УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ТЕЙХМЮЛЛЕРА

А.Г.СЕРГЕЕВ

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, возникшее в работах Альфорса и Берса, играет ключевую роль в теории квазиконформных отображений и римановых поверхностей. Его можно определить как пространство квазисимметричных гомеоморфизмов единичной окружности S^1 (т.е. гомеоморфизмов S^1, продолжающихся до квазиконформных отображений единичного круга Δ), рассматриваемых с точностью до дробно-линейных автоморфизмов Δ. Пространство $\mathcal{T}$ обладает естественной метрикой и комплексной структурой и является банаховым многообразием. Оно содержит в себе все классические пространства Тейхмюллера, отвечающие компактным римановым поверхностям конечного рода. Эти пространства вкладываются в $\mathcal{T}$ в виде комплексных подмногообразий.

"Регулярная" часть пространства $\mathcal{T}$ совпадает с однородным пространством $\mathcal{S}$, являющимся фактором группы диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ по модулю дробно-линейных автоморфизмов круга Δ. Пространство $\mathcal{S}$ может быть реализовано в виде коприсоединенной орбиты группы Вирасоро Vir. Эта группа, являющаяся центральным расширением группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, играет важную роль в теории струн.

Коротко о содержании курса. В его первой части исследуется кэлерова геометрия пространства $\mathcal{T}$. Сначала мы напоминаем основные свойства квазиконформных отображений и их описание в терминах дифференциалов Бельтрами. Затем дается определение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ как фактора пространства квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 по модулю дробно-линейных автоморфизмов круга Δ и эквивалентное определение в терминах дифференциалов Бельтрами. Комплексная структура на $\mathcal{T}$ может быть введена с помощью вложения Берса, реализующего $\mathcal{T}$ в виде открытого подмножества в комплексном банаховом пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ. Классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где G – фуксова группа, вкладываются в $\mathcal{T}$ в виде комплексных подмногообразий, отвечающих G-инвариантным квазисимметричным гомеоморфизмам.

Группа квазисимметричных гомеоморфизмов окружности действует с помощью замены переменных на соболевском пространстве $V = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$ полудифференцируемых функций из $L^2(S^1, \mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности. Пространство V обладает естественной поляризацией, т.е. разложением комплексифицированного пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$$

подпространств, состоящих из функций, ряды Фурье которых содержат только положительные (соотв. только отрицательные) гармоники. Указанное действие квазисимметричных гомеоморфизмов окружности на V порождает вложение универсального пространства Тейхмюллера в бесконечномерное грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_b(V)$, состоящее из подпространств типа W_+ в $V^{\mathbb{C}}$. Это отображение является голоморфным относительно естественной структуры комплексного банахового многообразия на рассматриваемом грассмановом многообразии. Оно реализует регулярную часть $\mathcal{S}$ универсального пространства Тейхмюллера в виде подмногообразия $\mathrm{Gr}_b(V)$, совпадающего с грассманианом Гильберта–Шмидта.

Вторая часть курса посвящена квантованию универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$, имеющему важное значение для теории струн. Вначале мы напоминаем общие факты, относящиеся к геометрическому квантованию классических систем по Дираку. Затем мы применяем эту общую теорию к квантованию регулярной части $\mathcal{S}$ пространства $\mathcal{T}$. Для этого используется упомянутое ранее вложение пространства $\mathcal{S}$ в грассманиан Гильберта–Шмидта. Строится голоморфное фоковское расслоение над $\mathcal{S}$, на котором действует проективным образом группа $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Инфинитезимальная версия этого действия задает дираковское квантование пространства $\mathcal{S}$.

Однако, описанный метод не применим к квантованию всего универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$, поскольку это пространство содержит негладкие гомеоморфизмы S^1. Для квантования $\mathcal{T}$ мы привлекаем другой метод, основанный на следующих соображениях. Напомним, что на соболевском пространстве V имеется действие квазисимметричных гомеоморфизмов окружности, но это действие не является гладким и потому не имеет инфинитезимального предела. Однако, можно определить его квантованную инфинитезимальную версию. Указанное квантованное действие и задает квантование универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН