10.10.25 / 10.11.6

Лекция 2 (4 октября 2010)

2.1. Об униформизации аффинных кривых

Сейчас мы взглянем на объекты, которыми занимались в предыдущей лекции, с одной из трансцендентных точек зрения. Слово *униформизация* в узком смысле означает описание *универсальной накрывающей*, а в широком – произвольную параметризацию.

2.1.0. Униформизация окружности. Определив окружность как аффинное многообразие "$x^2 + y^2 = 1$" над $\mathbb{R}$, мы идентифицируем её универсальную накрывающую с $\mathbb{R}$, а её саму – с фактором $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$; при этом на окружности обнаруживается групповая структура (явление для аффинных многообразий довольно редкое), а универсальное накрытие отождествляется с факторизацией

$$\mathbb{R} \longrightarrow \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}.$$

Изометрическая идентификация абстрактной группы $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ с вещественной кривой "$x^2 + y^2 = 1$" *определяет* две $2\pi\mathbb{Z}$-периодические функции

$$\mathbb{R} \longrightarrow "x^2 + y^2 = 1" : \phi \mapsto (\cos\phi, \sin\phi),$$

от рождения удовлетворяющие *основному тригонометрическому тождеству*

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi \equiv 1.$$

Мы будем обычно предпочитать записывать это (и подобные) тождество в виде *равенства*

$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$

считая cos и sin элементами подходящего *кольца.* Будет предложено несколько вариантов; годится, например, кольцо непрерывных вещественнозначных функций на прямой.

Годится и меньшее кольцо $2\pi\mathbb{Z}$-периодических функций; его определение на слово длиннее, зато оно относится к хорошо изученному классу *колец непрерывных функций на компактах.* Мы говорим о $2\pi\mathbb{Z}$-периодичности, а не о 2π-периодичности, поскольку *группы*, действующие на аргументы, фундаментальнее чисел.

Мы обсудили (тригонометрическую) униформизацию окружности с помощью двух замечательных трансцендентных функций, удовлетворяющих алгебраическому тождеству; в дальнейшем эта конструкция будет комплексифицироваться, варьироваться, проективизироваться и усложняться.

Косинус и синус были выше определены нами на основе фундаментальных понятий математики: инвариантных длин, сдвигов и поворотов. С помощью элементарных геометрии и анализа они разлагаются в известные ряды Тейлора; это позволяет считать косинус и синус элементами ещё двух колец: целых функций и формальных степенных рядов.

Сходимость рядов Тейлора косинуса и синуса такова, что они определяют *целые* функции комплексной переменной:

$$\cos, \sin \in \mathcal{O}[\mathbb{C}].$$

В силу *теоремы единственности* основное тригонометрическое тождество связывает косинус и синус и как целые функции; иначе говоря, косинус и синус униформизуют не только вещественную, но и комплексную окружность:

$$(\cos, \sin) : \mathbb{C} \longrightarrow "x^2 + y^2 = 1"(\mathbb{C}).$$

Начинающему этот образ может показаться недостаточно наглядным: комплексная окружность лежит в вещественно-четырёхмерном пространстве $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$. Однако над $\mathbb{C}$ мы можем воспользоваться разложением на множители многочлена

$$x^2 + y^2 = (x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})$$

и, ведя новые координаты $z_\pm := x \pm y\mathrm{i}$,[1] переписать рассматриваемое уравнение в виде

$$z_+ z_- = 1.$$

Так называемым "мнимым поворотом" мы превратили комплексную окружность в комплексную гиперболу. И чем же она, тоже лежащая в $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$, лучше? – может спросить начинающий. Тем, ответим мы, что её можно *очевидным образом* спроектировать на "ось абсцисс"

$$(z_+, z_-) \mapsto z_+,$$

осуществив её биекцию с *проколотой комплексной прямой*

$$\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

На самом деле эта проекция – бирегулярный изоморрфизм, но точного смысла этой фразе мы придать сейчас не можем, поскольку гипербола относится к классу определённых нами алгебраических многообразий, а проколотая прямая – пока ещё нет.

[1] несмотря на сходство обозначений с традиционными, здесь нет никаких вещественных или мнимых частей: всё комплексно

Так или иначе, мы отождествили комплексную окружность, комплексную гиперболу и проколотую комплексную прямую, причём последний объект является вполне наглядным.

Теперь, возвращаясь к *униформизующим* формулам

$$x = \cos\phi, y = \sin\phi,$$

где теперь $\phi \in \mathbb{C}$, получим

$$z_+ = x + y\mathrm{i} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi = e^{\mathrm{i}\phi};$$

мы имеем право распространить *формулу Эйлера* на комплексные значения аргумента ϕ по теореме единственности.

Подведём итог:
комплексифицируя униформизацию вещественной окружности синусом и косинусом, мы получаем униформизацию проколотой комплексной прямой экспонентой.

Переходя к формальным степенным рядам, отметим замечательный подарок природы: коэффициенты рядов Тейлора тригонометрических функций *рациональны.* Это позволяет принять новую точку зрения:

$$\cos, \sin \in \mathbb{Q}[[\phi]].$$

Формулы тригонометрии превращаются в серии бесконечных соотношений между рациональными числами! Предлагаем читателю упражнения 2.1 и 2.2.

До сих пор мы говорили о *тригонометрической* униформизации окружности. Есть ещё *рациональная* параметризация, основанная на известной из школьной математики *тангенс-подстановке* $t := \mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}$; она имеет вид

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$$

и рационально параметризует окружность "$x^2 + y^2 = 1$" над любым полем характеристики, отличной от 2.

Можно спросить, нельзя ли придумать какую-нибудь другую параметризацию, пригодную и в характеристике 2. Ответ отрицателен, поскольку в характеристике 2 имеет место тождество $x^2 + y^2 \equiv (x+y)^2$, и окружность превращается в сдвоенную прямую.

Применению рациональной параметризации окружности к арифметике посвящена задача 2.3.

2.1.1. Как обобщать тригонометрию? Хорошо известны про крайней мере четыре направления.

1) Найти другие аналитические функции или их коллективы, обладающие теоремами сложения:

2) заменить окружность на другие вещественные кривые;

3) отправляться от *обратных* тригонометрических функций, определив, например, в окрестности нуля

$$\arcsin \underline{u} := \int_0^{\underline{u}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}},$$

и изучать обобщения таких интегралов;

4) заменить группу сдвигов (вещественного или комплексного) аргумента $2\pi\mathbb{Z}$, относительно которой периодичны косинус и синус, на группу сдвигов (теперь уже обязательно *комплексного* аргумента) ранга 2 и изучить соответствующие так называемые *двояко-периодические* функции.

Все эти направления приводят к результатам, тесно связанным между собой; мы будем развивать в основном направления 3) и 4). Последнему из них посвящён следующий раздел, относительно же предпоследнего пока отметим лишь, что Эйлер и Гаусс добились блистательных успехов в изучении интегралов

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Введя аффинную кривую, заданную уравнением

$$v^2 = 1 - u^4,$$

мы запишем этот интеграл в менее двусмысленном (с комплексной точки зрения) виде

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{v}.$$

В списке интересующих нас кривых появилась ещё одна, и мы знаем, какой дифференциал хотим на ней интегрировать.

2.1.2. $\wp$-функция Вейерштрасса: первая встреча. Фиксируем дискретную подгруппу L ранга 2 в аддитивной группе $\mathbb{C}$; как это принято, будем называть её *решёткой* и понимать как группу *сдвигов*, действующую на $\mathbb{C}$.

Всюду в курсе будет использоваться обозначение

$$\dot{L} := L \setminus \{0\}.$$

Поставим вопрос об L-периодических функциях.

Поскольку по теореме Лиувилля целых непостоянных таких функций не существует, будем искать их в классе *целомероморфных* функций. Возникают две задачи:

- найти *хотя бы одну* такую функцию;
- описать множество *всех* таких функций.

Относительно второй из задач сразу сформулируем ответ

Множество L-периодических функций образует поле, изоморфное полю рациональных функций на некоторой комплексной кубике (*разумеется, зависящей от* L)

и отложим его обоснование на будущее.

