Лекция 4 (18 октября 2010)

4.1. Параллелограммы и решётки

В этом разделе мы начинаем инвариантное описание объектов, параметризующих наши функции, и связей между ними.

4.1.1. Ориентированные параллелограммы. Мы будем (как и выше при интегрировании) рассматривать *параллелограммы c* с вершинами $(0, \pi_2, \pi 1+\pi_2)$, ориентированные *против часовой стрелки* [1]. Вводим множество таких параллелограммов

$$\mathcal{P}^+ := \{(\pi_1, \pi_2) \in \dot{\mathbb{C}} \times \dot{\mathbb{C}} | \Im \frac{\pi_1}{\pi_2} > 0\}.$$

Множество параллелограммов $\mathcal{P}^+$ является связной областью в $\mathbb{C}^2$, составляющей его "половину".

По поводу этой области читателю предлагается топологическое упражнение 4.1; его особенно легко выполнить, прочитав следующий пункт.

[1] противоестественность нумерации оправдается при действии матричных групп

4.1.2. Классы подобия параллелограммов. Мультипликативная группа $\mathbb{C}^t imes$, действуя на множестве параллелограммов $\mathcal{P}^+$ покомпонентно, определяет их преобразования подобия. Группа действует свободно, и факторизация по ней определяет главное расслоение

$$\mathcal{P}^+ \longrightarrow \mathcal{H} : (\pi_1, \pi_2) \mapsto \frac{\pi_1}{\pi_2}.$$

В классе подобных параллелограммов принято выбирать *главного представителя,* что определяет сечение

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{P}^+ : \tau \mapsto (\tau, 1).$$

4.1.3. Решётки. Каждый параллелограмм порождает решётку: определено сюръективное отображение

$$\mathcal{P}^+ \longrightarrow \mathcal{L} : (\pi_1, \pi_2) \mapsto \mathbb{Z}\pi_1 + \mathbb{Z}\pi_2.$$

Это отображение является отображением *забывания образующих* и потому является *накрытием Галуа* с группой $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$, то есть факторизацией по этой группе. Не вполне очевидные обозначения, связанные с этим действием, будут введены в последующих лекциях.

В упражнении 4.2. читателю предлагается осуществить нетривиальное применение описанной конструкции.

4.1.4. Автоморфизмы. Как комплексное многообразие, пространство ориентированных параллелограммов $\mathcal{P}^+$ *однородно:* в п. 4.1.2 по существу показано, что оно биголоморфно эквивалентно прямому произведению $\mathcal{H} \times \dot{\mathbb{C}}$, так что на нём транзитивно действует группа биголоморфных автоморфизмов $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^\times$.

Нас, однако, интересует действие на $\mathcal{P}^+$ не всей этой группы, а двух её подгрупп:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^+ \arrow[rr, "/\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})"'] \arrow[d, "/\mathbb{C}^\times"] & & \mathcal{L} \\
\mathcal{H} & &
\end{tikzcd}$$

В дальнейшем эта диаграмма будет существенно расширена.

Каждая из групп $\mathbb{C}^\times$ и $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathcal{P}^+$ свободно, и эти действия перестановочны. Фактор

$$\frac{\mathcal{P}^+}{\mathbb{C}^\times \times \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

безусловно интересен: он интерпретируется как *множество классов подобия решёток.* Однако прямое произведение $\mathbb{C}^\times \times \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathcal{P}^+$ уже несвободно: пара $(-1, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$ действует на параллелограммах тривиально, поскольку замена их вершин на противоположные равносильна умножению на -1.

Другие такие (исключительные) явления читателю предлагается обнаружить в задаче 4.3.

В результате на множестве $\frac{\mathcal{P}^+}{\mathbb{C}^\times \times \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})}$ нет ясной и просто определяемой структуры [2], и мы откладываем его изучение. 4.2.

4.2. Зависимость эллиптических функций от параметров

Мы рассмотрим варианты введённых ранее эллиптических функций, параметризованных новыми многообразиями, введёнными в предыдущем разделе.

4.2.0. Соотношения квазиоднородности. Хотя эллиптические функции, введённые нами в позапрошлой лекции, и были параметризованы точками двумерного множества решёток $\mathcal{L}$, существенно они зависят лишь от одного параметра, поскольку при замене решётки на подобную ведут себя очень просто.

