

Элементы гиперболической динамики

Лектор: Г. А. Колюцкий

Мы начнём с базовых определений и подробного разбора элементарных примеров, так что наш курс безусловно следует воспринимать как введение в теорию динамических систем.

Все необходимые знания, в частности по теории меры и по теории цепных дробей, будут рассказаны по ходу. Таким образом, курс будет доступен второкурсникам.

Далее мы сосредоточимся на системах с гиперболическим поведением траекторий. Явное выделение этого класса систем произошло всего 50 лет назад (прежде всего в работах Смейла и Аносова), хотя подспудно дело шло к этому более 100 лет, начиная с работ Пуанкаре. В более широком плане противопоставление таких систем системам с «регулярным» поведением траекторий – проявление общей противоположности «хаос vs. регулярность».

Последняя часть курса будет посвящена появлению арифметических инвариантов в одной задаче гиперболической теории. Вообще-то, различные арифметические методы в теории динамических систем применяются уже давно, но именно в гиперболической теории арифметические инварианты были обнаружены недавно в работах [1] и [2]. Причём обнаружение геометрических цепных дробей в качестве инвариантов в задачах о топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов оказалось весьма неожиданным.

Мы подробно расскажем о том, где конкретно и какие именно инварианты возникают. В конце будут сформулированы открытые вопросы.

Программа курса

1. Растягивающие отображения окружности. Символическая динамика. Неустойчивость по начальным условиям. Топологическая классификация.
2. Основы теории меры. Стандартная мера Лебега. Мера Бернулли.
3. Теорема Пуанкаре о возвращении. Теорема Крылова-Боголюбова. Инвариантные меры. Возвращаемость траекторий почти всех точек.
4. Поворот окружности. Эргодичность. Минимальность.
5. Бильярд в круге и прямоугольнике. Иррациональная обмотка тора.
6. Диффеоморфизм Аносова. Кот Арнольда. Структурная устойчивость. Топологическое и метрическое перемешивание.
7. Геодезические на плоских поверхностях. Бильярд в треугольнике. Надстройки над перекладываниями отрезков. Конструкция Катка-Землякова. Эргодичность рациональных бильярдов. Трансляционные поверхности. Псевдоаносовские диффеоморфизмы.
8. Подкова Смейла. Соленоид Смейла-Вильямса. Сопряжение с символической динамикой. Аттракторы.

9. Топологические и метрические цепи Маркова. Условие топологической транзитивности, эргодичности и перемешивания.
10. Линейные гиперболические автоморфизмы тора. Сопряжённость цепи Маркова. Линейная и топологическая классификации.
11. Цепные дроби и их основные свойства. Геометрия цепных дробей по Клейну.
12. Многомерные геометрические цепные дроби. Связь с диффеоморфизмами Аносова торов.
13. Предмарковские разбиения. Их классификация для диффеоморфизмов Аносова торов.

Список литературы

- [1] D.V. Anosov, A.V. Klimenko, G. Kolutsky, *On the hyperbolic automorphisms of the 2-torus and their Markov partitions*, Preprints of the Max-Planck-Institut für Mathematik, **MPIM2008-54** (2008). arXiv:0810.5269v1
- [2] Grisha Kolutsky, *Geometric Continued Fractions as Invariants in the Topological Classification of Anosov Diffeomorphisms of Tori*, Iteration Theory (ECIT'08), Bericht Nr. **354**, pp. 99-111 (2009). arXiv:0902.0661v2