11.9.12 / 11.10.3

Лекция 1 (19 сентября 2011)
Введение

1.0. Определение абелевых многообразий. Абелевы многообразия – сложнейшие объекты классической и современной математики, однако их определения обманчиво просты.

Приведём определения, которые будут использоваться в этом курсе, в возрастающей общности. Всерьёз будут использоваться лишь два первых.

Без углубления в детали будет использоваться словосочетание *алгебраическая группа.* Это понятие родственно таким, как *топологическая группа* или *группа Ли.* Подразумевается, что в каждом из случаев мы имеем дело с категориями множеств, несущих на себе по *две* структуры – абстрактной группы и какую-то ещё. Разумеется, предполагается *совместимость* этих структур; например, групповые операции в топологических группах *непрерывны.*

1.0.1. *Абелево многообразие над полем комплексных чисел* $\mathbb{C}$ можно определить одним из трёх равносильных способов:

(а) *Проективная алгебраическая группа над* $\mathbb{C}$*;*
(б) *Проективная коммутативная алгебраическая группа над* $\mathbb{C}$*;*
(в) *Проективное многообразие над* $\mathbb{C}$*, гомеоморфное тору.*

Равносильность определений (а) $\Leftrightarrow$ (б) $\Leftrightarrow$ (в) не вполне тривиальна. Читателю предлагается поработать над ней в упражнении **1.1**.

Для знатоков отметим, что можно было бы добавить определения (а)' и (б)' со словом "полная" вместо "проективная" (алгебраическая группа).

1.0.2. *Абелево многообразие над произвольным алгебраически замкнутым полем* $\Bbbk$ можно определить одним из двух равносильных способов:

(а) *Проективная алгебраическая группа над* $\Bbbk$*;*
(б) *Проективная коммутативная алгебраическая группа над* $\Bbbk$*.*

Равносильность определений (а) $\Leftrightarrow$ (б) не вполне тривиальна. Читателю предлагается поработать над ней в упражнении **1.2**.

Знатоки догадаются, что можно было бы добавить определения (а)' и (б)' со словом "полная" вместо "проективная" (алгебраическая группа).

В теории имеются дополнительные трудности в положительных характеристиках, особенно в малых.

1.0.3. Определение *абелева многообразия над произвольным полем* $\Bbbk$ – существенно более тонкая материя. До некоторой степени оно сводится к предыдущему: для любого многообразия V над $\Bbbk$ (которое мы *не* определяем) определён *подъём*

$$\overline{V} := V \times_{\mathbf{spec}(\Bbbk)} \mathbf{spec}(\overline{\Bbbk}),$$

являющийся многообразием над алгебраическим замыканием $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$; процедура подъёма обобщает на произвольные поля рассмотрение множества комплексных решений систем полиномиальных уравнений с вещественными коэффициентами. Так вот, абелево многообразие над алгебраически незамкнутым полем – это нечто (многообразие с дополнительными структурами), подъём чего является абелевым многообразием в смысле определения предыдущего пункта.

Можно пытаться ограничиться наивным определением: абелево многообразие, например, над $\mathbb{Q}$ – это проективное многообразие, заданное системой однородных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ и снабжённое групповой структурой, также определённой над $\mathbb{Q}$. Определение верное, однако трудности возникают при попытке понять, какие абелевы многообразия над $\mathbb{Q}$ следует считать *одинаковыми.* Читатель может несколько прояснить ситуацию, выполнив упражнение **1.3.**

1.0.4. Определение *абелева многообразия над произвольной схемой* (даже над $\mathbf{spec}(\mathbb{Z})$) требует свободного владения основными понятиями абстрактной алгебраической геометрии. Мы его не приводим даже приблизительно, отсылая заинтересованного читателя к соответствующей весьма обильной литературе.

1.1. Абелевы многообразия в арифметической геометрии. Приведём лишь один, но весьма убедительный, пример. Абелевы многообразия сыграли основную роль в доказательстве Гердом Фальтингсом [Faltings1983] *гипотезы Морделла,* утверждающей, что

Пусть дана кривая C рода g, определённая над конечным расширением $\mathbb{K}$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда, если $g > 1$, то множество $\mathbb{K}$-рациональных точек на кривой C конечно.

Реально Фальтингс доказал *гипотезу Шафаревича:*

Существует лишь конечное число (классов изоморфизма) абелевых многообразий заданной размерности, определённых над заданным полем алгебраических чисел и имеющих хорошую редукцию вне заданного конечного множества нормирований поля ([Шафаревич1962]).

