Алгебро-геометрический анализ дифференциальных уравнений

В.В. Жаринов [1] [2]

31 января 2009 г.

[1]E-mail: zharinov@mi.ras.ru

[2]Буду рад любым замечаниям, указаниям на ошибки, неточности, опечатки.

Оглавление

Глава 1

Формальная дифференциальная геометрия

Стандартные обозначения

Будем обозначать:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел;

$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ – множество всех комплексных чисел;

$\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

$\mathbb{X}^D = \times^D \mathbb{X} = \{x = (\xi^1, \dots, \xi^D); \xi^i \in \mathbb{X}, 1 \leq i \leq D\}$ – декартово произведение D копий множества $\mathbb{X} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$.

Всюду неявно предполагается, что все модули, линейные пространства и алгебры наделены естественными локально выпуклыми топологиями, а их морфизмы непрерывны.

1.1 Алгебры

1.1.1 Определения

Пусть $\mathbb{F}$ – поле. Напомним, что линейное пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{F}$ называется *алгеброй*, если в нем определена билинейная операция (умножение)

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ называется

- ⋆ *унитальной*, если она содержит единицу $e \in \mathcal{A}$, где $e \cdot a = a = a \cdot e$ для всех $a \in \mathcal{A}$,
- ⋆ *коммутативной*, если $a \cdot b = b \cdot a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$,
- ⋆ *ассоциативной*, если $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ (в этом случае часто пишут ab вместо $a \cdot b$),
- ⋆ *алгеброй Ли*, если

  $a \cdot b + b \cdot a = 0$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$,

  $(a \cdot b) \cdot c + (b \cdot c) \cdot a + (c \cdot a) \cdot b = 0$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$.

  (в этом случае обычно пишут $[a, b]$ вместо $a \cdot b$).

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра.

Линейное подпространство $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ называется

- ⋆ *подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b \in \mathcal{B}$ для всех $a, b \in \mathcal{B}$,
- ⋆ *левым идеалом* алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$,
- ⋆ *правым идеалом* алгебры $\mathcal{A}$, если $b \cdot a \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$,
- ⋆ *идеалом* алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b, b \cdot a \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$.

Подмножество

- ⋆ $\operatorname{cen} \mathcal{A} = \{c \in \mathcal{A} \mid a \cdot c = c \cdot a$ для всех $a \in \mathcal{A}\}$ называется *центром* алгебры $\mathcal{A}$,
- ⋆ $\operatorname{ann} \mathcal{A} = \{z \in \mathcal{A} \mid a \cdot z = z \cdot a = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}\}$ называется *аннулятором* алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Множество

$$\operatorname{nor} \mathcal{S} = \{a \in \mathcal{A} \mid a \cdot s - s \cdot a \in \mathcal{S} \text{ для всех } s \in \mathcal{S}\}$$

называется *нормализатором* множества $\mathcal{S}$ в алгебре $\mathcal{A}$.

С каждой алгеброй $\mathcal{A}$ ассоциирована операция $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$, превращающая линейное пространство $\mathcal{A}$ в другую алгебру $\operatorname{as} \mathcal{A}$. Ясно, что $\operatorname{as} \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$, если исходная алгебра $\mathcal{A}$ – алгебра Ли, тогда как $\operatorname{as} \mathcal{A}$ – алгебра Ли, если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная. В последнем случае алгебра $\operatorname{as} \mathcal{A}$ называется *присоединенной алгеброй Ли.*

1.1.2 Примеры

Пусть поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пример 1.1.1. **Гладкие функции на многообразии.** Пусть M – гладкое многообразие конечной размерности $m = \dim M \in \mathbb{N}$ (см., например, [17], [21], [23]). Множество $\mathcal{C}^\infty(M)$ всех гладких $\mathbb{F}$-значных функций на M обладает естественной структурой унитальной ассоциативной коммутативной алгебры с поточечными операциями.

В анализе важен случай $M = \mathbb{R}^m$. Алгебра $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ обладает естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков, она имеет подалгебры $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Алгебра $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ состоит из всех гладких функций на $\mathbb{R}^m$, убывающих на бесконечности вместе с частными производными всех порядков быстрее любой обратной степени модуля независимой переменной $x \in \mathbb{R}^m$, а алгебра $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ состоит из всех гладких *финитных* функций (т.е. функций с компактным носителем). Обе алгебры обладают естественными топологиями, обе они неунитальные, однако их аннуляторы тривиальные. Концепция формальной дифференциальной геометрии позволяет использовать геометрические методы и конструкции для вывода новых характеристик этих и других подобных алгебр. Например, алгебра $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ является идеалом алгебр $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Возникающие, таким образом фактор-алгебры

$$\mathcal{E}(S^{m-1}_\infty) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \quad \text{и} \quad \mathcal{S}(S^{m-1}_\infty) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

где S^{m-1}_∞ – $(m-1)$-мерная сфера бесконечно большого радиуса, совершенно не изучены, поскольку не укладываются в рамки традиционного анализа.

Пример 1.1.2. **Линейные отображения.** Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство над $\mathbb{F}$. На линейном пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ всех эндоморфизмов пространства $\mathcal{L}$ имеется естественная билинейная операция – композиция отображений

$$(M,N) \mapsto M \circ N \quad \text{для всех} \quad M,N \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L},)$$

превращающая $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ в унитальную ассоциативную алгебру. В свою очередь, ассоциированная операция – коммутатор

$$(M,N) \mapsto [M,N] = M \circ N - N \circ M \quad \text{для всех} \quad M,N \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L},)$$

превращает $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ в алгебру Ли, которую обычно обозначают $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$.

Выделим нетривиальный частный случай (см., например, [3]). Пусть $\mathcal{L} = \mathbb{F}^n$ – линейное пространство всех столбцов высотой $n \in \mathbb{N}$ с элементами из поля $\mathbb{F}$. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$ – алгебра всех квадратных матриц порядка n с элементами из поля $\mathbb{F}$, а $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}^n) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ – ассоциированная алгебра Ли.

Пример 1.1.3. **Гладкие функции на множестве.** Пусть M – гладкое многообразие и S – его произвольное подмножество. Множество

$$\mathcal{J}(S) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \phi|_S = 0\}$$

всех гладких функций, равных 0 на S, есть идеал алгебры $\mathcal{C}^\infty(M)$, так что определена фактор-алгебра $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathcal{J}(S)$. Если S есть достаточно хорошее подмногообразие многообразия M, то $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ совпадает с алгеброй $\mathcal{C}^\infty(S)$ всех гладких функций на многообразии S. В противном случае, алгебра $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ есть вполне приличная база для изучения геометрии множества S.

Пример 1.1.4. **Алгебры с поточечными операциями.** Пусть M – множество, $\mathcal{A}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$. Множество $\mathcal{A}^M$ всех отображений из M в $\mathcal{A}$ есть алгебра с поточечными операциями:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(y), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathcal{A}$, $x \in M$.

Важный частный случай: M – гладкое многообразие, $\mathcal{A}$ – топологическая алгебра. Алгебра $\mathcal{A}^M$ имеет подалгебру $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{A})$, состоящую из всех гладких функций на M со значениями в $\mathcal{A}$. Более того, $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{A})$ обладает структурой $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуля, опять с поточечными операциями:

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(x) f(x) + \mu(x) g(x)$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{A})$.

1.1.3 Морфизмы алгебр

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – алгебры. Линейное отображение $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется морфизмом алгебр, если $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Здесь ядро $\ker F = \{a \in \mathcal{A} \mid F(a) = 0\}$ – двусторонний идеал алгебры $\mathcal{A}$, а образ $\operatorname{im} F = \{b = F(a) \in \mathcal{B} \mid a \in \mathcal{A}\}$ – подалгебра алгебры $\mathcal{B}$.

Пример 1.1.5. Пусть $\mu : M \to N$ – морфизм гладких многообразий. Отображение $\mu^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ определим правилом

$$f \mapsto \mu^* f = f \circ \mu, \quad \text{так что} \quad (\mu^* f)(x) = f(\mu(x)),$$

для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, $x \in M$. Очевидно,

$$\mu^*(\alpha f + \beta g) = \alpha(\mu^* f) + \beta(\mu^* g), \quad \mu^*(fg) = (\mu^* f)(\mu^* g),$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, так что μ^* – морфизм из алгебры $\mathcal{C}^\infty(N)$ в алгебру $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. *Левое присоединенное действие*

$$\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$$

определим правилом

$$a \mapsto \mathrm{ad}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{ad}(a))(x) = a \cdot x \quad \text{для всех} \quad a, x \in \mathcal{A}.$$

Тогда

- ⋆ $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ – морфизм ассоциативных алгебр,
  если $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра, здесь
  $a \mapsto \mathrm{ad}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto ax$ для всех $a, x \in \mathcal{A}$;

- ⋆ $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ – морфизм алгебр Ли,
  если $\mathcal{A}$ – алгебра Ли, здесь
  $a \mapsto \mathrm{ad}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto [a, x]$ для всех $a, x \in \mathcal{A}$.

В частности, пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство. Тогда

- ⋆ $\mathrm{ad} : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}))$ – морфизм ассоциативных алгебр,
  где $(\mathrm{ad}(F))(X) = F \circ X$ для всех $F, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$,

* $\star$ $\mathrm{ad} : \mathfrak{gl}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(\mathcal{L}))$ – морфизм алгебр Ли,
  где $(\mathrm{ad}(F))(X) = [F, X]$ для всех $F, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$.

Имеется также правое присоединенное действие

$$\mathrm{ad}_r : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}),$$

действующее по правилу

$$a \mapsto \mathrm{ad}_r(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{ad}_r(a))(x) = x \cdot a \text{ для всех } a, x \in \mathcal{A}.$$

В ситуациях, когда используются одновременно оба действия вместо ad обычно пишут ad_l. Конечно, $\mathrm{ad}_l = \mathrm{ad}_r = \mathrm{ad}$, если алгебра $\mathcal{A}$ коммутативная. В некоммутативном случае бывает полезным *ассоциированное действие* $\mathrm{as} = \mathrm{ad}_l - \mathrm{ad}_r$,

$$a \mapsto \mathrm{as}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{as}(a))(x) = [a, x] = a \cdot x - x \cdot a, \quad a, x \in \mathcal{A}.$$

1.2 Мультипликаторы и дифференцирования

1.2.1 Мультипликаторы

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $M \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется

* $\star$ *левым мультипликатором*, если $M(a \cdot b) = M(a) \cdot b$,
* $\star$ *правым мультипликатором*, если $M(a \cdot b) = a \cdot M(b)$,
* $\star$ *мультипликатором*, если $M(a \cdot b) = M(a) \cdot b = a \cdot M(b)$,

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ множество всех мультипликаторов алгебры $\mathcal{A}$.

Предложение 1.2.1. *Эндоморфизм* $M \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *есть левый (правый) мультипликатор алгебры* $\mathcal{A}$*, тогда и только тогда, когда приведенная ниже левая (правая) диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\mathrm{ad}_l"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{ad}_l"] \\
\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{ad}_l(M)"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\mathrm{ad}_r"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{ad}_r"] \\
\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{ad}_l(M)"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Пройдя левую диаграмму по пути *направо-вниз*, получим

$$\mathrm{ad}_l(M(a))(b) = M(a) \cdot b,$$

а пройдя эту же диаграмму по пути *вниз-направо*, получим

$$\mathrm{ad}_l(M)(\mathrm{ad}_l(a))(b) = (M \circ \mathrm{ad}_l(a))(b) = M(a \cdot b).$$

Таким образом, левая диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда M – левый мультипликатор.

Аналогичным образом, разбирается и правая диаграмма. $\square$

Замечание. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, где $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ – линейные пространства над $\mathbb{F}$. Эндоморфизмы $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{K})$ и $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ называются *f-согласованными*, если следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{K} \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{L} \arrow[r, "h"'] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

В этом смысле, линейное отображение $M : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ есть левый (правый) мультипликатор, если M и $\mathrm{ad}_l(M)$ ad_l-согласованы (ad_r-согласованы).

