы с коэффициентами в мультипликативной группе обратимых голоморфных функций, на которой абстрактная группа действует). Мы сможем извлечь пользу из этой конструкции, когда научимся отождествлять эту когомологическую теорию с другими и, в частности, *вычислять* определённые выше и другие группы когомологий.

В оставшейся части этой лекции мы ограничимся одномерными рассмотрениями; наша цель проиллюстрировать введённые общие понятия классическим примером.

2.5. Краткий обзор теории эллиптических функций. В этой части лекции мы введём две функции σ_L и W_L , квазипериодические относительно произвольной решётки L, и с их помощью придём к (основной) *периодической* функции Вейерштрасса $\wp_L$. Коэффициенты разложений всех этих функций в ряды Лорана и Тейлора будут выражены через некоторые специальные функции решёток – *ряды Эйзенштейна*, взаимоотношения между которыми тоже будут установлены.

Всюду в дельнейшем будет использоваться обозначение

$$\dot{L} := L \setminus \{0\}.$$

2.5.1. Сигма-функция Вейерштрасса. Для произвольной решётки L определим *сигма-функцию* Вейерштрасса

$$\sigma_L(z) := z \prod_{\lambda \in \dot{L}} [(1 - \frac{z}{\lambda}) e^{\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}}]. \qquad (\mathbf{2.5.1.0})$$

как простейшую *целую* функцию с простыми нулями в точках решётки. Она, очевидно, *нечётна.*

Эта функция – представитель класса целых функций с предписанными нулями, введённых Вейерштрассом для произвольных дискретных подмножеств комплексной прямой.

Произведение Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно на компактах. Оценить эту сходимость количественно и применить оценку к одному частному случаю читателю предлагается в упражнении **2.6.**

Результаты, касающиеся разложения σ_L в ряд Тейлора и её квазипериодических свойств, будут приведены ниже.

2.5.2. Определение функции Вейерштрасса-Эйзенштейна. Мы будем называть так логарифмическую производную сигма-функции Вейерштрасса

$$\mathrm{W}_L(z) := \frac{\sigma'_L(z)}{\sigma_L(z)} \equiv_{(2.5.1.0)} \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}] \qquad \mathbf{(2.5.2.0)}$$

Это – нечётная мероморфная функция с полюсами первого порядка в решётке L.

Мы используем нестандартное название и обозначение этой функции! В литературе она называется *дзета-функцией Вейерштрасса* и обозначается буквой ζ. Я считаю это недопустимым, поскольку буква ζ занята Риманом, а у нас скоро встретятся ситуации, в которых будет фигурировать и $\mathrm{W}_{\mathbb{Z}}$, и ζ-функция Римана. Обозначение W введено, разумеется, в честь Вейерштрасса, а использование имени Эйзенштейна скоро будет обосновано.

Изучение сходимости выражения (2.5.2.0) (для случая квадратной решётки) предоставляется читателю в упражнении **2.7.**

В точках решётки L функция W_L не определена, но важную роль в дальнейшем будут играть её значения в точках *уполовиненной* решётки, то есть на множестве $\frac{1}{2}L \setminus L$. Читателю предлагается провести численное изучение одного важного частного случая в упражнении **2.8.**

2.5.3. Множество решёток и ряды Эйзенштейна. Введём обозначение для множества *всех* решёток в $\mathbb{C}$

$$\mathcal{L} := \{\text{дискретные подгруппы в } \mathbb{C} \text{ ранга } 2\}. \qquad \mathbf{(2.5.3.0)}$$

В дальнейшем мы введём на нём различные структуры, пока же будем рассматривать просто как множество – впрочем, снабжённое очевидным действием группы $\mathbb{C}^\times$; решётки часто интересуют нас не сами по себе, а с точностью до *подобия*.

Существует огромная наука о *модулярных формах,* до некоторой степени состоящая в изучении *квазиоднородных* комплекснозначных функций на $\mathcal{L}$, то есть таких

$$\phi : \mathcal{L} \to \mathbb{C},$$

что при некотором $D \in \mathbb{Z}$ равенство

$$\phi(m \cdot L) = m^D \phi(L)$$

выполняется для всех $L \in \mathcal{L}$ и $m \in \mathbb{C}^\times$.