Первой же мы займёмся прямо сейчас, отметив, что выражение "хотя бы одну" содержит некоторое преуменьшение: *производные* L-периодических функций тоже L-периодичны.

Поскольку полюса искомых функций неизбежны, попробуем сосредоточить их в самой решётке L. Тогда в качестве кандидатов на L-периодические функции бросаются в глаза ряды

$$S_k(z) := \sum_{\lambda \in L} \frac{1}{(z-\lambda)^k}$$

(обозначение временное) при натуральных достаточно больших k: сдвиг аргумента z на элемент решётки лишь переставляет слагаемые этой суммы, и остаётся решить вопрос о *сходимости* рядов S_k.

Эту сходимость можно понимать наивно: при $z \in L$ выражение для S_k лишено смысла, а при $z \notin L$ оно задаёт (при *разумной* нумерации точек решётки) последовательность комплексных чисел, которая должна сходиться в обычном смысле.

Напомним, однако, "профессиональное" определение сходимости рядов *мероморфных* функций – точнее, рядов некоторого специального класса, которые мы только и будем рассматривать в этом курсе. Во-первых, все члены рядов этого класса предполагаются рациональными функциями. Во-вторых, всем им разрешено иметь полюсы только в фиксированном дискретном подмножестве комплексной прямой (например, в точках решётки – возможно, сдвинутой). В-третьих, на любом компакте лишь конечному количеству членов разрешено иметь полюса.

Сходимость тоже определяется применительно к произвольному компакту в $\mathbb{C}$. Для каждого такого компакта в ряду имеется лишь конечное количество *сингулярных*, то есть имеющих на компакте полюса, членов; все эти члены складываются в фиксированную (то есть определённую компактом) рациональную функцию. Оставшиеся члены образуют ряд *голоморфных* на компакте функций, и от этого ряда требуется *абсолютная равномерная* сходимость – в частности, порядок суммирования несуществен, и законно почленное дифференцирование.

Легко проверяется, что описанную сходимость достаточно проверить для любой возрастающей системы компактов, объединение которых совпадает с $\mathbb{C}$.

Ряды S_k сходятся при $k \geq 3$ и, очевидно, при $k \geq 3$ каждый следующий пропорционален *производной* предыдущего: $S_k' = -kS_{k+1}$.

Первообразная же $L-$периодической мероморфной функции, если сама мероморфна (то есть однозначна), вообще говоря, обязана быть лишь *квазипериодичной*: для любой L-периодической f, если $F' = f$, то для каждой $\lambda \in L$ есть такая константа $C_\lambda \in \mathbb{C}$, что $F(z+\lambda) \equiv F(z) + C_\lambda$.

Если, однако, в этой ситуации f *нечётна*, то F тоже периодична: первообразная нечётной мероморфной функции *чётна*, и в соотношении квазипериодичности для $\lambda \in L \setminus 2L$ достаточно взять $z = -\frac{\lambda}{2}$, чтобы убедиться, что $C_\lambda = 0$; поскольку $\lambda \notin 2L$ порождают решётку L, то и все константы C_λ равны нулю.

Ряд S_3 задаёт нечётную функцию с нулевыми вычетами, поэтому функция

$$\underline{z} \mapsto \int_{z_0}^{\underline{z}} S_3(z)\mathrm{d}z$$

мероморфна и L-периодична.

Можно было бы подумать, что эта функция пропорциональна S_2. Однако ряд S_2 расходится, а сходится он же с поправочными членами

$$\sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}]$$

(обратите внимание на точку над $\dot{L}$! Во многих учебниках такие суммы обозначают Σ'). Этот подправленный ряд непериодичен: в его производной недостаёт одного слагаемого. Добавление этого слагаемого и приводит нас к цели: *$\wp$-функцией Вейерштрасса* называется

$$\wp_L(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}].$$

Она настолько замечательна, что для неё используется специальный типографский знак! Таких случаев во всей науке немного: $\int$ для интеграла, $\hbar$ для постоянной Планка и ещё несколько.

Вместо S_3 (обозначение для которой можно забыть) мы будем использовать пропорциональную ей функцию

$$\wp_L'(z) = -2 \sum_{\lambda \in L} \frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

Пары функций $(\wp_L, \wp'_L)$, зависящие от решёток L, будут для нас аналогами пары $(\cos, \sin)$, и остаётся понять, какие кривые они униформизуют.

Детали, связанные со сходимостью рассмотренных рядов, читателю предлагается проработать в упражнениях 2.4 - 2.6.

2.1.3. Дифференциальное уравнение Вейерштрасса. Как и в прошлом пункте, фиксируем решётку $L \subset \mathbb{C}$. Кроме того, нам понадобится круг D с центром в $0 \in \mathbb{C}$ – настолько маленький, что он не содержит других точек решётки,

$$D \bigcap \dot{L} = \emptyset.$$

Тогда функция $\wp_L$ разлагается в D в ряд Лорана:

$$\wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + c_0 + c_2 z^2 + c_4 z_4 + \dots \tag{0}$$

– мы, разумеется, учли *чётность* функции Вейерштрасса.

Далее, функция $z \mapsto \wp_l(z) - \frac{1}{z^2}$ продолжается до *голоморфной* в D; имеем

$$c_0 + c_2 z^2 + c_4 z_4 + \dots = \sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}]$$

и, подставляя $z = 0$, получаем $c_0 = 0$. Это позволяет переписать (0) в виде – здесь и далее мы опускаем указание на зависимость констант и функций от решётки L–

$$\wp \in \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + z^6 \mathcal{O}[D]. \tag{1}$$

Дифференцируем (1):

$$\wp' \in -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + z^5 \mathcal{O}[D]. \tag{2}$$

Возводим (2) в квадрат:

$$\wp'^2 \in \frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + z^2 \mathcal{O}[D]. \tag{3}$$

Возводим (1) в куб:

$$\wp^3 \in \frac{1}{z^6} + \frac{3a}{z^2} + 3b + z^2 \mathcal{O}[D]. \tag{4}$$

Вычисляя (3)-4(4), получаем

$$\wp'^2 - 4\wp^3 \in -\frac{20a}{z^2} - 28b + z^2\mathcal{O}[D]. \tag{5}$$

Ослабляя (1) до

$$\wp \in \frac{1}{z^2} + z^2\mathcal{O}[D], \tag{6}$$

вычисляем (5)+20a(6):

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a\wp \in -28b + z^2\mathcal{O}[D], \tag{7}$$

или

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a\wp + 28b \in +z^2\mathcal{O}[D]. \tag{8}$$

Согласно последнему соотношению, в его левой части стоит стоит голоморфная функция, обращающаяся в ноль при $z = 0$. Она периодична, поэтому обращается в ноль и во всех других точках решётки. Поскольку других полюсов у неё нет, она всюду регулярна и, следовательно, по теореме Лиувилля тождественно равна нулю.

Мы вывели *дифференциальное уравнение Вейерштрасса*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 20a\wp - 28b. \tag{$\mathrm{W}_{a,b}$}$$

2.1.4. Уравнение Кортевега-де Фриза. Выведенное уравнение оставляет один неприятный осадок – в него входят параметры a и b, которые мы в настоящий момент плохо понимаем. Они возникли как коэффициенты разложения бесконечной суммы дробей в ряд Лорана, и в настоящий момент мы даже не умеем их практически вычислять.

Один из способов этот остаток преодолеть – параметры истребить.

Дифференцируя уравнение Вейерштрасса, получаем

$$2\wp''\wp' = 12\wp'\wp^2 - 20a\wp'. \tag{$\mathrm{W}'_{a,b}$}$$

Деление на $2\wp'$ даёт

$$\wp'' = 6\wp^2 - 10a, \tag{$\frac{\mathrm{W}'_{a,b}}{2\wp'}$}$$

а ещё одно дифференцирование –

$$\wp''' = 12\wp\wp'. \tag{KdV}$$

Это и есть *стационарное уравнение Кортевега-де-Фриза*, возникшее в теории волн на мелкой воде и тщательно изученное, поскольку лежит в основе теории вполне интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений.