Предложение 1.2.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра и $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – множество всех ее мультипликаторов. Тогда*

- ⋆ $\ker M = \{a \in \mathcal{A} \mid M(a) = 0\}$ *и* $\mathrm{im}\, M = \{a = M(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$ – *двусторонние идеалы алгебры $\mathcal{A}$ для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$,*
- ⋆ $M\big(\mathrm{cen}\, \mathcal{A}\big) \subset \mathrm{cen}\, \mathcal{A}$ *и* $M\big(\mathrm{ann}\, \mathcal{A}\big) \subset \mathrm{ann}\, \mathcal{A}$ *для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$,*
- ⋆ $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – *унитальная подалгебра алгебры* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$*,*
- ⋆ $[M, N] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \mathrm{ann}\, \mathcal{A})$ *для всех $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.*

В частности, алгебра $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – коммутативная, если $\mathrm{ann}\, \mathcal{A} = 0$ *(например, если $\mathcal{A}$ унитальная).*

Доказательство. Действительно, пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \ker M$, т.е. $M(a) = 0$, тогда

$$M(a \cdot b) = M(a) \cdot b = 0 \quad \text{и} \quad M(b \cdot a) = b \cdot M(a) = 0$$

для всех $b \in \mathcal{A}$. Аналогично, пусть $a \in \operatorname{im} M$, т.е. $a = M(x)$ для некоторого $x \in \mathcal{A}$, тогда

$$a \cdot b = M(x) \cdot b = M(x \cdot b) \quad \text{и} \quad b \cdot a = b \cdot M(x) = M(b \cdot x)$$

для всех $b \in \mathcal{A}$.

Пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \operatorname{cen} \mathcal{A}$, тогда

$$M(a) \cdot b = M(a \cdot b) = M(b \cdot a) = b \cdot M(a) \quad \text{для всех} \quad b \in \mathcal{A}.$$

Если же $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \operatorname{ann} \mathcal{A}$, то

$$M(a) \cdot b = M(a \cdot b) = M(0) = 0 \quad \text{и} \quad b \cdot M(a) = M(b \cdot a) = M(0) = 0$$

для всех $b \in \mathcal{A}$.

Пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned}(M \circ N)(a \cdot b) &= M(N(a \cdot b)) = M(N(a) \cdot b) = M(N(a)) \cdot b \\ &= (M \circ N)(a) \cdot b \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}(M \circ N)(a \cdot b) &= M(N(a \cdot b)) = M(a \cdot N(b)) = a \cdot M(N(b)) \\ &= a \cdot (M \circ N)(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Наконец, пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned}[M, N](a) \cdot b &= M(N(a)) \cdot b - N(M(a)) \cdot b \\ &= N(a) \cdot M(b) - N(M(a) \cdot b) \\ &= N(a \cdot M(b)) - N(a \cdot M(b)) = 0, \\ b \cdot [M, N](a) &= b \cdot M(N(a)) - b \cdot N(M(a)) \\ &= M(b \cdot N(a)) - N(b) \cdot M(a) \\ &= M(N(b) \cdot a) - M(N(b) \cdot a) = 0,\end{aligned}$$

для любого $b \in \mathcal{A}$. $\square$

Предложение 1.2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная алгебра, $e \in \mathcal{A}$ – ее единица. Определим отображение $e^* : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ правилом $M \mapsto e^*(M) = M(e)$ для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Тогда $\operatorname{im} e^* = \operatorname{cen}\mathcal{A}$, и $e^* : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \operatorname{cen}\mathcal{A}$ есть инъективный морфизм алгебр.*

Доказательство. Действительно, пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$, тогда с одной стороны, $e^*(M) \cdot a = M(e) \cdot a = M(e \cdot a) = M(a)$, а с другой стороны и $a \cdot e^*(M) = a \cdot M(e) = M(a \cdot e) = M(a)$. Таким образом, $\operatorname{im} e^* \subset \operatorname{cen}\mathcal{A}$.

Далее, пусть $M \in \ker e^*$, тогда

$$M(a) = M(e \cdot a) = M(e) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathcal{A},$$

так что $\ker e^* = 0$.

Наконец, пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned} e^*(M \circ N) &= (M \circ N)(e) = M(N(e)) = M(e \cdot N(e)) \\ &= M(e) \cdot N(e) = e^*(M) \cdot e^*(N), \end{aligned}$$

т.е. линейное отображение e^* есть морфизм алгебр. □

Предложение 1.2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра. Тогда*

- ⋆ *левое присоединенное действие в алгебре $\mathcal{A}$ индуцирует морфизм ассоциативных алгебр $\operatorname{ad} : \operatorname{cen}\mathcal{A} \to \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, причем $\ker \operatorname{ad} = \operatorname{ann}\mathcal{A}$,*

- ⋆ *если алгебра $\mathcal{A}$ еще и унитальная, то этот морфизм есть изоморфизм, причем $\operatorname{ad}^{-1} = e^*$.*

Доказательство. Действительно, пусть $a \in \operatorname{cen}\mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(a)(x \cdot y) &= a \cdot (x \cdot y) = (a \cdot x) \cdot y = \operatorname{ad}(a)(x) \cdot y \\ &= x \cdot (a \cdot y) = x \cdot \operatorname{ad}(a)(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Далее, пусть $a \in \ker \operatorname{ad}$, т.е. $\operatorname{ad}(a)(b) = a \cdot b = 0 = b \cdot a$ для всех $b \in \mathcal{A}$, откуда $a \in \operatorname{ann}\mathcal{A}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная и унитальная, то во-первых $\operatorname{ann}\mathcal{A} = 0$, а во-вторых для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$(\operatorname{ad} \circ e^*)(M)(a) = \operatorname{ad}(M(e))(a) = M(e) \cdot a = M(e \cdot a) = M(a),$$

так что $\operatorname{ad} \circ e^* = \operatorname{id}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$. □

1.2.2 Дифференцирования

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется *дифференцированием*, если выполняется *правило Лейбница*

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Множество всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Предложение 1.2.5. *Эндоморфизм $D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ есть дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда приведенная ниже диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\mathrm{ad}"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{ad}"] \\
\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{as}(D)"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

где $\mathrm{as}(D)(f) = [D, f]$ *для всякого* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Пройдя диаграмму по пути *направо-вниз*, получим

$$\begin{aligned} &a \mapsto D(a) \mapsto \mathrm{ad}(D(a)), \\ &\text{так что} \quad \mathrm{ad}(D(a))(b) = D(a) \cdot b, \end{aligned}$$

а пройдя по пути *вниз-направо*, получим

$$\begin{aligned} &a \mapsto \mathrm{ad}(a) \mapsto \mathrm{as}(D)(\mathrm{ad}(a)) = [D, \mathrm{ad}(a)], \\ &\text{так что} \quad [D, \mathrm{ad}(a)](b) = D(a \cdot b) - a \cdot D(b). \end{aligned}$$

Итак, диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда D удовлетворяет правилу Лейбница. □

Предложение 1.2.6. *Пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, тогда*

- ⋆ $\ker D = \{a \in \mathcal{A} \mid D(a) = 0\}$ – *подалгебра алгебры $\mathcal{A}$,*
- ⋆ $\mathrm{im}\, D = \{a = D(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$ – *линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{A}$,*

⋆ $D\big(\operatorname{cen}\mathcal{A}\big) \subset \operatorname{cen}\mathcal{A}$ *и* $D\big(\operatorname{ann}\mathcal{A}\big) \subset \operatorname{ann}\mathcal{A}$.

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \ker D$, тогда

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b) = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0.$$

Второе утверждение очевидно, его смысл в том что образ $\operatorname{im} D$ не является ни идеалом ни подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$.

Далее, пусть $a \in \operatorname{cen}\mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{A}$, тогда

$$D(a) \cdot b = D(a \cdot b) - a \cdot D(b) = D(b \cdot a) - D(b) \cdot a = b \cdot D(a).$$

Наконец, пусть $a \in \operatorname{ann}\mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned} D(a) \cdot b &= D(a \cdot b) - a \cdot D(b) = D(0) - 0 = 0, \\ b \cdot D(a) &= D(b \cdot a) - D(b) \cdot a = D(0) - 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Предложение 1.2.7. *Множество* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *всех дифференцирований алгебры* $\mathcal{A}$ *есть подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Действительно, пусть $X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned} [X, Y](a \cdot b) &= X(Y(a \cdot b)) - Y(X(a \cdot b)) \\ &= X(Y(a) \cdot b + a \cdot Y(b)) - Y(X(a) \cdot b + a \cdot X(b)) \\ &= (X(Y(a)) - Y(X(a))) \cdot b + a \cdot (X(Y(b)) - Y(X(b))) \\ &= [X, Y](a) \cdot b + a \cdot [X, Y](b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

□

Предложение 1.2.8. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– ассоциативная алгебра и* $\operatorname{as}\mathcal{A}$ *– ее присоединенная алгебра Ли с коммутатором в качестве скобки Ли. Ассоциированное действие в алгебре* $\mathcal{A}$ *индуцирует морфизм алгебр Ли*

$$\operatorname{as} : \operatorname{as}\mathcal{A} \to \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}$, тогда $\operatorname{as}(a)(x) = [a, x]$ для всех $x \in \mathcal{A}$, причем

$$\begin{aligned} \operatorname{as}(a)(x \cdot y) &= [a, x \cdot y] = a \cdot (x \cdot y) - (x \cdot y) \cdot a \\ &= (a \cdot x - x \cdot a) \cdot y + x \cdot (a \cdot y - y \cdot a) \\ &= [a, x] \cdot y + x \cdot [a, y] = \operatorname{as}(x) \cdot y + x \cdot \operatorname{as}(a)(y) \end{aligned}$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$, т.е. ассоциированное действие определяет линейное отображение $\mathrm{as} : \mathcal{A} \to \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Далее, пусть $a, b \in \mathcal{A}$, тогда

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{as}([a, b]) - [\mathrm{as}(a), \mathrm{as}(b)])(x) &= [[a, b], x] - [a, [b, x]] + [b, [a, x]] \\
&= [[a, b], x] + [[b, x], a] + [[x, a], b] = 0
\end{aligned}
$$

для всех $x \in \mathcal{A}$, в силу тождества Якоби для коммутаторов, т.е. определен морфизм алгебр Ли $\mathrm{as} : \mathrm{as}\,\mathcal{A} \to \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. □

Замечание. Дифференцирования $\mathrm{as}(a)$, $a \in \mathcal{A}$, называются *внутренними дифференцированиями* алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, у коммутативной алгебры есть только одно внутреннее дифференцирование, а именно тривиальное нулевое. С другой стороны, у матричной алгебры $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ все дифференцирования внутренние [3].

1.2.3 Взаимные действия

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – унитальная ассоциативная алгебра всех ее мультипликаторов, $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ – алгебра Ли всех ее дифференцирований. По построению, $\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, это позволяет определить взаимные действия мультипликаторов и дифференцирований, используя композиции и коммутаторы в объемлющей алгебре $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.