Ряды Эйзенштейна – это бросающиеся в глаза квазиоднородные функции, суммы обратных чётных степеней ненулевых элементов решёток

$$\mathrm{G}_k : \mathcal{L} \to \mathbb{C} : L \mapsto \sum_{\lambda \in \dot{L}} \frac{1}{\lambda^{2k}}, \qquad (\mathbf{2.5.3.1})$$

определённые при $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Суммы обратных *нечётных* степеней ненулевых элементов решётки равны нулю в силу центральной симметричности решётки.

Происхождение обозначения для рядов Эйзенштейна мне неизвестно, но оно является общепринятым. Некоторые их модификации обозначаются E_k – уже, очевидно, в честь Эйзенштейна.

В упражнении **2.9** читателю предлагается провести некоторое численное исследование рядов Эйзенштейна.

2.5.4. Ряд Лорана функции Вейерштрасса - Эйзенштейна. В этом пункте устанавливается простой, но фундаментальный результат.

Теорема. *Функция Вейерштрасса - Эйзенштейна при любом $L \in \mathcal{L}$ разлагается в следующий ряд Лорана:*

$$\mathrm{W}_L(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{G}_k(L) z^{2k-1} = \frac{1}{z} - \mathrm{G}_2(L) z^3 - \mathrm{G}_3(L) z^5 - \ldots \qquad (\mathbf{2.5.4.0})$$

Комментарий. Как мы видим, для любой решётки $L \in \mathcal{L}$ функция W_L – почти *производящая* для рядов Эйзенштейна $\mathrm{G}_k(L)$ этой решётки!

Предлагаемая терминология объясняется именно этим поразительным результатом.

Доказательство. При $z \neq 0$ и при достаточно малом $|z|$

$$\mathrm{W}_L(z) =_{(2.5.2.0)} \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}] =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}}] =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{\lambda^2} + \frac{z^3}{\lambda^3} + \frac{z^4}{\lambda^4} + \frac{z^5}{\lambda^5} + \dots)] =$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{\lambda \in \dot{L}} (\frac{z^2}{\lambda^3} + \frac{z^3}{\lambda^4} + \frac{z^4}{\lambda^5} + \frac{z^5}{\lambda^6} + \dots) =_{\mathrm{W}_L \text{ нечётна}}$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{\lambda \in \dot{L}} (\frac{z^3}{\lambda^4} + \frac{z^5}{\lambda^6} + \dots) = \frac{1}{z} - \sum_{\lambda \in \dot{L}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{\lambda^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\lambda \in \dot{L}} \frac{z^{2k-1}}{\lambda^{2k}} = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} z^{2k-1} \sum_{\lambda \in \dot{L}} \frac{1}{\lambda^{2k}} =_{(2.5.3.1)} \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{G}_k(L) z^{2k-1}.$$

ЧТД

В задаче **2.10.** читателю предлагается провести численную проверку доказанной теоремы.

2.5.5. Ряд Тейлора сигма-функции Вейерштрасса. Сейчас мы знаем, что сигма-функция Вейерштрасс – целая нечётная с производной в нуле, равной 1. Ряд Лорана её логарифмической производной позволяет разложить в ряд и её.

Теорема. *Для любого $L \in \mathcal{L}$ сигма-функция Вейерштрасса разлагается в ряд*

$$\sigma_L(z) = z + c_5 z^5 + c_7 z^7 + c_9 z^9 + \dots,$$

в котором

$$c_5 = -\frac{G_2}{4},$$

а остальные коэффициенты при $k \geq 3$ *определяются рекурренциями*

$$c_{2k+1} = -\frac{G_k}{2k} - \frac{1}{2k}\sum_{i=2}^{k-2} G_{k-i}c_{2i+1}.$$

Доказательство. Априори

$$\sigma_L(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + c_7z^7 \dots .$$