Итак, все $\wp$-функции, независимо от породивших их решёток, удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, причём замечательному!

2.1.5. Три решётки. Несмотря на неполное понимание параметров a, b в уравнении Вейерштрасса, мы уже можем идентифицировать кубические кривые, соответствующие двум симметричным решёткам и одной вырожденной. Речь, разумеется, идёт о *классах подобия* решёток.

Квадратные решётки – например, $L = \mathbb{Z}\mathrm{i} + \mathbb{Z}$– определяются свойством $\mathrm{i}L = L$ и, следовательно, $\mathrm{i}\dot{L} = \dot{L}$. Для таких решёток, применяя "суммирование с поворотом", получаем

$$\wp_L(\mathrm{i}z) = \frac{1}{(\mathrm{i}z)^2} + \sum_{\lambda\in\dot{L}}[\frac{1}{(\mathrm{i}z-\mathrm{i}\lambda)^2} - \frac{1}{(\mathrm{i}\lambda)^2}] = -\wp_L(z).$$

Из этого соотношения видно, что в разложении Лорана $\wp$-функции Вейерштрасса

$$\wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + \dots$$

все коэффициенты при степенях z, делящихся на 4, равны 0 и, в частности,

$$b = 0.$$

Уравнение Вейерштрасса принимает вид

$$\wp_L'^2 = 4\wp_L^3 - 20a\wp_L.$$

Заметим, что $a \neq 0$ – иначе $\wp_L$ удовлетворяла бы дифференциальному уравнению $w'(z) = \pm 2w(z)^{\frac{3}{2}}$, общее решение которого $w = \frac{1}{(z+C)^2}$ не периодично.

Возникает семейство кубик "$y^2 = 4x^3 - 20ax$"; они все бирегулярно изоморфны друг другу, поскольку заменой ($x \leftarrow \sqrt{5a}x, y \leftarrow 2 \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}}y$) каждая из них переводится в

$$"y^2 = x^3 - x".$$

Квадратность исходной решётки отражается в наличии автоморфизма 4-го порядка

$$(x, y) \mapsto (-x, \mathrm{i}y)$$

этой кубики.

Для анализа *правильных шестиугольных* решёток введём

$$\rho := e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

и рассмотрим решётки – например, $\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ – инвариантные относительно умножения на ρ.

Пусть L– правильная шестиугольная решётка. Суммирование с поворотом даёт

$$\wp_L(\rho z) = \frac{1}{(\rho z)^2} + \sum_{\lambda \in \dot{L}} [\frac{1}{(\rho z - \rho\lambda)^2}) - \frac{1}{(\rho\lambda)^2}] = \rho^{-2}\wp_L(z) = -\rho\wp_L(z).$$

Из этого соотношения следует, что ряд Лорана функции Вейерштрасса правильной шестиугольной решётки имеет вид

$$\wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{6j-2} z^{6j-2} = \frac{1}{z^2} + bz^4 + \dots,$$

то есть

$$a = 0.$$

Уравнение Вейерштрасса принимает вид

$$\wp_L'^2 = 4\wp_L^3 - 28b.$$

Снова возникает семейство кубик "$y^2 = 4x^3 - 28b$", которые снова бирегулярно изоморфны друг другу, поскольку переводятся преобразованиями $(x \leftarrow (7b)^{\frac{1}{3}}x, y \leftarrow 2\mathrm{i}\sqrt{7b}y)$ в кубику с уравнением

$$y^2 = 1 - x^3;$$

мы изменили знак, чтобы увидеть в этой кубике *обобщённую кривую Ферма* "$x^3 + y^2 = 1$" (см. ???). Правильность исходной решётки даёт автоморфизм

$$(x, y) \mapsto (\rho x, y).$$

Как мы убедились, двум симметричным решёткам соответствуют *трёхчленные* кубики: из 10 коэффициентов общей кубики, от которых зависело рассмотренное в предыдущей лекции общее уравнение кубики, сохранилось только 3. Трёхчленным кубикам посвящено упражнение 2.7.

Естественно поинтересоваться, изоморфны ли кубики "$y^2 = x - x^3$" и "$y^2 = 1 - x^3$". Ответ отрицателен, и обосновать его можно по крайней мере тремя способами: у них разные группы автоморфизмов; у них разные j-инварианты (будут введены); над полем комплексных чисел они соответствуют неподобным решёткам. Детали мы отсавляем на будущее.

Наконец, для вырожденной решётки $\mathbb{Z}$ мы проведём прямые вычисления.

$$\wp_{\mathbb{Z}}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \in \dot{\mathbb{Z}}} [\frac{1}{(z-n)^2} - \frac{1}{n^2}];$$

здесь сходимость имеет место и без поправочных членов, так что бесконечную сумму можно раскрыть, получая

$$\wp_{\mathbb{Z}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{\pi^2}{3}.$$

Когда одна из образующих решётки устремляется в бесконечность, $\wp$-функция вырождается в элементарную! Читатель может отвлечься от "высшей" математики, выполнив весьма нетривиальное упражнение 2.8.

Вычисляем

$$\wp'_{\mathbb{Z}}(z) = -\frac{2\pi^3 \cos(\pi z)}{\sin^3(\pi z)}$$

и
$$\wp'_{\mathbb{Z}}(z)^2=\frac{4\pi^6\cos^2(\pi z)}{\sin^6(\pi z)}.$$
Для нахождения параметров a и b надо представить правую часть этого выражения как кубический многочлен от $\wp_{\mathbb{Z}}$:
$$\wp'_{\mathbb{Z}}(z)^2=\frac{4\pi^6\cos^2(\pi z)}{\sin^6(\pi z)}=\frac{4\pi^6[1-\sin^2(\pi z)]}{\sin^6(\pi z)}=\frac{4\pi^6}{\sin^6(\pi z)}-\frac{4\pi^6}{\sin^4(\pi z)}.$$
Иначе говоря,
$$\wp'^2_{\mathbb{Z}}=4(\wp_{\mathbb{Z}}+\frac{\pi^2}{3})^3-4\pi^2(\wp_{\mathbb{Z}}+\frac{\pi^2}{3})^2=4(\wp_{\mathbb{Z}}+\frac{\pi^2}{3})^2(\wp_{\mathbb{Z}}-\frac{2\pi^2}{3})=$$
$$=4\wp^3_{\mathbb{Z}}-\frac{4\pi^4}{3}\wp_{\mathbb{Z}}-\frac{8\pi^6}{27}.$$
В (несложном) упражнении 2.9 читателю предлагается установить, что *только* вырожденные решётки определяют параметры a,b уравнения Вейерштрасса $\mathrm{W}_{a,b}$, задающие в его правой части кубический многочлен с кратными корнями.

Этот факт позволяет предположить, что *дискриминант* кубического многочлена $4x^3-20ax-28b$ – замечательная функция на множестве решёток. В дальнейшем так оно и окажется.

2.1.6. Униформизация аффинных кубик. Остаётся убедиться в том, что для любой невырожденной решётки L отображение
$$(\wp_L,\wp'_L):\mathbb{C}\setminus L\longrightarrow\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$$
действительно определяет биекцию проколотого тора на аффинную кубику, определяемую многократно выписанным уравнением.

Воспользуемся конструкцией, упоминаемой в упражнении 2.4: выберем в решётке L образующие π_1,π_2, так что $L=\mathbb{Z}\pi_1+\mathbb{Z}\pi_2$, и введём *фундаментальный параллелограмм*
$$\Pi:=\{t_1\pi_1+t_2\pi_2|t_{1,2}\in\mathbb{R},-\frac{1}{2}\le t_{1,2}\le\frac{1}{2}\}.$$

Будем считать, что противоположные стороны этого параллелограмма отождествлены сдвигами на π_1 и π_2, и введём ещё обозначение

$$\dot{\Pi} := \Pi \setminus \{0\}.$$

Достаточно проверить, что *с учётом кратностей* функция $\wp_L$ принимает каждое своё значение в $\dot{\Pi}$ ровно дважды: в *противоположных* точках. Биективность рассматриваемого отображения следует из этого свойства $\wp_L$ в силу *нечётности* $\wp'_L$.