Предложение 1.2.9. *Левое присоединенное действие в объемлющей алгебре* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм ассоциативных алгебр*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})),$$

а его сужение на $\mathrm{cen}\,\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *есть изоморфизм*

$$\mathrm{ad} : \mathrm{cen}\,\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})).$$

Доказательство. Действительно, первое утверждение следует из Предложений 1.2.2 и 1.2.4, а второе из Предложения 1.2.4. □

Предложение 1.2.10. *Левое присоединенное действие в объемлющей алгебре* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм ассоциативных алгебр*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A})),$$

так что линейное пространство $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *имеет структуру левого* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$*-модуля.*

Доказательство. Действительно, левое присоединенное действие задает линейное отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, причем

$$\begin{aligned}&(M \circ D)(a \cdot b) = M(D(a \cdot b)) = M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b))\\ &= M(D(a)) \cdot b + a \cdot M(D(b)) = (M \circ D)(a) \cdot b + a \cdot (M \circ D)(b)\end{aligned}$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Другими словами, образ $\mathrm{ad}(M) : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, т.е. определено линейное отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$. Это отображение есть морфизм алгебр, поскольку алгебра эндоморфизмов любого линейного пространства ассоциативна. □

Предложение 1.2.11. *Ассоциированное действие в объемлющей алгебре* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм алгебр Ли*

$$\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})).$$

В частности, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *обладает структурой модуля Ли над* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$*.*

Доказательство. Действительно, ассоциированное действие задает линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, причем

$$\begin{aligned}&[D, M](a \cdot b) = D(M(a \cdot b)) - M(D(a \cdot b))\\ &= D(M(a) \cdot b) - M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b))\\ &= (D \circ M)(a) \cdot b + M(a) \cdot D(b) - (M \circ D)(a) \cdot b - M(a) \cdot D(b)\\ &= [D, M](a) \cdot b,\\ &[D, M](a \cdot b) = D(M(a \cdot b)) - M(D(a \cdot b))\\ &= D(a \cdot M(b)) - M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b))\\ &= D(a) \cdot M(b) + a \cdot (D \circ M)(b) - D(a) \cdot M(b) - a \cdot (M \circ D)(b)\\ &= a \cdot [D, M](b)\end{aligned}$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Другими словами, образ $\mathrm{as}(D)\big(\mathfrak{M}(\mathcal{A})\big) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ для любого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, т.е. определено линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. Это отображение есть морфизм алгебр Ли $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$, поскольку в силу тождества Якоби для коммутаторов

$$\begin{aligned}\operatorname{as}([X,Y])(M) &- [\operatorname{as}(X),\operatorname{as}(Y)](M)\\ &= [[X,Y],M] - [X,[Y,M]] + [Y,[X,M]]\\ &= [[X,Y],M] + [[Y,M],X] + [[M,X],Y]\\ &= 0 \quad \text{для всех} \quad X,Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),\ M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Завершая доказательство покажем, что $\operatorname{im}\operatorname{as} \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. Действительно, пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{as}(D)(M \circ N) &= [D, M \circ N] = [D,M] \circ N + M \circ [D,N]\\ &= \operatorname{as}(D)(M) \circ N + M \circ \operatorname{as}(D)(N).\end{aligned}$$

□

Замечание. Если алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная, то справедливо *правило ассоциативности*

$$\operatorname{as}(M \circ D)(N) = M \circ \operatorname{as}(D)(N) \text{ для всех } M,N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\ D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

Действительно, в этом случае

$$[M \circ D, N] = M \circ [D,N] + [M,N] \circ D = M \circ [D,N].$$

Предложение 1.2.12. *Ассоциированное действие в объемлющей алгебре* $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм алгебр Ли*

$$\operatorname{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A})).$$

Доказательство. Действительно, ассоциированное действие задает линейное отображение $\operatorname{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}), \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, а в силу тождества Якоби, $\operatorname{as}([X,Y])(D) = [\operatorname{as}(X),\operatorname{as}(Y)](D)$ для всех $X,Y,D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Для завершения доказательства осталось проверить, что образ $\operatorname{as}(D) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ для любого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, т.е. что

$$\operatorname{as}(D)([X,Y]) = [\operatorname{as}(D)(X), Y] + [X, \operatorname{as}(D)(Y)], \quad D,X,Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),$$

а это так, в силу все того же тождества Якоби. □

Предложение 1.2.13. *Для любых* $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *и* $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *справедливо следующее равенство эндоморфизмов линейного пространства* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$

$$[\operatorname{as}(D), \operatorname{ad}(M)] = \operatorname{ad}(\operatorname{as}(D)(M))$$

Доказательство. Напомним сначала, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{as}(D): \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad X \mapsto [D, X] \text{ для всех } X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),\\
&\mathrm{as}(D): \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \quad N \mapsto [D, N] \text{ для всех } N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\\
&\mathrm{ad}(M): \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad X \mapsto M \circ X \text{ для всех } X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Далее, доказываемое равенство есть легко проверяемое коммутаторное равенство,

$$[D, M \circ X] = M \circ [D, X] + [D, M] \circ X \text{ для всех } D, M, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}),$$

переписанное в других обозначениях. Действительно, в нашем случае

$$\begin{aligned}
[D, M \circ X] &= \mathrm{as}(D)(M \circ X) = \mathrm{as}(D)(\mathrm{ad}(M)(X))\\
&= (\mathrm{as}(D) \circ \mathrm{ad}(M))(X),\\
M \circ [D, X] &= \mathrm{ad}(M)([D, X]) = \mathrm{ad}(M)(\mathrm{as}(D)(X))\\
&= (\mathrm{ad}(M) \circ \mathrm{as}(D))(X),\\
[D, M] \circ X &= \mathrm{ad}([D, M])(X) = \mathrm{ad}(\mathrm{as}(D)(M))(X),
\end{aligned}$$

так что

$$(\mathrm{as}(D) \circ \mathrm{ad}(M))(X) - (\mathrm{ad}(M) \circ \mathrm{as}(D))(X) = \mathrm{ad}(\mathrm{as}(D)(M))(X)$$

для всех $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, а это и требовалось доказать. □

1.3 Формальный комплекс де Рама

1.3.1 Составляющие

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле, над которым заданы:

- ⋆ $\mathfrak{M}$ – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра,
- ⋆ $\mathfrak{D}$ – алгебра Ли,
- ⋆ $\mathfrak{K}$ – линейное пространство,

причем определены следующие взаимные действия:

(M-D) морфизм ассоциативных алгебр
$\mu : \mathfrak{M} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D})$,
$M \mapsto \mu(M) : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}, \quad D \mapsto \mu(M)(D) = M \cdot D$
(т.е. $\mathfrak{D}$ – $\mathfrak{M}$-модуль);

(D-M) морфизм алгебр Ли

$\varkappa : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$,

$D \mapsto \varkappa(D) : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}, \quad M \mapsto \varkappa(D)(M) = D(M)$

(в частности, $\mathfrak{M}$ – модуль Ли над $\mathfrak{D}$), причем справедливы правило ассоциативности $(M \cdot D)(N) = M \cdot D(N)$

и коммутаторная формула

$[D, M \cdot X] = M \cdot [D, X] + D(M) \cdot X$;

(M-K) морфизм ассоциативных алгебр

$\mu_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{M} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{K})$,

$M \mapsto \mu_{\mathfrak{K}}(M) : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}, \quad k \mapsto \mu_{\mathfrak{K}}(M)(k) = M \cdot k$

(т.е. $\mathfrak{K}$ – $\mathfrak{M}$-модуль);

(D-K) морфизм алгебр Ли

$\varkappa_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$,

$D \mapsto \varkappa_{\mathfrak{K}}(D) : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}, \quad k \mapsto \varkappa_{\mathfrak{K}}(D)(k) = D(k)$,

(т.е. $\mathfrak{K}$ – модуль Ли над $\mathfrak{D}$), где правило Лейбница имеет вид

$D(M \cdot k) = D(M) \cdot k + M \cdot D(k)$,

причем выполняется правило ассоциативности

$(M \cdot D)(k) = M \cdot D(k)$;

где всюду $M, N \in \mathfrak{M}$, $D, X \in \mathfrak{D}$, $k \in \mathfrak{K}$.

Заметим, что при заданных объектах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям (M-D) и (D-M), можно положить $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$.

1.3.2 Внешняя алгебра $\wedge\mathfrak{D}$

Пусть $\wedge\mathfrak{D} = \oplus_{q\in\mathbb{Z}_+} \wedge^q \mathfrak{D}$ – внешняя алгебра $\mathfrak{M}$-модуля $\mathfrak{D}$, где

$$\wedge^q\mathfrak{D} = \begin{cases} \mathfrak{M}, & q = 0, \\ \underbrace{\mathfrak{D} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{D}}_{q \text{ сомножителей}}, & q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(тензорное произведение берется в категории $\mathfrak{M}$-модулей, ради краткости, здесь и ниже пишем $\wedge$ вместо $\wedge_{\mathfrak{M}}$).

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей)

$$\lambda : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}), \quad D \mapsto \lambda_D : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^{q+1}\mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+$$
$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto D \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q,$$

в частности, $\lambda_D(M) = M \cdot D$ для всех $D \in \mathfrak{D}$ и $M \in \wedge^0\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$.

Следующие два утверждения предлагается проверить в качестве упражнения.

Предложение 1.3.1. *Для каждого $D \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм λ_D есть* косой мультипликатор *внешней алгебры $\wedge\mathfrak{D}$, т.е.*

$$\lambda_D(V \wedge W) = (\lambda_D V) \wedge W = (-1)^p V \wedge (\lambda_D W)$$

для всех $V \in \wedge^p\mathfrak{D}$, $W \in \wedge\mathfrak{D}$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.2. *Имеют место равенства*

$$\lambda_X \circ \lambda_Y + \lambda_Y \circ \lambda_X = 0 \quad \textit{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

В частности, для каждого $D \in \mathfrak{D}$ имеем $\lambda_D \circ \lambda_D = 0$, так что определен комплекс $\{\wedge\mathfrak{D}, \lambda_D\} = \{\wedge^q\mathfrak{D}, \lambda_D^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\lambda_D^q = \lambda_D\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$.

Также определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей)

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}), \quad D \mapsto \Lambda_D : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^{q+1}\mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+ \\ X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto q \cdot D \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \\ = \sum_{1 \le i \le q} (-1)^{i-1} X_1 \wedge \ldots D \wedge X_i \ldots \wedge X_q. \end{aligned}$$

Очевидно, $\Lambda\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}} = q \cdot \lambda\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$ для всех $q \in \mathbb{Z}_+$.

Легко проверяется

Предложение 1.3.3. *Справедливы равенства*

- $\star$ $\Lambda_D(V \wedge W) = \Lambda_D(V) \wedge W + (-1)^p V \wedge \Lambda_D(W)$ *для всех $D \in \mathfrak{D}$, $V \in \wedge^p\mathfrak{D}$, $W \in \wedge^q\mathfrak{D}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$;*
- $\star$ $\Lambda_X \circ \Lambda_Y + \Lambda_Y \circ \Lambda_X = 0$ *для всех $X, Y \in \mathfrak{D}$.*

В частности, для всех $D \in \mathfrak{D}$

- $\star$ Λ_D *– косое дифференцирование внешней алгебры $\wedge\mathfrak{D}$.*

Положим $\Theta^1 = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{D}^*$.

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей)

$$\begin{aligned} \iota : \Theta^1 \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}), \\ \theta \mapsto \iota_\theta : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^{q-1}\mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \\ X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto \sum_{1 \le i \le q} (-1)^{i-1} X_1 \ldots \theta(X_i) \ldots X_q \\ = \sum_{1 \le i \le q} (-1)^{i-1} \theta(X_i) \cdot X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q. \end{aligned}$$

В частности, $\iota_\theta(M)=0$ для всех $\theta\in\Theta^1$ и $M\in\mathfrak{M}=\wedge^0\mathfrak{D}$.

Замечание. Здесь и всюду ниже значок ˇ означает, что соответствующий аргумент пропущен.

Следующие два утверждения предлагается проверить в качестве упражнения.

Предложение 1.3.4. *Для каждого $\theta\in\Theta^1$ эндоморфизм ι_θ есть* косое дифференцирование *внешней алгебры $\wedge\mathfrak{D}$, т.е.*

$$\iota_\theta(V\wedge W)=(\iota_\theta V)\wedge W+(-1)^p V\wedge(\iota_\theta W)$$

для всех $V\in\wedge^p\mathfrak{D}$, $W\in\wedge\mathfrak{D}$, $p\in\mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.5. *Имеют место равенства*

$$\iota_\theta\circ\iota_\chi+\iota_\chi\circ\iota_\theta=0\quad \textit{для всех}\quad \theta,\chi\in\Theta^1.$$

В частности, для каждого $\theta\in\Theta^1$ имеем $\iota_\theta\circ\iota_\theta=0$, так что определен комплекс $\{\wedge\mathfrak{D},\iota_\theta\}=\{\wedge^q\mathfrak{D},\iota_\theta^q\mid q\in\mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_\theta^q=\iota_\theta\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$.