Тот факт, что гипотеза Морделла следует из гипотезы Шафаревича, был установлен А.Н.Паршиным в работе [Паршин1968].

Читатель может продумать один очень частный случай гипотезы Морделла, выполнив упражнение **1.4**

1.2. Абелевы многообразия в анализе и в механике. *Абелевы интегралы* старше абелевых многообразий. Ещё Ньютон занимался интегралами вида

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}},$$

обнаружив, что, когда среди x_1, x_2, x_3 нет равных, эти интегралы не берутся в элементарных функциях. Похожие интегралы возникают при вычислении *длины дуги эллипса* – см. упражнения **1.5, 1.6** – что и объясняет их название, *эллиптические.*

Лежандр и Гаусс предложили исключительно эффективный способ приближённого вычисления определённых эллиптических интегралов, связав их с *арифметико-геометрическим средним.* В упражнении **1.7** читателю предлагаются формальные действия, связанные с этим способом, а смысл этих действий с точки зрения абелевых многообразий будет ниже разобран в нашем курсе. Отметим, что, хотя с точки зрения классических проблем и результатов эллиптические интегралы относятся к *вещественной* математике, их полное понимание требует *комплексификации.*

Абелевы интегралы представляют собой широкое обобщение эллиптических. В 19 веке они были центральной темой исследований классиков – прежде всего Абеля, Якоби и Римана. Многие результаты нашего курса будут основаны на их достижениях.

Классическая механика со времён Ньютона и по сегодняшний день была неиссякаемым источником задач, решаемых в терминах абелевых многообразий; правда, до 19-го века геометрия была обычно скрыта за анализом и, как и в случае с абелевыми интегралами, рассмотрения велись в вещественной области. Всё же в *теореме Лиувилля о полной интегрируемости* возникают торы, на которое разбиваются фазовые пространства. Комплексификация этой картины и приводит к абелевым многообразиям и связанным с ними *тета-функциями,* в терминах которых решается огромное количество вполне интегрируемых систем классической механики. Читатель может найти современный и сравнительно полный обзор этих конструкций в книге **[BBEIM1994]**.

Для приобщения к этому бегло упомянутому кругу идей читателю предлагается выполнить упражнение **1.8**.

1.3. О категории абелевых многообразий. Мы лучше поймём, какие вопросы лучше ставить относительно *категории всех* абелевых многообразий, если рассмотрим её среди других категорий, например:

- абелевых групп;
- модулей над фиксированным кольцом;

• локально-компактных абелевых групп.

Все эти категории представляют собой категории абелевых групп с некоторой дополнительной структурой (в первом примере – без неё). Список, разумеется, можно удлинить.

Общекатегорные конструкции, связанные с каждой из этих категорий, позволяют представлять математические результаты в очень сжатом виде. Например, несколько фундаментальных теорем *гармонического анализа* содержатся в том, что *контравариантный функтор*, сопоставляющий локально-компактной коммутативной группе её группу характеров, *инволютивен.*

К абелевым многообразиям тоже будут применяться общекатегорные конструкции. Особо важными окажутся *группы автоморфизмов*и *кольца эндоморфизмов* абелевых многообразий и понятие *двойственного* абелева многообразия.

1.4. Первые примеры: эллиптические кривые. Наша цель – показать, что простейший класс абелевых многообразий весьма труден при прямолинейном подходе, но всё-таки допускает обозримые ответы с помощью некоторых разумных действий. С алгебро-геометрической точки зрения этот класс – плоские кубические кривые, и мы начнём с изучения этого класса кривых над произвольным алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.

1.4.0. *Плоская кубика* задаётся в $\mathbb{P}_2(\Bbbk)$ уравнением

$$0 = \sum_{i_0+i_1+i_2=3} c_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} =$$

$$= c_{300}x_0^3 +$$

$$+ c_{210}x_0^2x_1 + c_{201}x_0^2x_2 +$$

$$+ c_{120}x_0x_1^2 + c_{111}x_0x_1x_2 + c_{102}x_0x_2^2 +$$

$$+ c_{030}x_1^3 + c_{021}x_1^2x_2 + c_{012}x_1x_2^2 + c_{003}x_2^3.$$

От десяти коэффициентов $c_{300}, \dots, c_{003}$) для начала требуется лишь то, чтобы они не обращались в ноль все одновременно; поскольку при умножении всех коэффициентов на одну и ту же ненулевую константу кривая не меняется, можно считать, что

$$(c_{300} : \dots : c_{003}) \in \mathbb{P}_9(\Bbbk).$$

Таким образом, мы работаем с *девятипараметрическим* семейством плоских кубик.