Слова "с учётом кратностей" не требуют никаких пояснений вне середин сторон и вершин параллелограмма Π: для $z_1, z_2 \in \dot{\Pi} \setminus \frac{1}{2}L$ импликацию

$$\wp_L(z_1) = \wp_L(z_2) \Longrightarrow z_1 = \pm z_2$$

читателю предлагается установить в упражнении 2.10 с помощью стандартного интегрального трюка.

В случае же $z_1 \in \dot{\Pi} \bigcap \frac{1}{2}L$ слова "с учётом кратностей" означают

$$\wp_L^{-1\circ}[\wp_L(z_1)] = \{z_1\} \text{ и } \wp'_L(z_1) = 0.$$

Это устанавливается по существу так же, как в общем случае.

Построенную униформизацию проколотых торов надо понимать, конечно, в широком смысле: из $\mathbb{C}$ нам пришлось выбрасывать решётки, и универсальных накрытий мы не построили. Чтобы заклеить проколы, нам надо перейти к *проективной* геометрии – чем мы и займёмся сразу после заключительных замечаний.

2.1.7. Об униформизации других аффинных кривых. Весьма немногие комплексные кривые допускают явную униформизацию с помощью хорошо изученных функций. В дальнейшем мы также подробно, как униформизовали плоские кубики, униформизуем кривые "$v^2 = F_4(u)$", где F_4 – многочлен степени 4 без кратных корней; особое внимание будет уделено уже упоминавшейся обобщённой кривой Ферма $v^2 = 1 - u^4$, изученной Эйлером и Гауссом.

В связи с изучением *длины дуги лемнискаты* Гаусс ввёл "испорченную окружность", задаваемую уравнением

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1,$$

и униформизовал её парой целомероморфных функций $(\mathrm{cl}, \mathrm{sl})$, именуемых *лемнискатическими косинусом и синусом.* Гаусса особенно вдохновляли аналогии с обычными синусом и косинусом; так, cl и sl периодичны относительно квадратной решётки

$$2\varpi(\mathbb{Z}\mathrm{i} + \mathbb{Z}),$$

где [2]

$$\frac{\varpi}{2} := \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Многократно *проколотые аффинные прямые* $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ отождествляются с аффинными кривыми с помощью того же приёма, с помощью которого мы отождествляли проколотую прямую $\dot{\mathbb{C}}$ с гиперболой. Униформизация этих кривых описывается с помощью некоторых линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых, впрочем, весьма трансцендентно зависят от проколов $a_1, \ldots, a_n$.

Наконец, в терминах *модулярных форм* описывается униформизация *модулярных кривых.* Это – класс весьма специальных арифметических кривых, составляющий предмет отдельной огромной науки.

2.2. Проективные многообразия: общие места

Как уже несколько раз упоминалось, аффинная алгебраическая геометрия *неполна*: точки и другие части многообразий "ускользают на бесконечность", группы автоморфизмов меньше правильных (например, разрешимы, вместо того чтобы быть редуктивными) и т.п.

В этом разделе мы кратко и по возможности элементарно введём основные понятия и результаты проективной алгебраической геометрии.

Как и выше, $\Bbbk$ – основное поле, которое после самых первых определений будет предполагаться *алгебраически замкнутым.*

[2]следует иметь в виду, что буква ϖ (в TeXe \varpi) в 18-м веке широко употреблялась как альтернативное написание буквы π

2.2.0. Проективные пространства. Пусть $n \in \dot{\mathbb{N}}$, а V–$(n+1)$-мерное векторное пространство над $\Bbbk$.

Введём обозначение
$$\dot{V} := V \setminus \{0\}$$
и будем рассматривать это множество под действием мультипликативной группы $\Bbbk^\times$ основного поля (это действие входящит в определение векторного пространства над $\Bbbk$).

По определению, *проективизацией* векторного пространства V называется *множество*
$$\mathbb{P}(V) := \frac{\dot{V}}{\Bbbk^\times}.$$
В случае $V = \Bbbk^{n+1}$ применяется (основное для дальнейшего) обозначение
$$\mathbb{P}_n(\Bbbk) := \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1}) = \frac{\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}}{\Bbbk^\times}.$$
На каждом проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ "от рождения"действует группа
$$\mathsf{PGL}(V) := \frac{\mathsf{GL}(V)}{\Bbbk^\times},$$
где группа $\Bbbk^\times$ вложена в $\mathsf{GL}(V)$ как группа скалярных преобразований. В случае $V = \Bbbk^{n+1}$ она обозначается
$$\mathsf{PGL}_n(\Bbbk) := \frac{\mathsf{GL}_{n+1}(\Bbbk)}{\Bbbk^\times}.$$
В обоих случаях она называется *проективной группой*, а объекты, переводимые этой группой друг в друга – *проективно эквивалентными.*

Упомянем ещё *пространства форм.* Мы пока встретились с ними в виде 5-мерного проективного *пространства коник* с координатами $(A : B : C : D : E : F)$ и 9-мерного проективного *пространства кубик* с координатами $(a : b : \cdots : j)$. Эти пространства и их обобщения заслуживают тщательного изучения, мы же пока ограничимся упоминанием того, то на этих $\mathbb{P}_5(\Bbbk)$ м $\mathbb{P}_9(\Bbbk)$ замены координат на плоскости определяют действие группы $\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)$.

2.2.1. Связи между аффинными и проективными пространствами. Эти связи двояки.

С одной стороны, введём в $\mathbb{A}_{n+1}(\Bbbk)$ координаты $(X_0, \ldots, X_n)$; по определению имеется отображение факторизации

$$\mathbb{A}_{n+1}(\Bbbk) \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbb{P}_n(\Bbbk) : (X_0, \ldots, X_n) \mapsto (X_0 : ... : X_n);$$

выражения $(X_0 : ...X_n)$ называются *однородными координатами* на $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$. Они определены при $(X_0, \ldots, X_n) \neq (0, \ldots, 0)$, причём $(\lambda X_0 : ...\lambda X_n) = (X_0 : ... : X_n)$ при любом $\lambda \in \Bbbk^\times$. Мы будем стараться избегать нумерации и, скажем, при $n = 2$ пользоваться координатами $(X, Y, Z) \mapsto (X : Y : Z)$.

С другой стороны, введём в $\mathbb{A}_n(\Bbbk)$ координаты $(x_1, \ldots, x_n)$; имеется $n+1$ вложение аффинного пространства в проективное $\mathbb{A}_n(\Bbbk) \hookrightarrow \mathbb{P}_n(\Bbbk)$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : x_2 : ... : x_{n-1} : x_n),$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 : 1 : x_2 : ... : x_{n-1} : x_n),$$

$$\ldots$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 : x_2 : ... : x_{n-1} : 1 : x_n),$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 : x_2 : ... : x_{n-1} : x_n : 1).$$

Эти вложения мы никак не обозначаем, а их образы называем *аффинными картами* и обозначаем $"X_0 \neq 0", "X_1 \neq 0", \ldots, "X_n \neq 0"$. Одно из основных средств работы с проективными пространствами – использование стандартных атласов

$$\mathbb{P}_n(\Bbbk) = \bigcup_{k=0}^{n} "X_k \neq 0".$$

Отождествление карт стандартного атласа с аффинными пространствами происходит по формулам

$$"X_0 \neq 0" \longrightarrow \mathbb{A}_n(\Bbbk) : (X_0 : X_1 : ... : X_n) \mapsto (\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0})$$

и т.п. В случае $n = 2$ мы будем стараться пользоваться однородными координатами $(X : Y : Z)$ и работать в карте $Z \neq 0$ с аффинными координатами $(x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z})$.