Предложение 1.3.6. *Для любых $D\in\mathfrak{D}$ и $\theta\in\Theta^1$ справедливо равенство*

$$\lambda_D\circ\iota_\theta+\iota_\theta\circ\lambda_D=\theta(D)\cdot\mathrm{id}_{\wedge\mathfrak{D}}\,.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}(\iota_\theta\circ\lambda_D)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)&=\iota_\theta(D\wedge X_1\wedge\ldots\wedge X_q)\\&=\iota_\theta(D)\wedge(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)-D\wedge\iota_\theta(X_1\wedge\ldots\iota_\theta)\\&=\theta(D)\cdot X_1\wedge\ldots\wedge X_q-(\lambda_D\circ\iota_\theta)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)\end{aligned}$$

для всех $X_1,\ldots,X_q\in\mathfrak{D}$. □

Следствие 1.3.1. *Пусть $D\in\mathfrak{D}$, $\theta\in\Theta^1$, причем $\theta(D)=1\in\mathfrak{M}$, тогда комплексы $\{\wedge\mathfrak{D},\lambda_D\}$ и $\{\wedge\mathfrak{D},\iota_\theta\}$ ациклические, т.е. все их $\mathfrak{M}$-модули когомологий тривиальные.*

Перейдем теперь к другому классу действий.

Присоединенное действие $\mathrm{ad}:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}(\mathfrak{D})$,

$$D\mapsto\mathrm{ad}(D):\mathfrak{D}\to\mathfrak{D},\quad X\mapsto D(X)=[D,X]\ \text{для всех}\ D,X\in\mathfrak{D},$$

индуцирует действие (морфизм $\mathbb{F}$-линейных пространств)

$$\begin{gathered}L:\mathfrak{D}\to\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\wedge\mathfrak{D}),\quad D\mapsto L_D:\wedge^q\mathfrak{D}\to\wedge^q\mathfrak{D},\quad q\in\mathbb{Z}_+,\\ X_1\wedge\ldots\wedge X_q\mapsto\sum_{1\le i\le q}X_1\wedge\ldots[D,X_i]\ldots\wedge X_q.\end{gathered}$$

В частности,

* $L_D(M) = D(M) = [D, M]$ для $M \in \wedge^0\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$,
* $L_D(X) = D(X) = [D, X]$ для $X \in \wedge^1\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$.

Легко проверяется следующее

Предложение 1.3.7. *Для каждого $D \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм L_D есть дифференцирование внешней алгебры $\wedge\mathfrak{D}$, т.е.*

$$L_D(V \wedge W) = (L_D V) \wedge W + V \wedge (L_D W) \quad \text{для всех} \quad V, W \in \wedge\mathfrak{D}.$$

Предложение 1.3.8. *Действие $L : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}(\wedge\mathfrak{D})$ есть морфизм алгебр Ли, т.е.*

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]} \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно, для всех $X_1, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$ имеем

$$\begin{aligned}
L_X(L_Y(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) &= \sum_{1 \le j \le q} L_X(X_1 \wedge \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q) \\
&= \sum_{1 \le i < j \le q} X_1 \wedge \ldots [X, X_i] \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1 \le i \le q} X_1 \wedge \ldots [X, [Y, X_i]] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1 \le j < i \le q} X_1 \wedge \ldots [Y, X_j] \ldots [X, X_i] \ldots \wedge X_q \\
&= \sum_{1 \le i \le q} X_1 \wedge \ldots [X, [Y, X_i]] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le q} (X_1 \wedge \ldots [X, X_i] \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q \\
&+ X_1 \wedge \ldots [Y, X_i] \ldots [X, X_j] \ldots \wedge X_q).
\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
L_Y(L_X(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) &= \sum_{1 \le i \le q} X_1 \wedge \ldots [Y, [X, X_i]] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le q} (X_1 \wedge \ldots [Y, X_i] \ldots [X, X_j] \ldots \wedge X_q \\
&+ X_1 \wedge \ldots [X, X_i] \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q).
\end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим требуемое равенство, поскольку в силу тождества Якоби

$$[X,[Y,X_i]] - [Y,[X,X_i]] = [[X,Y],X_i].$$

□

Предложение 1.3.9. *Для любых* $X, Y \in \mathfrak{D}$ *справедливо равенство*

$$[L_X, \lambda_Y] = \lambda_{[X,Y]}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $X, Y, X_1, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$, тогда

$$\begin{aligned}
&L_X(\lambda_Y(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) = L_X(Y \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\\
&\quad = [X,Y] \wedge X_1 \ldots \wedge X_q + \sum_{1 \le i \le q} Y \wedge X_1 \wedge \ldots [X,X_i] \ldots \wedge X_q\\
&\qquad\qquad = \lambda_{[X,Y]}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) + \lambda_Y(L_X(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)).
\end{aligned}$$

□

Рассмотрим частный случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{D}$ действует на алгебре $\mathfrak{M}$ (см. условие (D-M)) тривиально, т.е. $D(M) = 0$ для всех $D \in \mathfrak{D}$ и $M \in \mathfrak{M}$. В этой ситуации $[D, M \cdot X] = M \cdot [D, X]$ для всех $D, X \in \mathfrak{D}$ и $M \in \mathfrak{M}$, так что определен *граничный оператор* $\partial \in \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D})$,

$$\begin{aligned}
&\partial : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^{q-1}\mathfrak{D}, \quad X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto \partial(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\\
&\qquad = \sum_{1 \le i < j \le q} (-1)^{i+j-1}[X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots \wedge X_q.
\end{aligned}$$

В частности,

- ⋆ $\partial(M) = 0$ для всех $M \in \wedge^0\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$,
- ⋆ $\partial(X) = 0$ для всех $X \in \wedge^1\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$,
- ⋆ $\partial(X_1 \wedge X_2) = [X_1, X_2]$ для всех $X_1 \wedge X_2 \in \wedge^2\mathfrak{D}$.

Предложение 1.3.10. *Для каждого* $D \in \mathfrak{D}$ *имеет место равенство*

$$\partial \circ \lambda_D + \lambda_D \circ \partial = L_D.$$

Доказательство. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&(\partial\circ\lambda_D)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)=\partial(D\wedge X_1\wedge\ldots\wedge X_q)\\
&\quad=\sum_{1\le j\le q}(-1)^{j-1}[D,X_j]\wedge\ldots\check{X}_j\ldots\wedge X_q\\
&\quad+\sum_{1\le i<j\le q}(-1)^{i+j-1}[X_i,X_j]\wedge D\wedge X_1\wedge\ldots\check{X}_i\ldots\check{X}_j\ldots\wedge X_q\\
&\quad=\sum_{1\le i\le q}X_1\wedge\ldots[D,X_i]\ldots\wedge X_q\\
&\quad-D\wedge\left(\sum_{1\le i<j\le q}(-1)^{i+j-1}[X_i,X_j]\wedge X_1\wedge\ldots\check{X}_i\ldots\check{X}_j\ldots\wedge X_q\right)\\
&\quad=L_D(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)-(\lambda_D\circ\partial)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q).
\end{aligned}
$$

□

Лемма 1.3.1. *Для данного $D\in\mathfrak{D}$ положим $F_D=\partial\circ L_D-L_D\circ\partial$, тогда*

$$F_D\circ\lambda_X+\lambda_X\circ F_D=0\quad \textit{для всех}\quad X\in\mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&F_D\circ\lambda_X=(\partial\circ L_D-L_D\circ\partial)\circ\lambda_X=\partial\circ(L_D\circ\lambda_X)-L_D\circ(\partial\circ\lambda_X)\\
&\quad=\partial\circ(\lambda_{[D,X]}+\lambda_X\circ L_D)-L_D\circ(L_X-\lambda_X\circ\partial)\\
&\quad=\partial\circ\lambda_{[D,X]}+(\partial\circ\lambda_X)\circ L_D-L_D\circ L_X+(L_D\circ\lambda_X)\circ\partial\\
&\quad=(L_{[D,X]}-\lambda_{[D,X]}\circ\partial)+(L_X-\lambda_X\circ\partial)\circ L_D-L_D\circ L_X\\
&\quad+(\lambda_{[D,X]}+\lambda_X L_D)\circ\partial\\
&\quad=(L_{[D,X]}+L_X\circ L_D-L_D\circ L_X)+(-\lambda_{[D,X]}\circ\partial+\lambda_{[D,X]}\circ\partial)\\
&\quad-\lambda_X\circ(\partial\circ L_D-L_D\circ\partial)=-\lambda_X\circ F_D,
\end{aligned}
$$

где мы неоднократно воспользовались Предложениями 1.3.9, 1.3.10 и 1.3.8. □

Предложение 1.3.11. *Для каждого $D\in\mathfrak{D}$ имеет место равенство*

$$\partial\circ L_D-L_D\circ\partial=0.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $F_D=0$. Воспользуемся индукцией по степени $q\in\mathbb{Z}_+$. Элементарно проверяется, что $F_D(M) = 0$ для любого $M \in \mathfrak{M} = \wedge^0\mathfrak{D}$. Предположим, что $F_D\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}} = 0$, тогда, в силу предыдущей леммы,

$$\begin{aligned} F_D(X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) &= F_D\big(\lambda_{X_0}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) \\ &= -\lambda_{X_0}\big(F_D(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 1.3.2. *Положим $F = \partial \circ \partial$, тогда*

$$F \circ \lambda_X - \lambda_X \circ F = 0 \quad \textit{для всех} \quad X \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} F \circ \lambda_X &= (\partial \circ \partial) \circ \lambda_X = \partial \circ (\partial \circ \lambda_X) = \partial \circ (L_X - \lambda_X \circ \partial) \\ &= \partial \circ L_X - (\partial \circ \lambda_X) \circ \partial = \partial \circ L_X - (L_X - \lambda_X \circ \partial) \circ \partial \\ &= (\partial \circ L_X - L_X \circ \partial) + \lambda_X \circ (\partial \circ \partial) = \lambda_X \circ F, \end{aligned}$$

где мы воспользовались Предложениями 1.3.10 и 1.3.11. □

Предложение 1.3.12. *Справедливо равенство*

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Доказательство. Следует доказать, что $F = 0$. Опять используем индукцию по $q \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $F\big|_{\wedge^0\mathfrak{D}} = 0$, предположим, что $F\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}} = 0$, тогда в силу предыдущей леммы,

$$\begin{aligned} F(X_0 \wedge \ldots \wedge X_q) &= F\big(\lambda_{X_0}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) \\ &= \lambda_{X_0}\big(F(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

В частности, в случае тривиального действия алгебры Ли $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{M}$, определен комплекс $\{\wedge\mathfrak{D}, \partial\} = \{\wedge^q\mathfrak{D}, \partial^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где дифференциалы $\partial^q = \partial\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$.

1.3.3 Комплекс $\{\Omega, d\}$

Определен $\mathfrak{M}$-модуль

$$\Omega = \Omega(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+}\Omega^q,$$

где
$$\Omega^q = \Omega^q(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}, \mathfrak{K}), \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$
так что, $\Omega^0 = \mathfrak{K}$ (проверить).

В частности, положим
$$\Theta = \Omega(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{M}) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Theta^q, \quad \Theta^q = \Omega^q(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{M}).$$

По построению $\mathfrak{M}$-модуль Θ обладает структурой внешней алгебры с поточечным умножением, задаваемым стандартной формулой
$$(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \mathrm{sign}\, \sigma \cdot$$
$$\cdot\, \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p+q)})$$
$$= (-1)^{pq}(\chi \wedge \omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q})$$
для всех $\omega \in \Theta^p$, $\chi \in \Theta^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $X_1, \ldots, X_{p+q} \in \mathfrak{D}$.

В свою очередь, $\mathfrak{M}$-модуль Ω обладает структурой внешнего Θ-модуля (здесь $\mathfrak{M} = \Theta^0$ – подалгебра алгебры Θ), где для всех $\omega \in \Theta^p$, $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, произведение $\omega \wedge \chi$ вычисляется по той же самой стандартной формуле.