1.4.1. Проективные преобразования. На проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\Bbbk)$ действует *группа проективных преобразований*

$$\mathsf{PGL}_3(\Bbbk) := \frac{\mathsf{GL}_3(\Bbbk)}{\Bbbk^\times},$$

где мультипликативная группа поля $\Bbbk^\times$ подразумевается вложенной в группу $\mathsf{GL}_3(\Bbbk)$ как группа диагональных (скалярных) матриц, а матрицы из $\mathsf{GL}_3(\Bbbk)$ действуют на тройках координат обычным образом.

Действуя на точках проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\Bbbk)$, группа $\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)$ действует и на её подмножествах, переводя, в частности, кубики в кубики (постарайтесь очень подробно объяснить себе, почему). Кубики, переводимые друг в друга проективными преобразованиями, называются *проективно эквивалентными;* очевидно, все *внутренние* свойства проективно эквивалентных кубик совпадают.

Таким образом, на девятимерном множестве кубик $\mathbb{P}_9(\Bbbk)$ действует восьмимерная группа $\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)$, а нас интересует фактор-множество множества кубик по этому действию – естественно ожидать, что оно окажется одномерным.

Однако у рассматриваемого действия группы на проективном пространстве имеются "плохие" орбиты: например, произведение трёх линейных форм задаёт треугольник. Нас же в основном интересуют *неприводимые гладкие* кубики – хотя, как мы увидим, для лучшего понимания некоторых вопросов полезно рассматривать их вырождения.

Полный анализ всех типов орбит и их взаимного расположения можно найти, например, в книге **[Крафт2000].**

Условие гладкости общей кубики весьма громоздко, и мы его не приводим; оно является "кубическим" аналогом условия невырожденности матрицы квадратичной формы, определяющей конику.

Для решения этой и других связанных с кубиками задач надо найти *удобные* системы координат; этот вопрос является аналогом приведения квадратичной формы к *сумме квадратов.*

Предварительно мы обсудим явление, представляющее самостоятельный интерес и отсутствующее в случае коник.

1.4.2. Перегибы плоских кубик. По определению, гладкая точка кубической кривой называется её *точкой перегиба,* если касательная в этой точке имеет с кривой *трёхкратное* касание. Это определение подразумевает, что точка не лежит на компоненте, являющейся прямой (для кубик наличие такой компоненты равносильно приводимости).

Гессианом однородной формы от трёх переменных называется определитель матрицы, составленной из вторых частных производных формы – см., например, **[Клейн1989]**. Вырожденным кубикам посвящаются задачи 2.7. и 2.8., а мы в дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемые кубики неприводимы. В этом случае можно установить, что *кубика пересекается с кривой, определённой обращением в ноль её гессиана, по крайней мере в трёх и не более чем в девяти точках.*

Более того, как хорошо известно, *точки перегиба неприводимой плоской кубики определяются обращением в ноль гессиана определяющей её формы* – см. **[Клейн1989]**. Таким образом, на неприводимой плоской кубике имеется по крайней мере три точки перегиба.

1.4.3. Помещение прямой перегиба в бесконечность. Пусть прямая перегиба является "бесконечной т.е. задаётся уравнением $x_0 = 0$, и пусть точка перегиба на ней имеет координаты $(0 : 0 : 1)$. Тогда можно положить $(c_{030} : c_{021} : c_{012} : c_{003}) = (1 : 0 : 0 : 0)$, и наше уравнение примет вид

$$0 = c_{300}x_0^3+$$

$$+c_{210}x_0^2x_1 + c_{201}x_0^2x_2 +$$
$$+c_{120}x_0x_1^2 + c_{111}x_0x_1x_2 + c_{102}x_0x_2^2 + x_1^3.$$

Перейдём к аффинным координатам

$$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{y_1}{x_0};$$

после деления на x_0^3 последнее уравнение превратится в

$$0 = c_{300} + c_{210}x + c_{201}y + c_{120}x^2 + c_{111}xy + c_{102}y^2 + x^3.$$