Проективную прямую принято представлять себе как

$$\mathbb{P}_1(\Bbbk) \cong \mathbb{A}_1(\Bbbk) \coprod \{\underline{\infty}\};$$

если в $\mathbb{P}_1(\Bbbk)$ введены однородные координаты $(X : Y)$, то $\mathbb{A}_1(\Bbbk)$ отождествляется с картой "$Y \neq 0$", в которой действует координата $\frac{X}{Y}$, а "бесконечной" считается точка $(1 : 0)$. В случае $\Bbbk = \mathbb{C}$ проективная прямая называется также *римановой сферой.*

Проективную плоскость принято представлять себе как

$$\mathbb{P}_2(\Bbbk) \cong \mathbb{A}_2(\Bbbk) \coprod \mathbb{P}_1(\Bbbk);$$

если в $\mathbb{P}_2(\Bbbk)$ введены однородные координаты $(X : Y : Z)$, то $\mathbb{A}_2(\Bbbk)$ отождествляется с картой "$Z \neq 0$", в которой действуют координаты $(x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z})$, а "бесконечная прямая", интерпретируемая как множество *классов параллельности прямых* в $\mathbb{A}_2(\Bbbk)$, состоит из точек $(X : Y : 0)$.

В случаях $\Bbbk = \mathbb{R}$ и $\Bbbk = \mathbb{C}$, проективные плоскости $\mathbb{P}_2(\Bbbk)$, наделённые *классической* топологией, обладают интересными свойствами. Вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ представляет собой простейшую *компактную неориентируемую поверхность.* Комплексная проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ является образующей *кольца ориентированных кобордизмов*; это – простейшее компактное ориентируемое вещественное четырёхмерное многообразие, не являющееся *краем* никакого компактного пятимерного гладкого многообразия с краем.

Аналоги описанных разложений существуют и в высших размерностях:

$$\mathbb{P}_3(\Bbbk) \cong \mathbb{A}_3(\Bbbk) \coprod \mathbb{P}_2(\Bbbk) \cong \mathbb{A}_3(\Bbbk) \coprod \mathbb{A}_2(\Bbbk) \coprod \mathbb{A}_1(\Bbbk) \coprod \{\infty\},$$

$$\ldots,$$

$$\mathbb{P}_n(\Bbbk) \cong \mathbb{A}_n(\Bbbk) \coprod \mathbb{P}_{n-1}(\Bbbk) \cong \ldots \cong \mathbb{A}_n(\Bbbk) \coprod \mathbb{A}_{n-1}(\Bbbk) \coprod \cdots \coprod \mathbb{A}_1(\Bbbk) \coprod \{\infty\}.$$

Над $\Bbbk = \mathbb{R}$ и $\Bbbk = \mathbb{C}$ эти разложения задают *клеточные разбиения* проективных пространств.

2.2.2. Определение проективных многообразий. Самое простое определение по существу дублирует определение аффинных многообразий: *проективным многообразием* можно назвать *множество решений системы* *однородных* *полиномиальных уравнений*

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ \quad\ldots \\ F_m = 0, \end{cases}$$

где $F_1, \ldots, F_m \in \Bbbk[X_0, \ldots, X_n]_{\mathrm{homo}}$. Разумеется, решения понимаются как наборы *однородных* координат точек проективного пространства.

В некоторых учебниках то, что мы назвали проективным многообразием, называется *проективным множеством*, а многообразиями называют *достаточно хорошие* проективные множества – неприводимые или даже гладкие [3]. Мы, однако, предпочли не утяжелять определения основных понятий.

Объяснённые выше связи между аффинными и проективными пространствами распространяются и на многообразия.

Во-первых, каждое проективное многообразие в $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$ является по определению *проективизацией* аффинного многообразия в $\mathbb{A}_{n+1}(\Bbbk)$, заданного "теми же самыми" *однородными* уравнениями. При этом подходе проективная алгебраическая геометрия оказывается частью аффинной, в которой рассматриваются только системы однородных полиномиальных уравнений – но нулевое решение игнорируется, а ненулевые учитываются с точностью до пропорциональности, целыми прямыми – и мы можем без лишних слов распространить на проективную геометрию понятия равносильности систем уравнений, решения в расширении основного поля и т.п. Самый классический пример проективизации – прямой круговой конус

$$"X^2 + Y^2 = Z^2"$$

[3] в английском языке слову "многообразие" соответствует два слова: *variety* и *manifold*, и гладкость иногда связывают со вторым из них

в $\mathbb{A}_3(\Bbbk)$, проектирующийся в заданную тем же уравнением конику в $\mathbb{P}_2(\Bbbk)$. Вещественно топологический смысл этой проекции при $\Bbbk = \mathbb{R}$ читателю предлагается прояснить в упражнении 2.11.

Во-вторых, каждое аффинное многообразие в $\mathbb{A}_n(\Bbbk)$ допускает *проективное замыкание* в $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$. Именно так мы ловим части аффинных многообразий, ускользнувшие на бесконечность – начиная с нахождения точки пересечения прямых, которые на аффинной плоскости кажутся *параллельными*! Конструкция заключается в том, что уравнению степени d вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

в $\mathbb{A}_n(\Bbbk)$ сопоставляется уравнение

$$X_0^d f(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}) = 0$$

в $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$. Разумеется, можно пользоваться и другими картами – тогда вместо X_0 будут задействованы другие координаты из списка $X_1, \ldots, X_n$.

Простой пример проективного замыкания читателю предлагается разобрать в упражнении 2.12.

2.2.3. Топология Зариского, неприводимость, размерность(1). Если в аффинной геометрии топология Зариского могла показаться не очень нужным украшением алгебраических структур, то в проективной, как мы сейчас увидим, эта топология позволяет сильно сократить формулировки.

Прежде всего надо определить топологию Зариского на самих проективных пространствах $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$. Это можно сделать тремя равносильными способами.

• Так же, как и в аффинном случае, объявить проективные подмногообразия *замкнутыми* подмножествами – единственное отличие будет заключаться в том, что в n-мерном пространстве над алгебраически замкнутым полем для задания *пустого множества* необходимо по меньшей мере $n+1$ уравнение;

• ввести на $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$ *сильнейшую* топологию, относительно которой проектирование $\mathbb{A}_{n=1}(\Bbbk) \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbb{P}_n(\Bbbk)$ *непрерывно*;

• определить *системы окрестностей* точек проективного пространства с помощью *аффинных карт*, на которых топология Зариского уже определена.

В упражнении 2.13 читателю предлагается установить равносильность этих определений.

Далее все проективные многообразия – если не оговорено противное – предполагаются снабжёнными топологией, индуцированной топологией Зариского проективных пространств. Эта топология, как уже отмечалось, весьма неклассична, и её необычными свойствами мы сейчас воспользуемся.

Топологическое пространство называется *нётеровым*, если любая убывающая цепочка его замкнутых подмножеств обрывается.

Нётеровость проективных пространств читателю предлагается доказать в упражнении 2.14.

Нётеровость очевидным образом наследуется при переходе к замкнутым подпространствам, так что все проективные многообразия тоже нётеровы.

Топологическое пространство называется *неприводимым*, если оно не представимо в виде нетривиального объединения своих замкнутых подпространств. Сравните с определением неприводимости аффинного многообразия из лекции 1.

Некоторые свойства неприводимых пространств читателю предлагается проверить в упражнении 2.15, а установить неприводимость проективных пространств – в упражнении 2.16.

Будем считать очевидным, что

ЛЮБОЕ НЁТЕРОВО ПРОСТРАНСТВО ОДНОЗНАЧНО ПРЕДСТА-

ВИМО В ВИДЕ КОНЕЧНОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ СВОИХ НЕПРИВОДИМЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ, ПОПАРНО НЕ СОДЕРЖАЩИХ ДРУГ ДРУГА.

В дальнейшем эти подпространства будут называться *неприводимыми компонентами* нётерова пространства – и, в частности, проективного многообразия.

Мы готовы дать определение *размерности* нётеровых пространств – и, в частности, проективных многообразий. Это определение состоит из двух частей.

• Размерностью *неприводимого* нётерова пространства называется максимально возможное количество включений в убывающих цепочках его неприводимых непустых подпространств.