Исходя из равенства

$$\sigma_L' = \mathrm{W_L}\sigma_L,$$

получаем

$$1 + 3c_3z^2 + 5c_5z^4 + 7c_7z^6 + \cdots =$$

$$= (\frac{1}{z} - G_2z^3 - G_3z^5 - G_4z^7 \dots)(z + c_3z^3 + c_5z^5 + c_7z^7 \dots) =$$

$$= (1 - G_2z^4 - G_3z^6 - G_4z^8 \dots)(1 + c_3z^2 + c_5z^4 + c_7z^6 \dots).$$

Иначе говоря,

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)c_{2k+1}z^{2k} = (\frac{1}{z} - \sum_{j=2}^{\infty} G_jz^{2j-1})(z + \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}z^{2i+1}) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}z^{2i} - \sum_{j=2}^{\infty} G_jz^{2j} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} G_jc_{2i+1}z^{2(i+j)}.$$

Сокращая, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_{2k+1}z^{2k} = -\sum_{j=2}^{\infty} G_jz^{2j} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} G_jc_{2i+1}z^{2(i+j)},$$

откуда $c_3 = 0$ при любом $k \geq 2$

$$2kc_{2k+1} = -G_k - \sum_{i=1}^{k-2} G_{k-i}c_{2i+1},$$

или

$$c_{2k+1} = -\frac{G_k}{2k} - \frac{1}{2k}\sum_{i=2}^{k-2} G_{k-i}c_{2i+1}.$$

ЧТД

Начало ряда имеет вид

$$\sigma = z - \frac{1}{4}G_2 z^5 - \frac{1}{6}G_3 z^7 + (\frac{1}{32}G_2^2 - \frac{1}{8}G_4)z^9 + (\frac{1}{24}G_2 G_3 - \frac{1}{10}G_5)z^{11}\dots$$

В задаче **2.11** читателю предлагается провести численную проверку доказанной теоремы.

2.5.6. Ряд Лорана $\wp$-функции Вейерштрасса. Дифференцируя с обратным знаком соотношение **(3.1.2.0),** получаем определение $\wp$-функции Вейерштрасса

$$\wp_L := -\mathrm{W}'_L. \qquad (\mathbf{2.5.6.0})$$

Согласно **(2.5.2.0),**

$$\wp_L(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\dot{L}}[\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}]. \qquad (\mathbf{2.5.6.1})$$

Соединяя **(2.5.4.0)** и **(2.5.6.0),** получаем

$$\wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + 3\mathrm{G}_2(L)z^2 + 5\mathrm{G}_3(L)z^4 + 7\mathrm{G}_4(L)z^6 - \dots =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)\mathrm{G}_k(L)z^{2k-2}. \qquad (\mathbf{2.5.6.2})$$

Хорошо известно *дифференциальное уравнение Вейерштрасса*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 60\mathrm{G}_2\wp - 140\mathrm{G}_3. \qquad (\mathbf{2.5.6.3})$$

Его можно вывести, рассматривая начало ряда Лорана левой части **(2.5.6.3)**, заметив, что в левой части стоит двояко-периодическая *целая* функция и воспользовавшись теоремой Лиувилля.

Обычно вводят две новые функции

$$\mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$$

соотношениями

$$\mathrm{g}_2 := 60\mathrm{G}_2, \qquad (\mathbf{2.5.6.4})$$

$$\mathrm{g}_3 := 140\mathrm{G}_3, \qquad \mathbf{(2.5.6.5)}$$

после чего дифференциальное уравнение Вейерштрасса принимает вид

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - \mathrm{g}_2\wp - \mathrm{g}_3. \qquad \mathbf{(2.5.6.6)}$$

Поработать с полученными результатами численно читателю предлагается в упражнении **2.12.**

2.5.9. Обзор достижений. Для каждой решётки $L \in \mathcal{L}$ мы ввели одну целую функцию σ_L и две целомероморфных W_L и $\wp_L$. Мы представили их во всех видах, в которых положено представлять функции этого класса: целая представлены и в виде произведения, и в виде сходящегося степенного ряда, мероморфные – и в виде суммы простейших дробей, и в виде рядов Лорана. Кроме того, обе целомероморфные функции представлены в виде отношения целых:

$$\mathrm{W} = \frac{\sigma'}{\sigma},$$

$$\wp = -(\frac{\sigma'}{\sigma})' = \frac{-\sigma''\sigma + \sigma'^2}{\sigma^2}.$$

Что остаётся?