Заметим, что в случае $c_{102} = 0$ это уравнение разрешимо относительно координаты y и потому задаёт *рациональную* кривую. Пренебрежём этим случаем и предположим, что $c_{102} \neq 0$; воспользовавшись масштабным преобразованием по y (мы работаем над алгебраически замкнутым полем!), будем считать, что $c_{102} = -1$. Последнее уравнение примет вид

$$y^2 = c_{300} + c_{210}x + c_{201}y + c_{120}x^2 + c_{111}xy + x^3.$$

Следуя Джону Тейту (см. **[Silverman1986]**), введём новые обозначения

$$a_1 := -c_{111}, a_2 := c_{120}, a_3 := -c_{201}, a_4 := c_{210}, a_6 = c_{300}$$

и преобразуем последнее уравнение в так называемое *минимальное уравнение Вейерштрасса-Тейта*

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_6$ пронумерованы в нём так, чтобы преобразованию координат $x \leftarrow \lambda^2 x, y \leftarrow \lambda^3 y$ сопутствовало преобразование коэффициентов $a_k \leftarrow \lambda^k a_k$ (уравнение Вейерштрасса-Тейта умножится при таких преобразованиях на λ^6).

Минимальное уравнение Вейерштрасса-Тейта используется для исследования кубических кривых над *произвольными* полями (любых характеристик) и, видимо, над всеми полями разом не допускает дальнейших упрощений; во всяком случае, современной математике такие упрощения неизвестны. Для нас, однако, интересующихся в основном алгебраической геометрией над $\mathbb{C}$, это уравнение является лишь промежуточным этапом на пути к гораздо более коротким уравнениям.

1.4.4. Дальнейшие преобразования и подсчёт параметров. Мы начинали с десятипараметрического семейства уравнений плоских кубик, наборы коэффициентов которых пробегали *девятимерное проективное* пространство; на множестве этих уравнений действовала *восьмимерная* групa преобразований координат.

Теперь у нас остались коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, пробегающие *пятимерное аффинное* пространство; аффинность возникла в результате выбранных нормировок (два коэффициента были приравнены нами к ± 1). Естественно ожидать, что на оставшихся коэффициентах действует *четырёхмерная* групa преобразований координат.

Действительно, вид минимальных уравнений Вейерштрасса-Тейта сохраняется при преобразованиях

$$x \leftarrow \lambda^2 x + \kappa,$$

$$y \leftarrow \lambda^3 y + \mu x + \nu.$$

С помощью этих преобразований мы вскоре сведём над $\mathbb{C}$ уравнение Вейерштрасса-Тейта к одной из канонических форм.

1.4.5. Гладкость. Уравнение Вейерштрасса-Тейта уже достаточно просто, чтобы условие гладкости задаваемой им кривой можно было выписать явно. Действительно, (единственная) точка нашей кубики на бесконечной прямой является точкой перегиба, т.е. заведомо имеет касательную (саму бесконечную прямую); поэтому достаточно проверить, что особых точек кубики нет на конечной части плоскости, т.е. уравнение кривой и две его частные производные не обращаются одновременно в ноль.

Иначе говоря, наша кубика гладка тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 \\ a_1 y = 3x^2 + 2a_2 x + a_4 \\ 2y + a_1 x + a_3 = 0 \end{cases}$$

несовместна. Выразив y через x из последнего из уравнений системы (это можно сделать лишь при $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$!), мы сведём условие гладкости кубики к отсутствию общих корней двух многочленов от x, т.е. к необращению в ноль соответствующего результанта. Вычисление (с помощью MAPLE...) даёт

$$0 \neq 3\,{a_1}^2{a_2}^2a_6 - \frac{9}{4}\,a_6{a_1}^3a_3 + \frac{15}{8}\,{a_1}^2a_4{a_3}^2 - \frac{1}{2}\,{a_1}^2{a_4}^2a_2 - \frac{1}{16}\,{a_1}^5a_4a_3 -$$

$$-\frac{9}{2}\,{a_3}^2a_2a_4 - \frac{9}{4}\,{a_3}^3a_2a_1 + \frac{1}{2}\,{a_2}^2{a_1}^2{a_3}^2 + \frac{1}{16}\,a_2{a_1}^4{a_3}^2 - \frac{9}{2}\,{a_1}^2a_4a_6 -$$