• Размерностью *произвольного* нётерова пространства называется максимальная размерность его неприводимых компонент.

Если вернуться к размерностям *проективных многообразий*, то окажется, что на данной стадии мы можем уверенно вычислить лишь размерность *точки* – она равна нулю, поскольку ещё от Евклида мы знаем, что *точка частей не имеет.* Можем также *оценить снизу* размерность проективного пространства $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$: она равна по крайней мере n, поскольку $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$ содержит цепочку неприводимых подпространств с n включениями – например,

$$\mathbb{P}_3(\Bbbk) \supset \{(X_0 : X_1 : X_2 : 0)\} \supset \{(X_0 : X_1 : 0 : 0)\} \supset \{(1 : 0 : 0 : 0)\}.$$

Однако мы пока не можем установить отсутствие более длинных цепочек – для этого нам нужно свободно владеть *подпространствами* проективных пространств, а мы ими овладеем только в последующих лекциях.

2.2.4. Предмет нашего интереса. Как ни скромны наши достижения в построении оснований алгебраической геометрии, мы уже можем указать основной класс объектов, которые будем изучать. Это –

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ.

Без *приводимых* многообразий в алгебраической геометрии обойтись нельзя; у нас они, однако, будут обычно встречаться как вырожденные члены семейств неприводимых многообразий – как, например, объединения прямых среди неприводимых коник.

Нульмерные неприводимые многообразия суть *точки*. Одномерные неприводимые многообразия называются *кривыми*; ими мы в основном и будем заниматься. Двумерные неприводимые многообразия называются *поверхностями*; в нашем курсе нечто будет сказано и о них.

Остальные многообразия называются *многообразиями высших размерностей* [4]; в нашем курсе будут встречаться лишь весьма специальные из них – проективные пространства и их произведения, грассманианы, абелевы многообразия и пространства модулей.

2.2.5. Предварительная постановка задач классификации. При фиксированном основном поле $\Bbbk$ на *множестве* интересующих нас объектов определены ТРИ отношения эквивалентности. каждое из которых грубее предыдущего: *проективная, бирегулярная, бирациональная* эквивалентности.

Из них проективная определена безупречно, бирегулярную мы сможем определить после того, как введём *морфизмы* проективных многообразий, а бирациональная почти определена – точнее, можно будет использовать определение из предыдущей лекции, как только мы докажем, что все поля рациональных функций на аффинных открытых множествах неприводимых проективных многообразий изоморфны.

Задача классификации заключается в описании *фактор-множеств* по указанном отношениям эквивалентности. Будучи сформулирована именно в таком наивном виде, она вряд ли разрешима.

Однако иногда удаётся выделить такие наборы *дискретных инвариантов* неприводимых проективных многообразий, что классы эквивалентности многообразий с заданными наборами инвариантов *параметризуются* – с некоторыми оговорками – алгебраическими многообразиями

[4] специалисты также иногда называют трёхмерные многообразия *телами*

(обычно принадлежащими к более широким классам, чем рассмотренные нами до сих пор).

Такие параметризации и будут в центре нашего внимания; трансцендентные методы – прежде всего, при *определении* инвариантов – окажутся незаменимыми.

2.3. Примеры проективных многообразий

Мы вернёмся к аффинным многообразиям, рассмотренным в первой лекции, и изучим их проективные замыкания.

2.3.1. И снова квадрики. Теперь все квадрики будут проективными и будут задаваться в $\mathbb{P}_n(\Bbbk)$ уравнениями

$$\sum_{i,j=0}^{n} q_{ij}X_iX_j = 0$$

или, в матричной форме,

$$(X_0 \ldots X_n)\begin{pmatrix} q_{00} & \ldots & q_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n0} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix} = 0,$$

где $Q = \begin{pmatrix} q_{00} & \ldots & q_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n0} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix}$ – ненулевая симметрическая матрица. Замена $\vec{X} \leftarrow C\vec{X}$ с любой невырожденной $(n+1)\times(n+1)$-матрицей C равносильна замене $Q \leftarrow C^*QC$, и над алгебраически замкнутым полем любая матрица приводится такими преобразованиями к диагональному виду, где на диагонали стоят только единицы и нули. Таким образом, единственным инвариантом проективной квадрики в n-мерном пространстве является её *ранг*, и любая квадрика ранга r может быть задана уравнением

$$X_0^2 + \cdots + X_r^2 = 0;$$

заметьте, что аргументы – возможно, частично невидимые – суть *все* координаты $(X_0 : ... : X_r : ... : X_n)$!

Теория проективных квадрик проще, чем теория аффинных: например, на аффинной плоскости пара пересекающихся прямых и пара параллельных прямых – разные аффинные многообразия, а с проективной точки зрения и то, и другое – квадрики ранга 1.

Иногда уравнения коник удобно записывать и в других видах, отличных от сумм квадратов. Например, квадрику максимального ранга 4 в $\mathbb{P}_3(\Bbbk)$ можно задать в виде $X_0X_3 = X_1X_2$, чтобы представить её как образ простейшего *отображения Сегре*

$$\mathbb{P}_1(\Bbbk) \times \mathbb{P}_1(\Bbbk) \to \mathbb{P}_3(\Bbbk) : ((Y_0 : Y_1), (Z_0 : Z_1)) \mapsto (Y_0Z_0 : Y_0Z_1 : Y_1Z_0 : Y_1Z_1).$$

Морфизмы проективных многообразий в нашем курсе ещё не определены, так что отображение Сегре следует понимать теоретико-множественно. С его помощью читателю предлагается решить задачу 2.17.

2.3.2. И снова рациональная нормальная кривая. В предыдущей лекции эта кривая задавалась параметрически как

$$\{(x, y, z) = (t, t^2, t^3) | t \in \Bbbk\}$$

и отмечалось, что эта кривая удовлетворяет очевидной системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y & (1) \\ xy = z & (2) \\ xz = y^2. & (3) \end{cases}$$

Про параметризацию мы сейчас забудем, а уравнения проективизируем. Введя в $\mathbb{P}_3(\Bbbk)$ однородные координаты $(W : X : Y : Z)$, положив

$$x = \frac{X}{W}, y = \frac{Y}{W}, z = \frac{Z}{W}$$

и умножив уравнения (1),(2),(3) на W^2, получим пересечение трёх проективных квадрик:

$$\begin{cases} X^2 = WY & (4) \\ XY = WZ & (5) \\ XZ = Y^2. & (6) \end{cases}$$

Что изменилось по сравнению с аффинной картиной? На "бесконечной плоскости", которая задаётся уравнением $W = 0$, лежит всего одна точка $(W : X : Y : Z) = (0 : 0 : 0 : 1)$. Однако в аффинном пространстве (3) следует из (1)$\wedge$(2), а в проективном (6) *не* следует из (4)$\wedge$(5), поскольку системе (4)$\wedge$(5) удовлетворяет *лежащая на "бесконечной" плоскости* прямая "$X = W = 0$".

На самом деле *каждой* паре уравнений системы (4)$\wedge$(5)$\wedge$(6) удовлетворяет некоторая прямая: системе (4)$\wedge$(5) удовлетворяет "$X = Y = 0$", а системе (5)$\wedge$(6) – "$Y = Z = 0$".

Это не случайно! В проективном пространстве господствует *теория пересечений,* согласно которой две поверхности степени 2 должны пересекаться по кривой степени $2 \cdot 2 = 4$; поскольку рациональная нормальная кривая имеет степень 3, недостающая степень добирается прямой. В аффинной геометрии нет ничего похожего: возможны "ускользания на бесконечность", которые мы упоминали выше и пример которого сейчас рассмотрели.

Рациональная нормальная кривая в $\mathbb{P}_3(\Bbbk)$ – простейший пример кривой в трёхмерном пространстве, которая *не может быть задана двумя уравнениями*; проработать детали предоставляется читателю в упражнении 2.18.

Рассмотренный пример показывает, что теория размерности проективных многообразий, которую мы начали строить в этой лекции, существенно сложнее теории линейных объектов. *Принцип коразмерности,* который, скажем, в трёхмерном пространстве (как аффинном, так и проективном), гласит "плоскость задаётся одним уравнением, а прямая – двумя", для нелинейных многообразий не работает.