Во-первых, изучить некоторые свойства этих функций в том виде, в котором они введены. Часть соответствующих результатов (квазипериодичность и формула разности) будет получена прямо сейчас, для части (формула сложения) мы предварительно разовьём требуемый алгебро-геометрический аппарат.

Во-вторых, выявить недостатки введённых определений и преодолеть их. Вот эти недостатки.

- Формулы довольно сложны и плохо запоминаются – исключение составляет разложение $\wp_L$ в сумму простейших дробей;
- они дают плохую сходимость;
- они не допускают многомерных обобщений.

Все эти недостатки будут преодолены при переходе к *тета-функциям.*

В упражнении **2.13.** читателю предоставляется возможность (для случая квадратной решётки) вернуться от полученных результатов к самому началу.

2.5.10. Квазипериодичность функции Вейерштрасса-Эйзенштейна. Квазипериодические свойства функций W_L почти очевидны.

Предложение. *Пусть $L \in \mathcal{L}$ – произвольная решётка, а $\lambda \in L \setminus 2L$–её произвольный нечётный элемент. Тогда имеет место тождество*

$$\mathrm{W}_L(z+\lambda) \equiv \mathrm{W}_L(z) + 2\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2}).$$

Доказательство. При любом $\lambda \in L$ функция $z \mapsto \mathrm{W}_L(z+\lambda) - \mathrm{W}_L(z)$ постоянна, поскольку её производная равна нулю в силу периодичности $\wp$-Функции Вейерштрасса. Введём константу

$$c_\lambda := \mathrm{W}_L(z+\lambda) - \mathrm{W}_L(z).$$

При $\lambda \notin 2L$ в это тождество можно подставить $z = -\frac{\lambda}{2}$, откуда в силу нечётности W_L и вытекает требуемое.

ЧТД

Читателю рекомендуется выполнить упражнение **2.14.**

2.5.12. Квазипериодичность сигма-функции Вейерштрасса. Квазипериодические свойства функций σ_L несколько сложнее.

Предложение. *Пусть $L \in \mathcal{L}$ – произвольная решётка, а $\lambda \in L \setminus 2L$–её произвольный нечётный элемент. Тогда имеет место тождество*

$$\sigma_L(z+\lambda) \equiv -e^{\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})(2z+\lambda)}\sigma_L(z). \qquad (\mathbf{2.5.12.0})$$

Доказательство. Введём мероморфную функцию

$$f_\lambda(z) := \frac{\sigma_L(z+\lambda)}{\sigma_L(z)}$$

Имеем при $\lambda \notin 2L$

$$\frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z)} = \frac{\sigma'_L(z+\lambda)}{\sigma_L(z+\lambda)} - \frac{\sigma'_L(z)}{\sigma_L(z)} = \mathrm{W}'_L(z+\lambda) - \mathrm{W}'_L(z) =_{(2.5.10)} 2\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2}),$$

откуда

$$f_\lambda(z) \equiv: C_\lambda e^{2\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})z},$$

то есть

$$\sigma_L(z+\lambda) \equiv: C_\lambda e^{2\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})z}\sigma_L(z)$$

В это тождество можно подставить $z = -\frac{\lambda}{2}$, откуда в силу нечётности σ_L вытекает

$$C_\lambda = -e^{\lambda \mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})}$$

и

$$\frac{\sigma_L(z+\lambda)}{\sigma_L(z)} \equiv -e^{\lambda \mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})} e^{2\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})z} \equiv -e^{\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})(2z+\lambda)}.$$

ЧТД

В дальнейшем мы подробно изучим именно такой тип квазипериодического поведения целых функций: сдвиг аргумента на элемент решётки приводит к умножению функции на экспоненту линейной функции. Этот класс целых функций допускает многомерное обобщение.