$$-18\,a_6a_2a_4 + \frac{3}{4}\,a_2{a_1}^4a_6 + 6\,a_1a_3{a_4}^2 - \frac{1}{16}\,{a_1}^4{a_4}^2 + \frac{27}{2}\,{a_3}^2a_6 - \frac{1}{16}\,{a_3}^3{a_1}^3 + 27\,{a_6}^2 -$$

$$-{a_2}^2{a_4}^2 + {a_2}^3{a_3}^2 + 4\,{a_2}^3a_6 + \frac{1}{16}\,{a_1}^6a_6 + 4\,{a_4}^3 - \frac{1}{2}\,{a_1}^3a_4a_2a_3 -$$

$$-{a_2}^2a_4a_1a_3 - 9\,a_6a_2a_1a_3 + \frac{27}{16}\,{a_3}^4.$$

1.4.6. Нормальная форма Вейерштрасса. Главный шаг в упрощении уравнения Вейерштрасса-Тейта – уничтожение *перекрёстного члена* a_1xy. При $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ оно достигается преобразованием

$$y \leftarrow y - \frac{a_1}{2}x.$$

Остальные преобразования проводятся независимо по x и y и при $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2, 3$ обычным образом превращают уравнение в

$$y^2 = x^3 + ax + b;$$

по причинам, которые будут объяснены в следующей лекции, его принято записывать в виде

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

который и называется *вейерштрассовой нормальной формой.*

Условие *гладкости* кривой сводится теперь к отсутствию кратных корней у правой части последнего уравнения, которое равносильно

$$0 \neq g_2^3 - 27g_3^2.$$

1.4.7. Инварианты. Уравнение $y^2 = x^3 + ax + b$ всё ещё зависит от двух параметров, а не от одного; это объясняется тем, что от группы преобразований исходного уравнения осталась однопараметрическая группа

$$x \leftarrow \lambda^2 x, \; y \leftarrow \lambda^3 y, \; g_2 \leftarrow \lambda^4 g_2, \; g_3 \leftarrow \lambda^6 g_3.$$

Традиционными инвариантами *гладкой* кубики относительно этой последней группы преобразований являются два отличающиеся в 1728 раз числа:

$$J := \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

и

$$j = 1728J.$$

Заметим, что в силу условия гладкости оба инварианты определены для всех *гладких* кубик. Анализ $J-$инварианта и появление $j-$инварианта мы отложим до одной из последующих лекции. Часто рассматривается также инвариант

$$1 - J = \frac{27g_3^2}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

1.4.8. Групповая структура на плоских кубиках. Она определяется простым правилом:

сумма (трёх) коллинеарных точек равна нулю.

Для превращения этого правила в определение бинарной операции необходимо выделить точку на кубике, являющуюся нейтральным элементом. В обеих канонических формах, рассмотренных выше, одна из девяти точек перегиба объявлялась "бесконечной" ; за нейтральный элемент традиционно принимается именно она.

Коммутативность введённой операции очевидна, а ассоциативность – отнюдь. Мы предлагаем читателю задать эту операцию (которую в дальнейшем будем называть *сложением*) явно в упражнении **1.12** ; ассоциативность сложения выразится весьма громоздким алгебраическим тождеством.

Синтетическое доказательство ассоциативности сложения на плоской кубике можно найти в **[Клеменс1984]**.

1.5. Простейшие многомерные абелевы многообразия. Бросающийся в глаза класс многомерных абелевых многообразий – произведения одномерных, то есть эллиптических кривых. Их можно вложить в проективные пространства с помощью *отображений Сегре,* подробно описанных в **[Харрис]**. В упражнении **1.13**читателю предлагается явно описать простейший случай.

До некоторой степени явно можно описать все *абелевы поверхности.* Мы обсудим их структуру в дальнейших лекциях.

Упражнения

1.1. Пользуясь известными фактами из различных математических дисциплин, установите равносильность трёх определений комплексного абелева многообразия, приведённых в разделе **1.0.1.**

1.2. Пользуясь известными фактами из алгебраической геометрии, установите равносильность двух определений абелева многообразия над алгебраически замкнутым полем, приведённых в разделе **1.0.2.**

1.3. Как известно, эллиптические кривые можно задавать любым из уравнений $y^2 = x^3 + px + q$ и $v^2 = au^4 + bu^2 + c$ – разумеется, в координатах (x, y) и (u, v) – при условии, что многочлены в правых частях не имеют кратных корней. Каждая кривая, определённая одним из уравнений, бирационально изоморфна некоторой кривой, определённой другим; постройте эти бирациональные изоморфизмы. Затем подберите такие *вещественные* коэффициенты, что над $\mathbb{R}$ одно уравнение задаёт пустое множество, а другое – непустое. Объясните это явление, выяснив, *над каким полем* определены построенные вами бирациональные изоморфизмы.