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей),
$$\lambda : \Theta^1 \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\Omega), \quad \theta \mapsto \lambda_\theta : \Omega^q \to \Omega^{q+1}, \quad \omega \mapsto \lambda_\theta(\omega) = \theta \wedge \omega.$$

Следующие два утверждения предлагается проверить в качестве упражнения.

Предложение 1.3.13. *Для каждой $\theta \in \Theta^1$ эндоморфизм λ_θ есть косой мультипликатор внешней алгебры Θ и внешнего Θ-модуля Ω, т.е.*
$$\lambda_\theta(\omega \wedge \chi) = (\lambda_\theta \omega) \wedge \chi = (-1)^p \omega \wedge (\lambda_\theta \chi)$$
для всех $\omega \in \Theta^p$ и $\chi \in \Theta$ или $\chi \in \Omega$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.14. *Имеют место равенства*
$$\lambda_\theta \circ \lambda_\chi + \lambda_\chi \circ \lambda_\theta = 0 \quad \textit{для всех} \quad \theta, \chi \in \Theta^1.$$

В частности, для каждого $\theta \in \Theta^1$ имеем $\lambda_\theta \circ \lambda_\theta = 0$, так что определен комплекс $\mathfrak{M}$-модулей $\{\Omega^q, \lambda_\theta^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\lambda_\theta^q = \lambda_\theta\big|_{\Omega^q}$.

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей),

$$\iota : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\Omega), \quad D \mapsto \iota_D : \Omega^q \to \Omega^{q-1}, \quad \omega \mapsto \iota_D(\omega) = \omega \circ \Lambda_D,$$

т.е.

$$(\iota_D \omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{q-1}) = q \cdot \omega(D \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_{q-1})$$

для всех $X_1, \ldots, X_{q-1} \in \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. В частности, для каждого $D \in \mathfrak{D}$ имеем

- ⋆ $\iota_D(k) = 0$ для всех $k \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$,
- ⋆ $\iota_D(\omega) = \omega(D)$ для всех $\omega \in \Omega^1$.

По построению справедливо

Предложение 1.3.15. *Для каждого $D \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм ι_D есть косое дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ-модуля Ω, т.е.*

$$\iota_D(\omega \wedge \chi) = (\iota_D \omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (\iota_D \chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^p$ и $\chi \in \Theta$ или $\chi \in \Omega$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Также справедливо

Предложение 1.3.16. *Имеют место равенства*

$$\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0 \quad \textit{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

В частности, для каждого $D \in \mathfrak{D}$ имеем $\iota_D \circ \iota_D = 0$, так что определен комплекс $\mathfrak{M}$-модулей $\{\Omega^q, \iota_D^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_D^q = \iota_D\big|_{\Omega^q}$.

Предложение 1.3.17. *Имеют место равенства*

$$\iota_D \circ \lambda_\theta + \lambda_\theta \circ \iota_D = \theta(D) \cdot \mathrm{id}_\Omega \quad \textit{для всех} \quad D \in \mathfrak{D},\ \theta \in \Theta^1.$$

Доказательство. Действительно, для любой формы $\omega \in \Omega$, в силу Предложения 1.3.15, имеем:

$$\begin{aligned}\big(\iota_D \circ \lambda_\theta\big)\omega &= \iota_D(\theta \wedge \omega) = \iota(\theta) \cdot \omega - \theta \wedge \iota_D(\omega) \\ &= \theta(D) \cdot \omega - \big(\lambda_\theta \circ \iota_D\big)\omega.\end{aligned}$$

□

Следствие 1.3.2. *Пусть* $D \in \mathfrak{D}$, $\theta \in \Theta^1$, $\theta(D) = 1 \in \mathfrak{M}$. *Тогда комплексы* $\{\Omega^q, \lambda^q_\theta\}$ *и* $\{\Omega^q, \iota^q_D\}$ *ациклические, т.е. все их* $\mathfrak{M}$*-модули когомологий тривиальные.*

Определено действие (морфизм $\mathbb{F}$-линейных пространств),

$$L : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega), \quad D \mapsto L_D : \Omega^q \to \Omega^q, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$
$$\omega \mapsto L_D(\omega) = \varkappa_{\mathfrak{K}}(D) \circ \omega - \omega \circ L_D,$$

так что

$$L_D(\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = D(\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) - \sum_{1 \le i \le q} \omega(X_1 \wedge \ldots [D, X_i] \ldots \wedge X_q)$$

для всех $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

По построению справедливо

Предложение 1.3.18. *Для каждого* $D \in \mathfrak{D}$ *эндоморфизм* L_D *есть дифференцирование внешней алгебры* Θ *и внешнего* Θ*-модуля* Ω*, т.е.*

$$L_D(\omega \wedge \chi) = L_D(\omega) \wedge \chi + \omega \wedge L_D(\chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^p$ *и* $\chi \in \Theta^q$ *или* $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.19. *Действие* $L : \mathfrak{D} \to \mathfrak{gl}(\Omega)$ *есть морфизм алгебр Ли, т.е.*

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]} \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $X, Y \in \mathfrak{D}$, $\omega \in \Omega^q$, где $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\begin{aligned} L_X(L_Y(\omega)) &= L_X(\varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega - \omega \circ L_Y) \\ &= \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega - \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega \circ L_X \\ &- \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ L_Y + \omega \circ L_Y \circ L_X, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_Y(L_X(\omega)) &= L_Y(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega - \omega \circ L_X) \\ &= \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega - \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ L_Y \\ &- \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega \circ L_X + \omega \circ L_X \circ L_Y. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая Предложение (1.3.8), получим требуемое равенство. $\square$

Предложение 1.3.20. *Для любых* $X, Y \in \mathfrak{D}$ *справедливо равенство*

$$[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}.$$

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{D}$, $\omega \in \Omega^q$, $q \in \mathbb{Z}_+$, тогда

$$\begin{aligned} L_X(\iota_Y(\omega)) &= q \cdot L_X(\omega \circ \lambda_Y) \\ &= q \cdot \big(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ \lambda_Y - \omega \circ \lambda_Y \circ L_X\big), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \iota_Y(L_X(\omega)) &= \iota_Y(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega - \omega \circ L_X) \\ &= q \cdot \big(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ \lambda_Y - \omega \circ L_X \circ \lambda_Y\big). \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, и учитывая Предложение (1.3.9), получим требуемое равенство. □

Предложение 1.3.21. *Существует единственный эндоморфизм* $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$, *где* $d : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$, $q \in \mathbb{Z}_+$, *такой что*

$$d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}.$$

Именно,

$$\begin{aligned} &d\omega(X_0 \wedge \ldots \wedge X_q) \\ &\quad = \frac{1}{q+1}\Big\{ \sum_{0 \le i \le q} (-1)^i X_i\big(\omega(X_0 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q)\big) \\ &\quad + \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots \wedge X_q)\Big\} \end{aligned}$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega^q$, $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$. Для $q = 0$ имеем для всех $\omega \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$, $X \in \mathfrak{D}$,

$$\begin{aligned} &\iota_X(\omega) = 0,\ d(\iota_X(\omega)) = 0,\ \iota_X(d\omega) = d\omega(X), \\ &L_X(\omega) = X(\omega), \quad \text{так что} \quad d\omega(X) = X(\omega), \end{aligned}$$

как и требуется. Пусть утверждение верно для $q-1$, тогда для всех $\omega \in \Omega^q$, $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$, имеем

$$\begin{aligned}
&d(\iota_{X_0}\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) \\
&\quad = \sum_{1 \le i \le q} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q)) \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} \omega(X_0 \wedge [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots \wedge X_q),
\end{aligned}$$

далее

$$\iota_{X_0}(d\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = (q+1) \cdot d\omega(X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q),$$

и наконец

$$\begin{aligned}
L_{X_0}(\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) &= X_0(\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) \\
&+ \sum_{1 \le i \le q} (-1)^i \omega([X_0, X_i] \wedge X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q).
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в определяющую формулу для дифференциала, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения для q. □

Стандартным образом проверяется

Предложение 1.3.22. *Эндоморфизм d есть косое дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ-модуля Ω, т.е.*

$$d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (d\chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^p$ и $\chi \in \Theta$ или $\chi \in \Omega$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.23. *Справедливо равенство*

$$d \circ L_D - L_D \circ d = 0 \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $D, X \in \mathfrak{D}$. Положим

$$F_D = d \circ L_D - L_D \circ d : \Omega^q \to \Omega^{q+1}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&F_D \circ \iota_X = (d \circ L_D - L_D \circ d) \circ \iota_X = d \circ (L_D \circ \iota_X) - L_D \circ (d \circ \iota_X)\\
&= d \circ (\iota_{[D,X]} + \iota_X \circ L_D) - L_D \circ (L_X - \iota_X \circ d)\\
&= d \circ \iota_{[D,X]} - L_D \circ L_X + (d \circ \iota_X) \circ L_D + (L_D \circ \iota_X) \circ d\\
&= d \circ \iota_{[D,X]} - L_D \circ L_X + (L_X - \iota_X \circ d) \circ L_D\\
&+ (\iota_{[D,X]} + \iota_X \circ L_D) \circ d\\
&= (d \circ \iota_{[D,X]} + \iota_{[D,X]} \circ d - L_D \circ L_X + L_X \circ L_D)\\
&- \iota_X \circ (d \circ L_D - L_D \circ d)\\
&= -\iota_X \circ (d \circ L_D - L_D \circ d) = -\iota_X \circ F_D,
\end{aligned}
$$

где мы неоднократно использовали Предложения 1.3.21, 1.3.20 и 1.3.19. Итак,

$$F_D \circ \iota_X + \iota_X \circ F_D = 0 \quad \text{для всех} \quad D, X \in \mathfrak{D},$$

Опираясь на это равенство докажем требуемое равенство индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$. Пусть, сначала $q = 0$, $\omega \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$, тогда

$$
\begin{aligned}
&\iota_X(\omega) = 0, \quad F_D(\iota_X(\omega)) = 0, \quad \text{так что}\\
&\iota_X(F_D(\omega)) = F_D(\omega)(X) = 0 \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{D},
\end{aligned}
$$

и требуемое равенство для $q = 0$ доказано. Предположим теперь, что равенство верно для некоторого q, и пусть $\omega \in \Omega^{q+1}$, тогда

$$
\begin{aligned}
&\iota_{X_0}(\omega) \in \Omega^q, \quad F_D(\iota_{X_0}(\omega) = 0, \quad \text{так что}\\
&\iota_{X_0}(F_D(\omega))(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = F_D(\omega)(X_0 \wedge \ldots \wedge X_q) = 0,
\end{aligned}
$$

для всех $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$, что и требовалось. □

Предложение 1.3.24. *Справедливо равенство*

$$d \circ d = 0.$$

Доказательство. Положим $F = d \circ d : \Omega^q \to \Omega^{q+2}$, $q \in \mathbb{Z}_+$, и пусть $X \in \mathfrak{D}$, тогда

$$
\begin{aligned}
F \circ \iota_X &= (d \circ d) \circ \iota_X = d \circ (d \circ \iota_X) = d \circ (L_X - \iota_X \circ d)\\
&= d \circ L_X - (d \circ \iota_X) \circ d = d \circ L_X - (L_X - \iota_X \circ d) \circ d\\
&= d \circ L_X - L_X \circ d + \iota_X \circ d \circ d = \iota_X \circ (d \circ d) = \iota_X \circ F,
\end{aligned}
$$

в силу Предложений 1.3.21 и 1.3.23. Итак,

$$F \circ \iota_X = \iota_X \circ F \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{D}.$$

Как и выше, индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$ отсюда выводится требуемое равенство $d \circ d = 0$. $\square$

Таким образом, определен комплекс $\{\Omega, d\} = \{\Omega^q, d^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $d^q = d|_{\Omega^q} : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$. Здесь используется терминология:

- ⋆ элементы линейного пространства Ω^q называют *q-коцепями, q-формами*,
- ⋆ элементы ядра $\ker d^q = \{\omega \in \Omega^q | d(\omega) = 0\}$ называют *q-коциклами, замкнутыми q-формами*,
- ⋆ элементы образа $\operatorname{im} d^{q-1} = \{\omega = d(\phi) | \phi \in \Omega^{q-1}\}$ называют *q-кограницами, точными q-формами*,
- ⋆ элементы фактор-пространства $H^q(\Omega, d) = \ker d^q / \operatorname{im} d^{q-1}$ называют *q-когомологиями*,

причем всюду добавляют – *с коэффициентами в $\mathfrak{K}$*.