Читателю рекомендуется выполнить упражнение **2.15.**

2.6. Вложение эллиптической кривой в проективную плоскость. Дифференциальное уравнение Вейерштрасса вместе с L-периодичностью функции Вейерштрасса $\wp_L$ позволяет нам утверждать, что пара функций $(\wp_L, \wp_L')$ задаёт голоморфное отображение

$$(\wp_L, \wp_L') : \mathbb{C} \setminus L \longrightarrow \mathbb{A}_2(\mathbb{C}),$$

пропускающееся через факторизацию по решётке L. В стандартных текстах по теории эллиптических функций проверяется, что это отображение инъективно в *фундаментальном параллелограмме* решётки и потому определяет вложение *проколотого тора*

$$(\underline{\wp_L}, \underline{\wp_L'}) : \frac{\mathbb{C} \setminus L}{L} \hookrightarrow \mathbb{A}_2(\mathbb{C}),$$

в *аффинную плоскость,* отождествляя его образ с плоской аффинной кубической кривой, задаваемой дифференциальным уравнением Вейерштрасса.

Проективное замыкание этой конструкции определяет вложение всего тора в проективную плоскость

$$(1 : \underline{\wp_L} : \underline{\wp'_L}) : \frac{\mathbb{C}}{L} \hookrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{C}),$$

однако это ещё не совсем та конструкция, которую мы рассматривали в начале лекции: компоненты вложения – *мероморфные,* а не целые функции.

Остаётся применить представление мероморфных функций в виде отношения целых. Как мы знаем из раздела **2.5.9,**

$$\wp = \frac{-\sigma''\sigma + \sigma'^2}{\sigma^2}$$

и потому

$$\wp' = \frac{-\sigma'''\sigma^2 + 3\sigma''\sigma'\sigma - 2\sigma'^3}{\sigma^3};$$

следовательно,

$$(1 : \wp : \wp'_L) = (\sigma^3 : -\sigma''\sigma^2 + \sigma'^2\sigma : -\sigma'''\sigma^2 + 3\sigma''\sigma'\sigma - 2\sigma'^3) =: (f_0 : f_1 : f_2)$$

–последнее переобозначение введено для сопоставления полученный формулы с началом лекции. Вспомнив формулу **(2.5.12.0)**

$$\sigma_L(z + \lambda) \equiv -\mathrm{e}^{\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})(2z+\lambda)}\sigma_L(z),$$

выведем из неё

$$\sigma_L(z + \lambda)^3 \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})(6z+3\lambda)+\pi\mathrm{i}}\sigma_L(z)^3.$$

Таким образом, в обозначениях начала лекции функциям $(f_0 : f_1 : f_2)$ соответствует система мультипликаторов, являющихся экспонентами многочленов степени 1:

$$e_\lambda(z) = \mathrm{e}^{6\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})z+3\lambda\mathrm{W}_L(\frac{\lambda}{2})+\pi\mathrm{i}}.$$

Эта формула имеет смысл лишь для нечётных $\lambda \in L$; общую формулу читателю предлагается установить в упражнении

Упражнения

2.1. Пользуясь известными фактами из различных математических дисциплин, докажите, что любое комплексное абелево многообразие как комплексная группа Ли изоморфна некоторому комплексному тору.

2.2. С помощью тавтологического расслоения $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ свяжите стандартное действие матричной группы $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ с дробно-линейными преобразованиями римановой сферы.

2.3. В случае $V = \mathbb{C}$ исследуйте системы функций $e_\lambda(v) = \mathrm{e}^{A_\lambda v + B_\lambda}$, удовлетворяющие соотношению **(2.2.1)**.

2.4. Тщательно проверьте соотношение **(2.3.1)**.