1.4. Рассмотрите *квартику Ферма,* заданную уравнением $x^4 + y^4 = 1$. Воспроизведите (или найдите в литературе) доказательство Ферма теоремы о том, что множество $\mathbb{Q}$-рациональных точек на этой кривой состоит из $\{0, \pm 1\}$ и $\{\pm 1, 0\}$. Остаётся ли теорема верной при замене поля $\mathbb{Q}$ на его произвольное конечное расширение $\mathbb{K}$? Где не проходит доказательство?

1.5. Найдите преобразование, связывающее $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}$ с $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)}}$.
Указание. Примените замену переменных $x = \frac{au+b}{cu+d}$, при котором одно из чисел u_1, u_2, u_3, u_4 переходит в бесконечность.

1.6. Вычислите длину дуги эллипса и сведите полученный интеграл к интегралу от алгебраической функции.

1.7. Покажите, что при $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ интеграл

$$I(a,b) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

является эллиптическим (так называемым *полным первого рода*). Введя средние (арифметическое и геометрическое) $a_1 := \frac{a+b}{2}, b_1 := \sqrt{ab}$, установите равенство $I(a,b) = I(a_1, b_1)$. [Это равенство далеко не тривиально. Можно воспользоваться заменой переменных $\sin\phi = \frac{2a\sin\phi_1}{a+b+(a-b)\sin^2\phi_1}$]. Итерируя, введите для $n = 1, 2, \ldots$ числа $a_{n=1} := \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}$ и докажите существование общего предела

$$\mathbf{agm}(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

который и называется *средним арифметико-геометрическим* (**a**rithmetico-**g**eometric **m**ean) чисел a и b. Докажите формулу Лежандра-Гаусса

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \frac{\pi}{2\mathbf{agm}(a,b)}.$$

1.8. Решите *уравнение колебаний математического маятника*

$$\ddot{x} = -k\sin x$$

и проинтерпретируйте это решение в терминах эллиптических интегралов.

1.9. Докажите, что гессиан формы, определяющей кубику, тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда кубика является объединением прямых.

1.10. Докажите, что гессиан формы, определяющей приводимую кубику, приводим. Верно ли обратное?

1.11. Приведите к вейерштрассовой нормальной форме *кубику Ферма.*

1.12. Задайте явными формулами сложение на плоских кубиках в форме Вейерштрасса и Вейерштрасса-Тейта. [*Подсказка.* Воспользуйтесь формулами Виета]. Выпишите тождество, равносильное ассоциативности сложения. Пользуясь доступными компьютерными средствами, проверьте его.

1.13. Попытайтесь в явном виде задать структуру абелева многообразия на произведении двух кубик Ферма.

Литература

[BBEIM1994] Belokolos, E.D.; Bobenko, A.I.; Enol'skii, V.Z.; Its, A.R; Matveev, V.B., *Algebro-Geometric Approach to Non-linear Integrable Equations.* Springer-Verlag, 1994.

[Faltings1983] Faltings Gerd, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern.* Inventiones Mathematicae **73:3**(1983), p. 349–366.

[Silverman2006] Silverman J.H., *The arithmetic of elliptic curves.* Springer-Verlag, 2006.

[Клеменс1984] Клеменс Г., *Мозаика теории комплексных кривых.* М., "Мир" , 1984.

[Клейн1989] Клейн Ф., *Лекции по истории математики в девятнадцатом столетии.* М., "Наука" , 2000.

[Крафт2000] Крафт Х., *Геометрические методы в теории инвариантов.* ИО НФТИ, 2000.

[Мамфорд1971] Мамфорд Д., *Абелевы многообразия.* М., "Мир" , 1971.

[Паршин1968] Паршин А.Н., *Алгебраические кривые над функциональными полями.* ИАН (сер. матем.)М., 32(1968), стр. 1191-1218.

[Харрис2006] Харрис Дж. *Алгебраическая геометрия. Начальный курс.* М., МЦНМО, 2006.

[Шафаревич1962] Шафаревич И.Р., *Поля алгебраических чисел.* Proc. ICM, Stockholm, 1962, p. 163-176.