В приложениях часто встречается ситуация, когда $\mathfrak{K}$ обладает дополнительной структурой ассоциативной алгебры, причем к условия (M-K), (D-K) добавляются следующие правила согласования:

(M-K-a) $M \cdot (k \cdot l) = (M \cdot k) \cdot l \quad$ для всех $\quad M \in \mathfrak{M},\ k, l \in \mathfrak{K}$,

(D-K-a) $D(k \cdot l) = D(k) \cdot l + k \cdot D(l) \quad$ для всех $\quad D \in \mathfrak{D},\ k, l \in \mathfrak{K}$.

В этом случае $\mathfrak{M}$-модуль Ω обладает структурой внешней алгебры с поточечным умножением, задаваемым стандартной формулой

$$(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign} \sigma \cdot$$
$$\cdot\, \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p+q)})$$
$$= (-1)^{pq} (\chi \wedge \omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q})$$

для всех $\omega \in \Omega^p$, $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $X_1, \ldots, X_{p+q} \in \mathfrak{D}$.

Предложение 1.3.25. *Если $\mathfrak{K}$ обладает структурой ассоциативной алгебры, то*

* *для каждого* $D \in \mathfrak{D}$ *эндоморфизм* $\iota_D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ *есть косое дифференцирование алгебры* Ω*, т.е.*

$$\iota_D(\omega \wedge \chi) = (\iota_D \omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (\iota_D \chi),$$

* *для каждого* $D \in \mathfrak{D}$ *эндоморфизм* $L_D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ *есть дифференцирование алгебры* Ω*, т.е.*

$$L_D(\omega \wedge \chi) = (L_D \omega) \wedge \chi + \omega \wedge (L_D \chi),$$

* *эндоморфизм* $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ *есть косое дифференцирование алгебры* Ω*, т.е.*

$$d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^p \wedge (d\chi),$$

где всюду $\omega \in \Omega^p$*,* $\chi \in \Omega^q$*,* $p, q \in \mathbb{Z}_+$*.*

Доказательство. Предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

1.3.4 Примеры

Пример 1.3.1. **(Классическая) дифференциальная геометрия.** Пусть M – гладкое многообразие (см., например, [17], [21], [23]), $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(M)$ – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра всех гладких функций на M, снабженная естественной топологией. Согласно Предложению 1.2.4, в этом случае алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (это и есть причина того, что понятие мультипликатора в классической дифференциальной геометрии отсутствует). В свою очередь дифференцирования алгебры $\mathcal{A}$ суть касательные векторные поля на многообразии M, так что $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}(M)$. Очевидно, тройка $\mathfrak{M} = \mathcal{A}$, $\mathfrak{D} = \mathcal{T}(M)$, $\mathfrak{K} = \mathcal{A}$ удовлетворяет условиям (M-D) – (D-K), так что определен комплекс $\{\Omega, d\} = \{\Omega(M), d\}$ – классический комплекс де Рама дифференциальных форм на многообразии M. Пространства когомологий $H(M) = H(\Omega(M), d)$ являются важнейшими топологическими характеристиками многообразия M. В более общей ситуации компонент $\mathfrak{K}$ есть $\mathcal{A}$-модуль, такой что выполнено условие (D-K) (например, $\mathfrak{K}$ – векторное расслоение над M), в этом случае элементы из Ω называются *векторнозначными дифференциальными формами на* M.

Пример 1.3.2. **Формальная дифференциальная геометрия.** Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная ассоциативная алгебра, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – унитальная ассоциативная алгебра ее мультипликаторов (в этом случае коммутативная!), $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ – алгебра Ли ее дифференцирований, $\mathfrak{K}$ – $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-модуль, для которого выполнено условие (D-K) (например, $\mathfrak{K} = \mathcal{A}$ или $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$). В силу Предложений 1.2.10, 1.2.11 и 1.2.13, будут выполнены условия (M-D) – (D-M), так что определен комплекс $\{\Omega, d\}$.

Пример 1.3.3. **Когомологии алгебр Ли.** Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и $\mathfrak{K}$ – модуль Ли над $\mathfrak{A}$ (другими словами, задано представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в линейном пространстве $\mathfrak{K}$). Положим $\mathfrak{M} = \mathbb{F}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$. Легко проверяется, что условия (M-D) – (D-K) выполнены с тривиальным действием $\mathfrak{g} \to \mathfrak{D}(\mathbb{F}) = 0$, так что определен комплекс $\{\mathcal{C}, d\}$, где $\mathcal{C} = \oplus_{q\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^q$, $\mathcal{C}^q = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge^q\mathfrak{g}, \mathfrak{K})$. Когомологии комплекса $\{\mathcal{C}, d\}$ называются *когомологиями Шевалле-Эйленберга* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пример 1.3.4. **Дифференциальная геометрия подмножества гладкого многообразия.** Пусть M – гладкое многообразие, S – его подмножество.

Пусть $\mathcal{C}^\infty_S(M) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid f|_S = 0\}$ – идеал алгебры $\mathcal{C}^\infty(M)$, состоящий из всех гладких функций на многообразии M, обращающихся в нуль на подмножестве $S \subset M$. Фактор-алгебра $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S) = \mathcal{C}^\infty(M)\big/\mathcal{C}^\infty_S(M)$ является адекватной заменой алгебры гладких функций на S, в случае, когда множество S не имеет гладкой структуры, согласованной с многообразием M, а если таковая структура имеется, то обычно $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S) = \mathcal{C}^\infty(S)$. Развитая выше техника позволяет говорить по крайней мере о трех моделях дифференциальной геометрии множества S.

Прежде всего, определены

* множество $\mathcal{T}_{ext}(S) = \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty_{ext}(S))$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$, наделенное согласованными структурами алгебры Ли и $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$-модуля,
* комплекс $\{\Omega_{ext}(S), d_{ext}\} = \{\Omega^p_{ext}(S), d^p_{ext} \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\Omega_{ext}(S) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+}\Omega^p_{ext}(S)$, $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$-модули

$$\Omega^p_{ext}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)}(\wedge^p\mathcal{T}_{ext}(S), \mathcal{C}^\infty_{ext}(S)),$$

линейные отображения $d^p_{ext} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^p_{ext}(S), \Omega^{p+1}_{ext}(S))$ действуют по формулам Предложения 1.3.21 (стр. 30), в частности $d^{p+1}_{ext} \circ d^p_{ext} = 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Далее, положим

* $\star$ $\mathcal{T}(M;S) = \{\zeta \in \mathcal{T}(M) \mid \zeta(\mathcal{C}^\infty_S(M)) \subset \mathcal{C}^\infty_S(M)\}$
  (в этом случае говорят, что поле ζ *касается подмножества* $S \subset M$),
* $\star$ $\mathcal{T}_S(M) = \{\zeta \in \mathcal{T}(M) \mid \zeta(\mathcal{C}^\infty(M)) \subset \mathcal{C}^\infty_S(M)\}$
  (в этом случае говорят, что поле ζ *обращается в нуль на подмножестве* $S \subset M$).

Очевидно, множество $\mathcal{T}(M;S)$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathcal{T}(M)$, а множество $\mathcal{T}_S(M)$ есть идеал алгебры Ли $\mathcal{T}(M;S)$. В частности, определена фактор-алгебра Ли

$$\mathcal{T}_{ex}(S) = \mathcal{T}(M;S)/\mathcal{T}_S(M)$$

Алгебра Ли $\mathcal{T}_{ex}(S)$ также является адекватной заменой алгебры Ли касательных полей на S, в случае, когда множество S не имеет гладкой структуры, согласованной с многообразием M, а если таковая структура имеется, то обычно $\mathcal{T}_{ex}(S) = \mathcal{T}(S)$.

Очевидно, на множестве $\mathcal{T}_{ex}(S)$ также определена естественная структура $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$-модуля, согласованная со структурой алгебры Ли.

Предложение 1.3.26. *Определено вложение (мономорфизм алгебр Ли и $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$-модулей)*

$$\iota : \mathcal{T}_{ex}(S) \to \mathcal{T}_{ext}(S), \quad \overline{\zeta} \mapsto \iota(\overline{\zeta}),$$

где $\zeta \in \mathcal{T}(M;S)$, $\overline{\zeta} = \zeta + \mathcal{T}_S(M)$, отображение $\iota(\overline{\zeta}) : \mathcal{C}^\infty_{ext} \to \mathcal{C}^\infty_{ext}$ действует по правилу

$$\overline{f} = f + \mathcal{C}^\infty_S(M) \mapsto \iota(\overline{\zeta})(\overline{f}) = \overline{\zeta(f)} = \zeta(f) + \mathcal{C}^\infty_S(M),$$

для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Доказательство. Проверим сначала, что введенное отображение $\iota(\overline{\zeta}) : \mathcal{C}^\infty_{ext}(S) \to \mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ определено корректно. Действительно, пусть $f, f' \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\zeta, \zeta' \in \mathcal{T}(M;S)$, причем $f' - f = \phi \in \mathcal{C}^\infty_S(M)$, $\zeta' - \zeta = \eta \in \mathcal{T}_S(M)$. Тогда

$$\zeta'(f') = (\zeta + \eta)(f + \phi) = \zeta(f) + \zeta(\phi) + \eta(f + \phi) \in \zeta(f) + \mathcal{C}^\infty_S(M),$$

согласно определениям пространств $\mathcal{T}(M;S)$ и $\mathcal{T}_S(M)$. Покажем теперь, что линейное отображение $\iota(\overline{\zeta})$ есть дифференцирование алгебры $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ для любого $\zeta \in \mathcal{T}(M;S)$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}\iota(\overline{\zeta})(\overline{f}\cdot\overline{g}) &= \iota(\overline{\zeta})(\overline{f\cdot g}) = \overline{\zeta(f\cdot g)} = \overline{\zeta(f)\cdot g + f\cdot\zeta(g)} \\ &= \overline{\zeta(f)}\cdot\overline{g} + \overline{f}\cdot\overline{\zeta(g)} = \iota(\overline{\zeta})(\overline{f})\cdot\overline{g} + \overline{f}\cdot\iota(\overline{\zeta})(\overline{g})\end{aligned}$$

для всех $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. $\square$

Определен комплекс $\{\Omega_{ex}(S), d_{ex}\} = \{\Omega^p_{ex}(M), d^p_{ex} \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$-модули

$$\Omega^p_{ex}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)}(\wedge^p \mathcal{T}_{ex}(S), \mathcal{C}^\infty_{ext}(S)),$$

линейные отображения $d^p_{ex} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^p_{ex}(S), \Omega^{p+1}_{ex}(S))$ действуют по формулам Предложения 1.3.21, в частности $d^{p+1}_{ex} \circ d^p_{ex} = 0$.

Предложение 1.3.27. *Вложение* $\iota : \mathcal{T}_{ex}(S) \to \mathcal{T}_{ext}(S)$ *индуцирует сужения (морфизмы* $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$*-модулей)*

$$\varrho^p : \Omega^p_{ext}(S) \to \Omega^p_{ex}(S), \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

согласованные с дифференциалами, т.е. $d^p_{ex} \circ \varrho^p = \varrho^{p+1} \circ d^{p+1}_{ext}$.