2.3.3. И снова плоские кубики. Проективизация общей кубики в обозначениях предыдущей лекции имеет вид

$$\begin{gathered} aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 + \\ + eX^2Z + fXYZ + gY^2Z + \\ + hXZ^2 + iYZ^2 + \\ + jZ^3 = 0. \end{gathered} \tag{0}$$

Потребуем, чтобы кубика *не содержала прямых*, и поставим перед собой ту же задачу, что ставили для аффинных кубик – найти удобные координаты.

В аффинном случае мы потерпели два фиаско – полное и частичное, пытаясь взять за координатную ось сначала прямую перегиба, а потом асимптоту. На проективной же плоскости мы эти подходы объединим. Дело в том, что если прямая на "конечной" части проективной плоскости не пересекается с кубикой, то она пересекается с ней "на бесконечности", причём трёхкратно; это означает, что "бесконечная прямая" и есть прямая перегиба.

Итак, пусть "$Z = 0$" – прямая перегиба. Решим ещё, что точка перегиба имеет координаты (0:1:0) – это означает, что она соответствует *вертикальному* направлению на традиционной аффинной плоскости $\{(x : y : 1)\}$.

Подстановка $Z = 0$ в уравнение (0) должна иметь единственный трёхкратный корень $X = 0$. Отсюда следует, что $b = c = d = 0$ и что $a \neq 0$; поскольку коэффициенты определены с точностью до общей пропорциональности, примем $a = 1$. Уравнение (0) превращается в

$$X^3 + eX^2Z + fXYZ + gY^2Z + hXZ^2 + iYZ^2 + jZ^3 = 0; \qquad (1)$$

бесконечная прямая и бесконечная точка останутся фиксированными, и удобно обратно перейти к аффинным координатам

$$x^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0. \qquad (2)$$

Если $g = 0$, то $(f, i) \neq (0, 0)$ – иначе уравнение (2) задаёт объединение трёх прямых. Поэтому в случае $g = 0$ уравнение (2) разрешимо относительно y и потому задаёт *график* кубической рациональной функции. Этот случай мы не можем исключить, и он войдёт в окончательную формулировку.

Если же $g \neq 0$, то масштабным преобразованием $y \leftarrow ky$ мы можем добиться $g = -1$. Получаем очередной вид уравнения

$$x^3 + ex^2 + fxy - y^2 + hx + iy + j = 0. \qquad (3)$$

Теперь следует потребовать $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ – иначе уравнение (3) уже существенно не упрощается. Следующая замена $y \leftarrow y + \frac{f}{2}x$ обращает в 0 коэффициент при xy; получаем

$$x^3 + ex^2 - y^2 + hx + iy + j = 0, \tag{4}$$

или

$$y^2 - iy = x^3 + ex^2 + hx + j = 0. \tag{5}$$

Теперь дополнительно потребуем $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 3$ и заменами

$$x \leftarrow x - \frac{e}{3}, y \leftarrow y + \frac{i}{2}$$

приведём, наконец, наше уравнение к окончательному виду

$$y^2 = x^3 + hx + j = 0, \tag{6}$$

который будет называться *обобщённой вейерштрассовой формой* (уравнения плоской аффинной кубики). Слово "обобщённая" часто будет опускаться, буквы варьироваться, а уравнение допускать незначительные вариации вроде умножения на 4.

Нами установлен следующий результат.

В случае, когда характеристика основного поля отлична от 2*и* 3*, любая проективная плоская кубика, не содержащая прямых, проективно эквивалентна проективному замыканию либо графика рациональной функции, либо аффинной кубики в обобщённой вейерштрассовой форме.*

В упражнении 2.19 читателю предлагается разобрать простой, но важный пример.

2.3.4. Снова пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}_3$. В отличие от случая рациональной нормальной кривой, здесь мы рассматриваем *общие* пересечения: квадрики *не* должны иметь общих прямых. Кроме того, исключим из рассмотрения случай *объединения плоских коник*, возникающий, когда одна из квадрик распадается в объединение плоскостей.

Как мы убедимся в дальнейшем, любое такое пересечение бирегулярно изоморфно плоской кубике, и наоборот – в этом и предыдущем пункте рассматриваются разные *формы существования* одних и тех же кривых, а именно, кривых рода 1.

Мы воспользуемся чуть более сильным, чем ранее, результатом из стандартного курса линейной алгебры: *любые две квадратичные формы подходящим преобразованием могут быть диагонализованы одновременно.* Это позволяет нам сразу ограничиться рассмотрением систем

$$\begin{cases} \alpha W^2 + \beta X^2 + \gamma Y^2 + \delta Z^2 = 0 & (1) \\ aW^2 + bX^2 + cY^2 + dZ^2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Согласно одному из наложенных ограничений, в каждом из уравнений по крайней мере три коэффициента отличны от нуля – иначе квадрики распались бы в объединение плоскостей. Далее, если бы в уравнениях (1) и (2) нулевыми были бы коэффициенты при одной и той же переменной – скажем, при W, т.е. $\alpha = a = 0$, то в пересечении рассматриваемых квадрик лежала бы прямая $\{(W : X_0 : Y_0 : Z_0) | W \in \Bbbk\}$, где $(X_0 : Y_0 : Z_0)$ – любая из точек, лежащих на пересечении коник "$\beta X^2 + \gamma Y^2 + \delta Z^2 = 0$" и "$bX^2 + cY^2 + dZ^2 = 0$". Поэтому в системе $(1) \wedge (2)$ задействованы все четыре переменные и, переходя при необходимости от уравнений (1) и (2) к их линейным комбинациям, мы можем считать, что все восемь коэффициентов $\alpha, \ldots, d$ системы отличны от нуля. Поэтому одну из квадратичных форм – скажем, задаваемую левой частью уравнения (1) – мы можем считать суммой четырёх квадратов. Мы пришли к системе

$$\begin{cases} W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 & (3) \\ aW^2 + bX^2 + cY^2 + dZ^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(abcd \neq 0).$$

Теперь условие отсутствия прямых на пересечении квадрик "$(3) \wedge (4)$" можно сформулировать просто:

набор коэффициентов (a, b, c, d) *не должен состоять из двух попарно равных коэффициентов.* Читателю предлагается убедиться в этом в упражнении 2.20.

Теперь систему (3) $\wedge$ (4) можно упрощать дальнейшими составлениями линейных комбинаций и перемасштабирований. Так, взяв за основу уравнения $d(3)-(4)$ и $c(3)-(4)$ – при необходимости, возможно, предварительно переименовав переменные, чтобы эти уравнения не совпали – можно прийти к системе

$$\begin{cases} X^2+Y^2=W^2 & (5) \\ pX^2+qZ^2=W^2 & (6) \end{cases}$$

$$(pq \neq 0).$$

В аффинных координатах $x=\frac{X}{W}, y=\frac{Y}{W}, z=\frac{Z}{W}$ эта система приобретает неожиданно наглядный вид

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & (7) \\ px^2+qz^2=1 & (8) \end{cases}$$

$$(pq \neq 0).$$

– оказывается, мы всё это время занимались пересечениями цилиндров с попарно "ортогональными"осями!

В ближайших лекциях мы изучим трансцендентную униформизацию этих кривых.

Подчеркнём, что, хотя в некоторых рассмотренных примерах мы и заканчивали *аффинными* многообразиями (даже подключая *вещественные* "картинки"), в процессе работы мы всегда существенно использовали *проективную* геометрию

Задачи и упражнения

2.1. Докажите основное тригонометрическое тождество для $\cos, \sin \in \mathbb{Q}[[\phi]]$. СОВЕТ. Найдите *несколько* доказательств. а) Введите дифференцирование в кольце $\mathbb{Q}[[\phi]]$. б) Вложите кольцо $\mathbb{Q}[[\phi]]$ в его квадратичное расширение $\mathbb{Q}(\mathrm{i})[[\phi]]$ и воспользуйтесь формулой Эйлера. в) Докажите в $\mathbb{Q}[[\phi]]$ равенства $\cos^2\phi = \frac{1+\cos(2\phi)}{2}$ и $\sin^2\phi = \frac{1-\cos(2\phi)}{2}$. г)...

