Римановы поверхности

Лектор: Георгий Борисович Шабат

Курс начнётся с краткого исторического обзора, в котором будет рассказано о происхождении основных конструкций теории римановых поверхностей из классических задач анализа и алгебраической геометрии; будут упомянуты работы Ньютона, Эйлера, Лежандра, Гаусса, Абеля, Якоби и самого Римана. Затем будет подробно рассмотрено понятие *римановой поверхности аналитической функции*. Оставшаяся часть курса будет посвящена *абстрактным римановым поверхностям*. Основные темы: дифференциальное и интегральное исчисление, пучки и их когомологии, накрытия и униформизация.

Для *компактных* римановых поверхностей будет доказана теорема существования Римана и установлена связь между теорией римановых поверхностей и теорией алгебраических кривых над полем комплексных чисел. С помощью современных средств будут рассмотрены классические результаты: двойственность Серра, теорема Римана–Роха, билинейные соотношения Римана, теорема Абеля, теорема Торелли. Курс завершится кратким обзором приложений римановых поверхностей к современной математической физике.

Предполагается, что слушатели владеют основными (в рамках стандартных университетских курсов) понятиями алгебры, многомерного вещественного анализа и теории функций одной комплексной переменной; желательно некоторое знакомство с двумерной топологией. Остальные используемые средства по мере необходимости будут вводиться в курсе.

Курс будет сопровождаться *упражнениями*, состоящими в основном из применений лекционного материала к частным случаям, прежде всего – классическим; так, предполагается достаточно подробно разобрать теорию *эллиптических* и *модулярных* кривых.

Программа курса

1. Краткий исторический обзор: эллиптические интегралы и их обращение, арифметико-геометрическое среднее, гипергеометрические и автоморфные функции. Римановы поверхности алгебраических функций и алгебраические кривые. Род римановой поверхности.

2. Аналитическое продолжение и римановы поверхности многозначных аналитических функций. Примеры: квадратные корни из многочленов, обращение голоморфных функций, интегралы голоморфных и мероморфных 1-форм, решения дифференциальных уравнений.

3. Абстрактные римановы поверхности. Атласы и локальные координаты. Пучки голоморфных, мероморфных и гладких функций. Векторные поля и дифференциальные формы. Разложение Ходжа 1-форм. Операторы d, ∂ и $\bar{\partial}$. Интегрирование. Мероморфные формы и их вычеты.

4. Точные последовательности пучков. Основные примеры. Когомологии с коэффициентами в пучках. Первые когомологии как препятствия. Когерентные и тонкие пучки. Тонкие резольвенты и их связь с когомологиями.

5. Компактные римановы поверхности. Конечномерность когомологий. Поле мероморфных функций, теорема существования Римана и GAGA. Дивизоры и линейные расслоения; группа Пикара. Канонический класс и каноническая модель негиперэллиптической поверхности. Двойственность Серра. Теорема Римана–Роха.

6. Компактные римановы поверхности (продолжение). Абелевы дифференциалы и их периоды. Билинейные соотношения Римана; якобиан римановой поверхности. Отображение Абеля–Якоби. Теорема Абеля. Теорема Торелли.

7. Морфизмы римановых поверхностей. Ветвление. Римановы поверхности конечного типа и их униформизация. Акцессорные параметры.

8. Римановы поверхности в современной математической физике. Солитоны и коммутирующие дифференциальные операторы. Проблема Шоттки и уравнение Кадомцева–Петвиашвили.