

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Осенний семестр 2010-2011 учебного года

1. Простые числа. Основная теорема арифметики. Функция $\pi(x)$. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена. Верхняя оценка $\pi(x)$.
2. Формула суммирования Абеля. Функция Мангольда $\Lambda(n)$. Функция Чебышева $\psi(x)$. Связь $\pi(x)$ и $\psi(x)$. Теорема Чебышева о правильном порядке роста $\pi(x)$ и $\psi(x)$.
3. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$. Тождество Эйлера. Дзета-функция как производящая функция в теории чисел. Функция Римана $\xi(s)$. Функциональное уравнение $\zeta(s)$. Произведение Вейерштрасса для $\xi(s)$. Нули $\zeta(s)$. Теорема Валле-Пуссена об отсутствии у $\zeta(s)$ нулей в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = 1$.
4. Метод комплексного интегрирования. Формула Перрона. Выражение $\psi(x)$ через нули $\zeta(s)$. Асимптотический закон распределения простых чисел. Вычисление некоторых сумм по простым числам.
5. Первообразные корни. Определение характеров Дирихле. Построение таблиц характеров. Чётные и нечётные характеры. Примитивные характеры. Суммы Гаусса.
6. Функции $L(s, \chi)$ и $\xi(s, \chi)$. Функциональное уравнение $\xi(s, \chi)$. Отсутствие у $L(s, \chi)$ комплексных нулей вблизи единичной прямой.
7. Вещественный нуль $L(s, \chi)$. Теорема Зигеля. Функции $\pi(x; k, l)$ и $\psi(x; k, l)$. Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметической прогрессии.

Весенний семестр 2010-2011 учебного года

1. Большое решето. Функция $N(\sigma, T, \chi)$.
2. Плотностная теорема для L -функций Дирихле.
3. Теорема Бомбьери-Виноградова.
4. Проблема делителей Титчмарша.
5. Теорема Эрдеша-Ранкина о больших расстояниях между последовательными простыми числами.
6. Теорема Голдстона-Пинтца-Йилдирима о малых расстояниях между последовательными простыми числами (основные шаги доказательства).