2.2. Напишите и докажите в кольце $\mathbb{Q}[[\phi,\psi]]$ формулы сложения для синуса и косинуса.

2.3. Пользуясь рациональной параметризацией окружности, найдите все рациональные точки на ней, то есть опишите множество "x^2+y^2"$(\mathbb{Q})$. Примените полученный результат к одной из древнейших задач математики: опишите все *пифагоровы тройки*, то есть решения уравнения $a^2+b^2=c^2$ в *натуральных* числах.

2.4. Выберем в решётке L образующие π_1, π_2, теперь $L=\mathbb{Z}\pi_1+\mathbb{Z}\pi_2$; введём *фундаментальный параллелограмм*

$$\Pi := \{t_1\pi_1+t_2\pi_2 | t_{1,2}\in\mathbb{R}, -\frac{1}{2}\leq t_{1,2}\leq\frac{1}{2}\}.$$

Покажите, что все ненулевые точки решётки L лежат на границах параллелограмма Π, растянутого в 2,4,6,... раз,

$$\dot{L}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial(2n\Pi),$$

и что это позволяет записать суммы S_k в виде

$$S_k(z)=\frac{1}{z^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda\in L\cap\partial(2n\Pi)}\frac{1}{(z-\lambda)^k}.$$

Теперь в качестве системы компактов, входящих в приведенное в лекции определение сходимости рядов мероморфных функций, возьмите компакты $2N\Pi$ с $N\in\dot{\mathbb{N}}$. Покажите, что для каждого N разложение суммы на сингулярную и регулярную части имеет вид

$$S_k(z)=\sum_{\lambda\in L\cap 2N\pi}\frac{1}{(z-\lambda)^k}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{\lambda\in L\cap\partial(2n\Pi)}\frac{1}{(z-\lambda)^k}.$$

Введя $\delta:=\min_{z\in\partial\Pi}|z|$, оцените модули слагаемых регулярной части как

$$|\sum_{\lambda\in L\cap\partial(2n\Pi)}\frac{1}{(z-\lambda)^k}|<\frac{8n}{[2(n-N)\delta]^k}=\frac{1}{2^{k-3}\delta^k}\frac{1}{1-\frac{N}{n}}\frac{1}{(n-N)^{k-1}}$$

и выведите из этой оценки сходимость S_k при $k\geq 3$.

2.5. В обозначениях предыдущей задачи, разложив $\wp_L$ в параллелограмме $2N\Pi$ на сингулярную и регулярную части

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda\in\dot{L}\cap 2N\pi}[\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}]+\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{\lambda\in L\cap\partial(2n\Pi)}[\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}],$$

введя $\Delta := \max_{z\in\Pi}|z|$ и воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\equiv z[\frac{1}{\lambda(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2(z-\lambda)}],$$

оцените модули слагаемых регулярной части как

$$|\sum_{\lambda\in L\cap\partial(2n\Pi)}[\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}]|<8\Delta n[\frac{1}{2n\delta\cdot 4(n-N)^2\delta^2}+\frac{1}{4n^2\delta^2\cdot 2(n-N)\delta}]=$$

$$=\frac{\Delta}{\delta^3}[\frac{1}{(n-N)^2}+\frac{1}{n(n-N)}]$$

и выведите из этой оценки сходимость $\wp_L$.

2.6. По какой части решётки $\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}$ надо провести суммирование, чтобы с точностью до тысячных вычислить значения функции $z\mapsto\wp_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}(z)-\frac{1}{z^2}$ в квадрате $\{z\in\mathbb{C}|-\frac{1}{2}\le\Re z\le\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\le\Im z\le\frac{1}{2}\}$? Пользуясь доступными компьютерными средствами, вычислите значения функции $\wp_{\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z}}$ на теоретико-множественной разности решёток $\frac{1}{4}(\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z})\setminus(\mathbb{Z}\mathrm{i}+\mathbb{Z})$. Рекомендуется воспользоваться доступными компьютерными средствами.

2.7. Покажите, что, если в общем уравнении кубики оставить не более двух слагаемых, то определяемая им кубика будет содержать прямую. Сколькими способами можно оставить три слагаемых, чтобы кубика НЕ содержала прямых?

2.8. Разложите в ряд Лорана функцию

$$\wp_{\mathbb{Z}}(z)=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}-\frac{\pi^2}{3}.$$

2.9. Отправляясь от вырожденной решётки, найдите *общее* решение дифференциального уравнения

$$w'(z)^2=4[w(z)-\alpha]^2[w(z)+2\alpha].$$

Докажите, что кубический многочлен $4x^3-20ax-28b$, определяющий правую часть уравнения Вейерштрасса $\mathrm{W}_{a,b}$, в случае невырожденной решётки *не* имеет кратных корней.

2.10. В обозначениях п. 2.1.6. покажите прежде всего, что для любых $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

найдётся такой сдвиг параллелограмма Π на $a \in \mathbb{C}$, что по модулю решётки L и z_1, и z_2 окажутся *внутри* сдвинутого параллелограмма $a+\Pi$. Далее считайте, что $z_1, z_2 \in \dot{\Pi} \setminus \frac{1}{2}L$.

Вычислите двумя способами контурный интеграл

$$\oint_{a+\partial\Pi} \frac{\wp'_{\mathrm{L}}(\mathrm{z})\mathrm{d}z}{\wp_L(z) - \wp_L(z_1)}$$

–с помощью теоремы о вычетах и с учётом периодических свойств функции $\wp_L$. С помощью теоремы Руше выведите из полученного равенства, что

$$\wp_L(z_1) = \wp_L(z_2) \Longrightarrow z_1 = \pm z_2.$$

2.11. Прямой круговой конус, лежащий в $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$, проектируется в конику в $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Покажите, что эта коника разбивает вещественную проективную плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ на две части, одна из которых в классической топологии гомеоморфна диску, а другая – листу Мёбиуса. Каковы прообразы этих частей в $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$?

2.12. Постройте проективное замыкание *общей коники* – и в "наивной", и в матричной записи. Обратите внимание на то, насколько естественней стал матричный формализм.

2.13. Вооружившись каким-нибудь учебником по общей топологии, подробно и тщательно установите равносильность трёх определений топологии Зариского на проективных пространствах, приведённых в п. 2.2.3.

2.14.Докажите нётеровость проективных пространств. УКАЗАНИЕ. В случае возможных затруднение воспользуйтесь книгой Атья-Макдональд.

2.15. Докажите, что в любом неприводимом пространстве
(а) пересечение двух любых непустых открытых множеств непусто;
(б) любое непустое открытое множество всюду плотно.

2.16. Докажите, что проективные пространства над алгебраически замкнутыми полями неприводимы.

2.17. Докажите, что квадрика, заданная в проективном пространстве $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ уравнением $W^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, в классической топологии гомеоморфна произведению двух вещественных двумерных сфер. Как выглядит множество *вещественных*точек этой квадрики?

2.18. Проанализируйте все логические связи, существующие между уравнениями (4)-(6) п.2.3.2. Покажите, что все три уравнения задают нормальную рациональную кривую, а никакие два из них не задают. Сформулируйте правдоподобное утверждение, из которого следует, что нормальную рациональную кривую нельзя задать *никакими* двумя уравнениями.

2.19. Приведите к обобщённой вейерштрассовой форме *кубику Ферма*

$$"x^3 + y^3 = 1".$$

2.20. Докажите, что пересечение квадрик, задаваемое в $\mathbf{P}_3(\Bbbk)$ системой уравнений

$$\begin{cases} W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 & (3) \\ aW^2 + bX^2 + cY^2 + dZ^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(abcd \neq 0),$$

содержит прямую тогда и только тогда, когда коэффициенты (a, b, c, d) разбиваются на две пары попарно равных.