Для любого $m \in \mathbb{C}^\times$ и любой $L \in \mathcal{L}$ очевидны следующие тождества:

$$\sigma_{mL}(mz) \equiv m\sigma_L(z); \tag{4.2.0.0}$$

$$\mathrm{W}_{mL}(mz) \equiv \frac{1}{m}\mathrm{W}_L(z); \tag{4.2.0.1}$$

[2]хотя это, конечно,*орбиобразие...*

$$\wp_{mL}(mz) \equiv \frac{1}{m^2}\wp_L(z); \tag{4.2.0.2}$$

$$\wp'_{mL}(mz) \equiv \frac{1}{m^3}\wp'_L(z). \tag{4.2.0.3}$$

Они немедленно выводятся из определений. Читателю, однако, для верности предлагается упражнение 4.4.

4.2.1. Новая параметризация. Перенося параметры с решёток на параллелограммы, введём для $f \in \{\sigma, \mathrm{W}, \wp\}$ и для $(\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{P}^+$ новое обозначение

$$f(z|\pi_1, \pi_2) := f_{\mathbb{Z}\pi_1+\mathbb{Z}\pi_2}(z).$$

Авторы многих учебников и справочников предпочитают именно такое понимание эллиптических функций, и определяют, например, $\wp$-функцию как

$$\wp(z|\pi_1, \pi_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} [\frac{1}{(z-n_1\pi_1-n_2\pi_2)^2} - \frac{1}{(n_1\pi_1+n_2\pi_2)^2}].$$

Такие записи обладают тем (сомнительным) преимуществом, что явно представляют эллиптические функции как функции трёх комплексных переменных – всё выражается через *числа,* и никаких абстракций вроде решёток не фигурирует. Однако эти записи заметно длиннее и, кроме того, дезориентируют, скрывая тот факт, что эллиптические функции параметризуются решётками, а не их образующими.

Выбор стандартных представителей классов подобия параллелограммов позволяет воспринимать теорию эллиптических функций как теорию специальных функций двух комплексных переменных: для $f \in \{\sigma, \mathrm{W}, \wp\}$ и для $\tau \in \mathcal{H}$ вводятся

$$f(z|\tau) := f(z|\tau, 1) := f_{\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}(z).$$

Как мы вскоре увидим, такое понимание во многих вопросах весьма удобно.

Остаётся ввести переобозначения для рядов Эйзенштейна. Мы будем стараться пользоваться очевидными, но в случае возможных недоразумений будем записывать последовательность голоморфных на $\mathcal{P}^+$ функций в виде

$$(\pi_1, \pi_2) \mapsto \mathrm{G}_k|\pi_1, \pi_2) := \mathrm{G}_k(\mathbb{Z}\pi_1 + \mathbb{Z}\pi_2),$$

а последовательность голоморфных на $\mathcal{H}$ функций – в виде

$$\tau \mapsto \mathrm{G}_k|\tau) := \mathrm{G}_k(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}),$$

4.2.2. Полупериоды стандартной решётки. Для точки $\tau \in \mathcal{H}$ и $ab \in \{01, 10, 11\}$ введём полупериоды $\frac{a\tau+b}{2}$ и обозначения для значений функции $\wp(\_|\tau)$ в них:

$$\mathrm{e}_{ab}(\tau) := \wp(\frac{a\tau + b}{2}|\tau).$$

Для привыкания к этим обозначениям читателю предлагается упражнение 4.5.

4.3. Ветвление $\wp$-функций Вейерштрасса

Понимая $\wp$-функции Вейерштрасса как разветвлённые накрытия римановой сферы торами, мы обнаружим, что эти накрытия ветвятся в точности в точках второго порядка.

4.3.1. Критические значения. Они мгновенно описываются с помощью формулы разности.

Предложение. *Для любой решётки* $L \in \mathcal{L}$

$$\mathrm{CritVal}(\wp_L|_{\mathbb{C}\setminus L}) = \wp_L(\frac{1}{2}L \setminus L).$$

Доказательство. Согласно формуле разности, для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus L$

$$\wp_L(z_1) = \wp_L(z_2) \Longrightarrow z_1 \pm z_2 \in L.$$

Поэтому для любого $c \in \mathbb{C}$ уравнение $\wp_L(z) = c$ по модулю L имеет решения вида $\{z_1, -z_1\}$, которые совпадают тогда и только тогда, когда $z_1 \in \frac{1}{2}L \setminus L$.

QED

Следствие. Для любого $\tau \in \mathcal{H}$

$$\mathrm{CritVal}(\wp(\_|\tau)) = \{\infty, \mathrm{e}_{01}(\tau), \mathrm{e}_{10}(\tau), \mathrm{e}_{11}(\tau)\}.$$

4.3.2. Критические точки. Они уже по существу определены.