Доказательство. Предлагается провести самостоятельно, в качестве упражнения. $\square$

Наконец, для $p \in \mathbb{N}$ положим

- ⋆ $\wedge^p_S \mathcal{T}(M;S) = \mathcal{T}_S(M) \wedge \big(\wedge^{p-1}\mathcal{T}(M;S)\big)$,
- ⋆ $\Omega^p(M;S) = \big\{\omega \in \Omega^p(M) \mid \omega\big(\wedge^p_S \mathcal{T}(M;S)\big) \subset \mathcal{C}^\infty_S(M)\big\}$,
- ⋆ $\Omega^p_S(M) = \big\{\omega \in \Omega^p(M) \mid \omega\big(\wedge^p \mathcal{T}(M;S)\big) \subset \mathcal{C}^\infty_S(M)\big\}$,
- ⋆ $\Omega^p_e(S) = \Omega^p(M;S)/\Omega^p_S(M)$,
- ⋆ $\Omega_e(S) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+}\Omega^p_e(S)$, где $\Omega^0_e(S) = \mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$,
- ⋆ дифференциал $d_e = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+} d^p_e \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Omega_e(S))$, где линейные отображения $d^p_e \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^p_e(S), \Omega^{p+1}_e(S))$ действуют по правилу

  $$\overline{\omega} = \omega + \Omega^p_S(M) \mapsto d^p_e(\overline{\omega}) = \overline{d^p(\omega)} = d^p(\omega) + \Omega^{p+1}_S(M)$$

  (корректность такого определения следует из легко проверяемых вложений $d^p\big(\Omega^p_S(M)\big) \subset \Omega^{p+1}_S(M)$, $p \in \mathbb{N}$).

Предложение 1.3.28. *Имеют место изоморфизмы $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$-модулей*
$$\wedge^p \mathcal{T}_{ex}(S) \simeq \wedge^p \mathcal{T}(M;S) \big/ \wedge^p_S \mathcal{T}(M;S), \quad p \in \mathbb{N},$$
задаваемые правилом
$$\overline{\zeta_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\zeta_p} \mapsto \overline{\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \zeta_p} \quad \text{для всех} \quad \zeta_1, \ldots, \zeta_p \in \mathcal{T}(M;S).$$

Доказательство. Предлагается провести самостоятельно, в качестве упражнения. □

Предложение 1.3.29. *Имеют место вложения (т.е. мономорфизмы $\mathcal{C}^\infty_{ext}(M)$-модулей)*
$$\iota^p : \Omega^p_e(S) \to \Omega^p_{ex}(S), \quad \overline{\omega} = \omega + \Omega^p_S(M) \mapsto \iota^p(\overline{\omega}), \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$
где
$$\iota^p(\overline{\omega})(\overline{\zeta_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\zeta_p}) = \overline{\omega(\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \zeta_p)} = \omega(\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \zeta_p) + \mathcal{C}^\infty_S(M),$$
для всех $\zeta_1, \ldots, \zeta_p \in \mathcal{T}(M;S)$, причем эти вложения согласованы с дифференциалами, т. е. $d^p_{ex} \circ \iota^p = \iota^{p+1} \circ d^p_e$.

Доказательство. Предлагается провести самостоятельно, в качестве упражнения. □

Пример 1.3.5. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру
$$\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}.$$
Очевидно, алгеброй ее мультипликаторов является унитальная ассоциативная коммутативная алгебра $\mathfrak{M} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (ср. с Примером 1.3.2).

Предложение 1.3.30. *Каждая функция $f \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$ имеет единственное представление $f(x) = \phi(x)x$, где $\phi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Предлагается проверить в качестве упражнения, что для данной $f \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$ функция
$$\phi(x) = \begin{cases} f'(0), & x = 0, \\ f(x)/x, & x \neq 0, \end{cases}$$
обладает всеми требуемыми свойствами. □

В частности, отсюда следует, что $\mathfrak{M}$-модуль $\mathcal{A}$ свободный, его размерность $\dim_{\mathfrak{M}} \mathcal{A} = 1$, функция $x \in \mathcal{A}$ является его базисом, т.е.

$$\mathcal{A} = \big\{ f = \phi x \mid \phi \in \mathfrak{M} \big\}.$$

Пусть дифференцирование $Z \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Стандартным образом (сначала действием на мономы x^p, $p \in \mathbb{N}$, с учетом правила Лейбница, а затем используя плотность многочленов $P(x)$, $P(0) = 0$, и непрерывность дифференцирования Z в линейном пространстве $\mathcal{A}$) выводится, что $(Zf)(x) = \zeta(x) f'(x)$ для всех $f \in \mathcal{A}$, где $\zeta = Zx \in \mathcal{A}$ – действие дифференцирования Z на базисную функцию x. Определим дифференцирование $D \in \mathfrak{D}$ равенством $Dx = x$ (так что $(Df)(x) = xf'x)$, тогда для любых $Z \in \mathfrak{D}$ и $f \in \mathcal{A}$ будем иметь $Zf = \zeta f' = \phi \cdot (Df)$, где функция $\phi \in \mathfrak{M}$ определена условием $\phi(x)x = \zeta(x)$. В частности, отсюда следует, что $\mathfrak{M}$-модуль $\mathfrak{D}$ свободный, его размерность $\dim_{\mathfrak{M}} \mathfrak{D} = 1$, дифференцирование $D \in \mathfrak{D}$ является его базисом, так что

$$\mathfrak{D} = \big\{ Z = \phi D \mid \phi \in \mathfrak{M} \big\}.$$

Очевидно, для любых дифференцирований $X = \phi D, Y = \psi D \in \mathfrak{D}$ коммутатор $[X, Y] = Z = \chi D$, где $\chi = \phi \cdot (D\psi) - \psi \cdot (D\phi)$.

Итак, $\wedge^0 \mathfrak{D} = \mathfrak{M}$, $\wedge^1 \mathfrak{D} = \mathfrak{D}$ и $\wedge^p \mathfrak{D} = 0$ при $p > 1$.

Определены $\mathfrak{M}$-модули

$$\Omega^p = \Omega^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^p \mathfrak{D}, \mathcal{A}), \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

где

- ⋆ $\Omega^0 = \mathcal{A}$,
- ⋆ $\Omega^1 = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{D}, \mathcal{A})$,
- ⋆ $\Omega^p = 0$ при $p > 1$.

Определим 1-форму $\Theta \in \Omega^1$ правилом $\Theta(D) = x$. Легко проверяется (проделать это), что всякая 1-форма $\omega \in \Omega^1$ имеет представление $\omega = \phi \cdot \Theta$, где функция $\phi \in \mathfrak{M}$ однозначно определяется условием $\phi(x)x = \omega(D)(x)$. В частности, отсюда следует, что $\mathfrak{M}$-модуль Ω^1 свободный, его размерность $\dim_{\mathfrak{M}} \Omega^1 = 1$, 1-форма $\Theta \in \Omega^1$ является его базисом. Дифференциал $d = d^0 : \Omega^0 \to \Omega^1$ действует по правилу $(df)(Z) = Zf$ для всех $f \in \mathcal{A}$. В частности, $(dx)(D) = Dx = x = \Theta(D)$, т.е. $\Theta = dx$, так что

$$\Omega^1 = \big\{ \omega = \phi \, dx \mid \phi \in \mathfrak{M} \big\}.$$

Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}$ имеем

$$\big((df)(D)\big)(x) = (Df)(x) = f'(x) \cdot x = f'(x) \cdot \big((dx)(D)\big)(x),$$

т.е. $df = f'dx$. В частности, ядро $\ker d^0 = \{f \in \mathcal{A} \mid f' = 0\} = 0$, так что пространство когомологий $H^0 = \ker d^0 \big/ 0 = 0$. С другой стороны, образ $\operatorname{im} d^0 = \{\omega = df \mid f \in \mathcal{A}\} = \Omega^1$, поскольку для всякой $\phi \in \mathfrak{M}$ форма $\omega = \phi dx = df$, где $f(x) = \int_0^x \phi(\xi)d\xi \in \mathcal{A}$, так что пространство когомологий $H^1 = \Omega^1 \big/ \operatorname{im} d^0 = 0$. Учитывая тривиальные равенства $H^p = 0$ при $p > 1$, приходим к выводу, что справедлива

Теорема 1. *У алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ все пространства когомологий тривиальные.*

Пример 1.3.6. Пусть в рамках Примера 1.3.4 гладкое многообразие $M = \mathbb{R}^2$, а его подмножество $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. С помощью Предложения 1.3.30 легко проверяется (проделать это), что

$$\mathcal{C}_S^\infty(M) = \big\{f(x, y) = \phi(x, y)xy \mid \phi \in \mathcal{C}^\infty(M)\big\}.$$

Предложение 1.3.31. *Каждая функция $f(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ имеет единственное представление вида*

$$f(x, y) = c + g(x) + h(y) + \phi(x, y),$$

где

- ⋆ $c \in \mathbb{R}$,
- ⋆ $g(x) \in \mathcal{A}_x = \{g(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}$ *(см. Пример 1.3.5),*
- ⋆ $h(y) \in \mathcal{A}_y = \{h(y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid h(0) = 0\}$ *(см. Пример 1.3.5),*
- ⋆ $\phi(x, y) \in \mathcal{C}_S^\infty(M)$.

Доказательство. Достаточно положить

- ⋆ $c = f(0, 0)$,
- ⋆ $g(x) = f(x, 0) - f(0, 0)$,
- ⋆ $h(y) = f(0, y) - f(0, 0)$,
- ⋆ $\phi(x, y) = f(x, y) + f(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y)$,

и убедиться, что других возможностей нет. $\square$

В частности, отсюда следует, что фактор-алгебра

$$\mathcal{C}^{\infty}_{ext}(S) = \mathcal{C}^{\infty}(M)/\mathcal{C}^{\infty}_{S}(M) \simeq \mathcal{A} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{A}_x \oplus \mathcal{A}_y \subset \mathcal{C}^{\infty}(M),$$

причем алгебраические операции в $\mathcal{A}$ имеют вид

- $\star$ $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$
  $= (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) + (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)) + (\lambda_1 h_1(y) + \lambda_2 h_2(y)),$
- $\star$ $f_1 \cdot f_2 = c_1 c_2 + (c_1 g_2(x) + c_2 g_1(x) + g_1(x) g_2(x))$
  $+ (c_1 h_2(y) + c_2 h_1(y) + h_1(y) h_2(y)),$

для всех $f_i = c_i + g_i(x) + h_i(y) \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2$. Ниже полагаем $\mathcal{A} = \mathcal{C}^{\infty}_{ext}(S)$. Алгебраические операции в $\mathcal{A}$ суть обычные поточечные операции плюс правило $\mathcal{A}_x \cdot \mathcal{A}_y = 0$ (поскольку $gh \in \mathcal{C}^{\infty}_{S}(M)$ для всех $g \in \mathcal{A}_x$, $h \in \mathcal{A}_y$). Очевидно, алгебра $\mathcal{A}$ – унитальная ассоциативная и коммутативная, и значит совпадает со своим мультипликатором.

Введем еще две алгебры $\mathfrak{M}_x = \mathbb{R} \oplus \mathcal{A}_x = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}_x)$ – мультипликатор алгебры $\mathcal{A}_x$, и $\mathfrak{M}_y = \mathbb{R} \oplus \mathcal{A}_y = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}_y)$ – мультипликатор алгебры $\mathcal{A}_y$.

Легко проверяется (как и в Примере 1.3.5), что всякое дифференцирование $Z \in \mathcal{T}_{ext}(S) = \mathfrak{D}(\mathcal{C}^{\infty}_{ext}(S))$ имеет представление

$$Z = Z(x) \cdot \partial_x + Z(y) \cdot \partial_y, \quad Z(x), Z(y) \in \mathcal{A},$$

где ∂_x, ∂_y – частные производные по x и y. В отличие от стандартной ситуации, равенство $\mathcal{A}_x \cdot \mathcal{A}_y = 0$, накладывает на Z дополнительное условие

$$\begin{aligned} Z(g(x) \cdot h(y)) &= Z(g(x)) \cdot h(y) + g(x) \cdot Z(h(y)) \\ &= Z(x) g'(x) h(y) + g(x) Z(y) h'(y) = 0 \end{aligned}$$

для всех $g(x) \in \mathcal{A}_x$, $h(y) \in \mathcal{A}_y$. Это условие легко разрешается и дает

$$Z(x) \in \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}, \quad Z(y) \in \mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{A}$-модуль

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ext}(S) &= \big\{ Z = f \partial_x + g \partial_y \mid f \in \mathcal{A}_x,\ g \in \mathcal{A}_y \big\} \\ &= \big\{ Z = \phi D_x + \psi D_y \mid \phi \in \mathfrak{M}_x,\ \psi \in \mathfrak{M}_y \big\}, \end{aligned}$$

где $D_x = x\partial_x, D_y = y\partial_y \in \mathcal{T}_{ext}(S)$, (см. Пример 1.3.5, заметим, что $\partial_x, \partial_y \notin \mathcal{T}_{ext}(S)$). Легко доказывается (проделать это) следующее

Предложение 1.3.32. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{A}_y \cdot D_x = 0, \quad \mathcal{A}_x \cdot D_y = 0,$$

т.е. $g \cdot D_x = f \cdot D_y = 0$ *для всех* $g \in \mathcal{A}_y$, $f \in \mathcal{A}_x$.