2.5. Проверьте, что для любой группы Γ и любого Γ-модуля M имеет место включение
$$\mathrm{B}^1(\Gamma, M) \subseteq \mathrm{Z}^1(\Gamma, M).$$

2.6. Оцените сходимость произведения Вейерштрасса количественно. Пользуясь этой оценкой, определите конечное приближение этого произведения, вычисляющее в квадрате $\{z| -3 \le \mathbf{Re}(z), \mathbf{Im}(z) \le 3\}$ значения функции $\sigma_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}$ с точностью до сотых. Постройте на одной координатной плоскости на отрезке $z \in \mathbb{R}, -3 \le z \le 3$ графики функций $z, \sin(\pi z), \sigma_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}, e^{-\frac{\pi^2}{6}z^2}\sigma_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}$; ваши наблюдения? Постройте ряд Тейлора (разумной длины) построенного вами конечного приближения функции $\sigma_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}$; проведя необходимые оценки, сравните его с графиком конечного приближения. Составьте предположение о том, какие коэффициенты построенного ряда Тейлора равны нулю.

2.7. Изучите сходимость ряда $\mathrm{W}_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}(z) - \frac{1}{z}$ в квадрате
$$\{z| -\frac{1}{2} \le \mathbf{Re}(z), \mathbf{Im}(z) \le \frac{1}{2}\}.$$

2.8. Пользуясь результатами задачи 2.7, вычислите с предписанной точностью числа $\mathrm{W}_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}(\frac{1}{2})$ и $\mathrm{W}_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}(\frac{\mathrm{i}}{2})$. Знакомы ли вам эти числа? ПОДСКАЗКА. Удвойте их.

2.9. Изучите сходимость рядов Эйзенштейна. Вычислите с предписанным числом знаков значения G_k при $2 \le k \le 8$ в решётках $\mathbb{Z}\mathrm{i} + \mathbb{Z}$,$2\mathbb{Z}\mathrm{i} + \mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z}\mathrm{i} + \mathbb{Z}$, а также $\mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}+\mathbb{Z}$.

Некоторые из вычисленных вами величин окажутся весьма близки к нулю; объясните эти явления.

Существуют ли для каких-нибудь решёток L пределы $\lim_{k\to\infty}\mathrm{G}_k(L)$? Для каких k существуют пределы $\lim_{h\to\infty}\mathrm{G}_k(\mathbb{Z}(\mathrm{i}h)+\mathbb{Z})$?

2.10. Пользуясь накопленным численным материалом, сравните два полученных представления функции Вейерштрасса-Эйзенштейна – в виде суммы простейших дробей и в виде ряда Лорана. Какое из представлений даёт лучшее приближение?

2.11. Пользуясь накопленным численным материалом, сравните два полученных представления сигма-функции Вейерштрасса- – в виде суммы произведения и в виде суммы сходящегося ряда. Какое из представлений даёт лучшее приближение?

2.12. Пользуясь накопленным численным материалом, сравните два полученных представления $\wp$-функции Вейерштрасса – в виде суммы простейших дробей и в виде ряда Лорана. Какое из представлений даёт лучшее приближение?

2.13. Оцените (эмпирически и теоретически) убывание коэффициентов ряда $\sigma_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}$. Докажите, что этот ряд задаёт *целую* функцию.

2.14. Проверьте квазипериодическое поведение функции W_L численно. Неформальный вопрос: какой вклад в квазипериодичность вносят поправочные члены?

2.15. Проверьте квазипериодическое поведение функции σ_L численно. Сверьте результаты с графиками и попробуйте погасить экспоненциальный рост в вещественном направлении.

2.16. Выбрав базис в решётке L, то есть представив её в виде $L=\mathbb{Z}\lambda_1+\mathbb{Z}\lambda_2$, выведите общую формулу для мультипликаторов $e_{n_1\lambda_1+n_2\lambda_2}(z)$, соответствующих вложению эллиптической кривой в плоскость, разобранному в разделе **2.6.** [СОВЕТ: использовать традиционные обозначения $\eta_{1,2}:=\mathrm{W}_L(\frac{\lambda_{1,2}}{2})$]. Проверьте эту формулу для всех трёх компонент вложения.