Предложение. *Для любой решётки* $L \in \mathcal{L}$

$$\operatorname{CritPts}(\wp_L|_{\mathbb{C}\setminus L}) = \frac{1}{2}L \setminus L.$$

Доказательство. Следует из предыдущего пункта.

QED

4.3.3. Факторизация уравнения Вейерштрасса. Теперь кубический многочлен в правой части уравнения Вейерштрасса можно разложить на множители.

Теорема. *Для любого* $\tau \in \mathcal{H}$ *имеет место тождество*

$$\wp'(z|\tau)^2 \equiv 4[\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{01}(\tau)][\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{10}(\tau)][\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{11}(\tau)].$$

Доказательство. Следует из двух предыдущих пунктов.

QED

4.4. Сдвинутые сигма-функции Вейерштрасса

Мы введём ещё три целых функции, родственные сигма-функции Вейерштрасса, имеющих простые нули в основной решётке, сдвинутой на полупериоды.

4.4.0. Определение. Вводимые функции однозначно определяются своими свойствами.

Теорема. *При любом* $\tau \in \mathcal{H}$ *и* $ab \in \{01, 10, 11\}$ *существуют целые функции* $z \mapsto \sigma_{ab}(z|\tau)$, *с точностью до знака определяемые тождествами*

$$\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{ab}(\tau) \equiv [\frac{\sigma_{ab}(z|\tau)}{\sigma(z|\tau)}]^2.$$

Дополнительными свойствами $\sigma_{ab} \in 1 + z\mathcal{O}[\mathbb{C}]$ *эти функции определяются однозначно.*

Доказательство. Теорема следует из того, что

$$\sigma(z|\tau)^2[\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{ab}(\tau)]$$

– целая функция с двукратными нулями, а потому – квадрат целой функции. Остаётся рассмотреть первый член ряда Тейлора.

QED

4.4.1. Вложение тора в трёхмерное проективное пространство. Оно определяется следующими формулами.

$$\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{01}(\tau) \equiv [\frac{\sigma_{01}(z|\tau)}{\sigma_{00}(z|\tau)}]^2 \tag{01a}$$

$$\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{10}(\tau) \equiv [\frac{\sigma_{10}(z|\tau)}{\sigma_{00}(z|\tau)}]^2 \tag{10a}$$

$$\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{11}(\tau) \equiv [\frac{\sigma_{11}(z|\tau)}{\sigma_{00}(z|\tau)}]^2 \tag{11a}$$

(11a)-(01a):

$$\mathrm{e}_{01}(\tau) - \mathrm{e}_{11}(\tau) \equiv [\frac{\sigma_{11}(z|\tau)}{\sigma_{00}(z|\tau)}]^2 - [\frac{\sigma_{01}(z|\tau)}{\sigma_{00}(z|\tau)}]^2 \tag{01b}$$

(11a)-(10a):

$$\mathrm{e}_{10}(\tau) - \mathrm{e}_{11}(\tau) \equiv [\frac{\sigma_{11}(z|\tau)}{\sigma_{00}(z|\tau)}]^2 - [\frac{\sigma_{10}(z|\tau)}{\sigma_{00}(z|\tau)}]^2 \tag{10b}$$

σ_{00}^2(01b)+σ_{01}^2:

$$(\mathrm{e}_{01} - \mathrm{e}_{11})\sigma_{00}^2 + \sigma_{01}^2 = \sigma_{11}^2 \tag{01c}$$

σ_{00}^2(10b)+σ_{10}^2:

$$(\mathrm{e}_{10} - \mathrm{e}_{11})\sigma_{00}^2 + \sigma_{10}^2 = \sigma_{11}^2 \tag{10c}$$

Задачи и упражнения

4.1. Вычислите фундаментальную группу пространства ориентированных параллелограммов $\mathcal{P}^+$.

4.2. Вычислите фундаментальную группу дополнения в $\mathbb{C}^2$ к *полукубической параболе* – аффинной кривой, задаваемой уравнением $y^2 = x^3$.

4.3. Определите все стационарные группы действия $\mathbb{C}^\times \times \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ на $\mathcal{P}^+$.

4.4. Проверьте соотношения квазиоднородности численно.

4.5. Выпишите известные вам точно и приближённо значения величин $\mathrm{e}_{ab}(\tau)$.