В частности, $\mathcal{A}_x \cdot D_x \wedge D_y = \mathcal{A}_y \cdot D_x \wedge D_y = 0$, и значит $\mathcal{A}$-модуль

$$\wedge^2 \mathcal{T}_{ext}(S) = \big\{ a \cdot D_x \wedge D_y \mid a \in \mathbb{R} \big\} \simeq \mathbb{R},$$

причем $f \cdot D_x \wedge D_y = a \cdot D_x \wedge D_y$, где $a = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}} f$ – проекция элемента $f \in \mathcal{A}$ на подпространство $\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$.

Очевидно, $\wedge^p \mathcal{T}_{ext}(S) = 0$ при всех $p > 2$; напомним, что по определению, $\wedge^0 \mathcal{T}_{ext}(S) = \mathcal{A}$.

Определены $\mathcal{A}$-модули

$$\Omega^p_{ext}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge^p \mathcal{T}_{ext}(S), \mathcal{A}), \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

По построению, $\Omega^0_{ext}(S) = \mathcal{A}$. Зададим формы $\Theta_x, \Theta_y \in \Omega^1_{ext}(S)$ правилом

$$\Theta_x(Z) = \phi, \quad \Theta_y(Z) = \psi, \quad \text{для всех} \quad Z = \phi D_x + \psi D_y \in \mathcal{T}_{ext}(S).$$

Пусть $\omega \in \Omega^1_{ext}(S)$, $Z = \phi D_x + \psi D_y \in \mathcal{T}_{ext}(S)$. Тогда

$$\omega(Z) = \phi\omega(D_x) + \psi\omega(D_y) = \omega(D_x)\Theta_x(Z) + \omega(D_y)\Theta_y(Z),$$

т.е. каждая форма $\omega \in \Omega^1_{ext}(S)$ имеет представление

$$\omega = f \cdot \Theta_x + g \cdot \Theta_y, \quad f = \omega(D_x), g = \omega(D_y) \in \mathcal{A},$$

причем компоненты f и g определены не однозначно, из-за равенства $\mathcal{A}_x \cdot \mathcal{A}_y = 0$. Именно, имеют место равенства

$$\mathcal{A}_y \cdot \Theta_x = 0, \quad \mathcal{A}_x \cdot \theta_y = 0.$$

(Например, $(g \cdot \Theta_x)(D_x) = \Theta_x(g \cdot D_x) = 0$ для всех $f \in \mathcal{A}_y$, в силу Предложения 1.3.32.) Как следствие, однозначное представление имеет вид $\omega = \xi \cdot \Theta_x + \eta \cdot \Theta_y$, где компоненты $\xi = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}_x} \omega(D_x) \in \mathfrak{M}_x$, $\eta = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}_y} \omega(D_y) \in \mathfrak{M}_y$. Таким образом,

$$\Omega^1_{ext}(S) = \big\{ \omega = \xi \cdot \Theta_x + \eta \cdot \Theta_y \mid \xi \in \mathfrak{M}_x, \ \eta \in \mathfrak{M}_y \big\}.$$

Рассмотрим форму $\Theta_x \wedge \Theta_y \in \Omega^2_{ext}(S)$. По построению

$$\begin{aligned}(\Theta_x \wedge \Theta_y)(D_x \wedge D_y) &= \frac{1}{2}\big(\Theta_x(D_x)\cdot\Theta_y(D_y) - \Theta_x(D_y)\cdot\Theta_y(D_x)\big)\\ &= \frac{1}{2}(1\cdot 1 - 0\cdot 0) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Соответственно, для произвольной формы $\omega \in \Omega^2_{ext}(S)$ имеем

$$\begin{aligned}\omega(D_x \wedge D_y) &= 2\omega(D_x \wedge D_y)\cdot(\Theta_x \wedge \Theta_y)(D_x \wedge D_y)\\ &= (\Theta_x \wedge \Theta_y)\big(2\omega(D_x \wedge D_y)\cdot D_x \wedge D_y\big)\\ &= (\Theta_x \wedge \Theta_y)(c\cdot D_x \wedge D_y) = c\cdot(\Theta_x \wedge \Theta_y)(D_x \wedge D_y),\end{aligned}$$

где $c = 2\operatorname{pr}_{\mathbb{R}}\omega(D_x \wedge D_y)$. Итак, каждая форма $\omega \in \Omega^2_{ext}(S)$ имеет единственное представление вида $\omega = c\cdot\Theta_x \wedge \Theta_y$, $c \in \mathbb{R}$, и значит

$$\Omega^2_{ext}(S) = \big\{\omega = c\cdot\Theta_x \wedge \Theta_y \mid c \in \mathbb{R}\big\} \simeq \mathbb{R}.$$

Очевидно, $f\cdot\omega = \operatorname{pr}_{\mathbb{R}} f\cdot\omega$ для всех $f \in \mathcal{A}$ и $\omega \in \Omega^2_{ext}(S)$.

Конечно, $\Omega^p_{ext}(S) = 0$ при $p > 2$.

Дифференциалы $d^p_{ext} : \Omega^p_{ext}(S) \to \Omega^{p+1}_{ext}(S)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, действуют по формулам Предложения 1.3.21 (см. стр. 30).

Пусть $f \in \mathcal{A} = \Omega^0_{ext}(S)$, $Z = \phi D_x + \psi D_y \in \mathcal{T}_{ext}(S)$. Тогда

$$\begin{aligned}(d^0_{ext}f)(Z) &= Z(f) = (D_x f)\cdot\phi + (D_y f)\cdot\psi\\ &= (D_x f)\cdot\Theta_x(Z) + (D_y f)\cdot\Theta_y(Z),\end{aligned}$$

так что $d^0_{ext}f = (D_x f)\cdot\Theta_x + (D_y f)\cdot\Theta_y$.

В частности, ядро

$$\ker d^0_{ext} = \big\{f \in \mathcal{A} \mid D_x f = D_y f = 0\big\} = \big\{f \in \mathbb{R} \subset \mathcal{A}\big\} \simeq \mathbb{R}.$$

Предложение 1.3.33. *Образ $D_z(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_z$, где $z = x, y$.*

Доказательство. Действительно, очевидно, $D_z(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_z$. С другой стороны, пусть $g(z) = \varrho(z)z \in \mathcal{A}_z$, тогда $g = D_z f$, где функция $f(z) = \int_0^z \varrho(t)dt \in \mathcal{A}_z \subset \mathcal{A}$. □

В частности, образ

$$\operatorname{im} d^0_{ext}(S) = \big\{\omega = f\cdot\Theta_x + g\cdot\Theta_y \mid f \in \mathcal{A}_x,\ g \in \mathcal{A}_y\big\}.$$

Предложение 1.3.34. *Формы $\Theta_x, \Theta_y \in \Omega^1_{ext}(S)$ замкнутые.*

Доказательство. Действительно, например,

$$\begin{aligned}(d^1_{ext}\Theta_x)&(D_x\wedge D_y)\\ &=\frac{1}{2}\big\{D_x(\Theta_x(D_y))-D_y(\Theta_x(D_x))-\Theta_x([D_x,D_y])\big\}\\ &=\frac{1}{2}\big\{D_x(0)-D_y(1)-\Theta_x(0)\big\}=0.\end{aligned}$$

□

В частности, для формы $\omega=f\cdot\Theta_x+g\cdot\Theta_y\in\Omega^1_{ext}(S)$, $f\in\mathfrak{M}_x$, $g\in\mathfrak{M}_y$, имеем

$$\begin{aligned}d^1_{ext}\omega&=d^0_{ext}f\wedge\Theta_x+d^0_{ext}g\wedge\Theta_y\\ &=(D_xf)\cdot\Theta_x\wedge\Theta_x+(D_yg)\cdot\Theta_y\wedge\Theta_y=0,\end{aligned}$$

так что $d^1_{ext}=0$, т.е. $\ker d^1_{ext}=\Omega^1_{ext}(S)$, $\operatorname{im} d^1_{ext}=0$.

Очевидно, дифференциалы $d^p_{ext}=0$ при $p>1$.

Подводя итоги, приходим к выводу, что справедлива

Теорема 2. *Пространства когомологий*

$$H^p_{ext}(S)=\ker d^p_{ext}\big/\operatorname{im} d^{p-1}_{ext}\simeq\begin{cases}\mathbb{R}, & p=0,\\ \mathbb{R}^2, & p=1,\\ \mathbb{R}, & p=2,\\ 0, & p>2.\end{cases}$$

Аналогичным образом рассматриваются две другие геометрии множества S. Полезно проделать это в качестве упражнения.

1.4 Спектральная последовательность

Для лучшего понимания содержания этой секции рекомендуется предварительно прочесть секцию 1.7 лекций [14]. Термин «модуль» ниже означает «$\mathfrak{M}$-модуль».

1.4.1 Картанова подалгебра

Подалгебра $\mathfrak{C}$ алгебры Ли $\mathfrak{D}$ называется *картановой*, если одновременно множество $\mathfrak{C}$ – свободный подмодуль конечной размерности $m\in\mathbb{N}$ ($\dim_{\mathfrak{M}}\mathfrak{C}=m$) модуля $\mathfrak{D}$. Ниже считаем, что наряду с компонентами $\mathbb{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{K}$, удовлетворяющим условиям (M-D) – (D-K) (см. подсекцию 1.3.1), задана картанова подалгебра $\mathfrak{C}$ алгебры Ли $\mathfrak{D}$.

1.4.2 Симметрии

Нормализатор подалгебры $\mathfrak{C}$ в алгебре Ли $\mathfrak{D}$ есть множество

$$\mathfrak{LB} = \left\{ X \in \mathfrak{D} \mid [X, Y] \in \mathfrak{C} \quad \text{для всех} \quad Y \in \mathfrak{C} \right\}.$$

Предложение 1.4.1. *Нормализатор $\mathfrak{LB}$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$, а подалгебра $\mathfrak{C}$ – ее идеал.*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{LB}$ – линейное пространство, и подалгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{LB}$. Далее, пусть $X, Y \in \mathfrak{LB}$, тогда, в силу тождества Якоби,

$$[[X, Y], Z] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z] \in \mathfrak{C}$$

для всех $Z \in \mathfrak{C}$, т.е. $[X, Y] \in \mathfrak{LB}$, и значит $\mathfrak{LB}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$. Ну и конечно, $\mathfrak{C}$ – идеал алгебры Ли $\mathfrak{LB}$, поскольку, по определению, $[X, Y] \in \mathfrak{C}$ для всех $X \in \mathfrak{LB}$ и $Y \in \mathfrak{C}$. □

Алгебра Ли $\mathfrak{LB}$ называется *алгеброй Ли-Беклунда*, а фактор-алгебра $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{LB}/\mathfrak{C}$ называется *алгеброй симметрий.*

1.4.3 Картанова фильтрация

Пусть $\Omega = \Omega(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ – модуль коцепей со значениями в $\mathfrak{K}$. Коцепь $\omega \in \Omega^q$ называется *p-картановой*, если $\omega = 0$ на $(\wedge^{p-1}\mathfrak{D}) \wedge (\wedge^{q-p+1}\mathfrak{C})$, т. е. если $\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = 0$ при $X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathfrak{D}$ и $X_p, \ldots, X_q \in \mathfrak{C}$, где $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $\mathfrak{C}^p\Omega^q$ модуль всех p-картановых q-коцепей со значениями в $\mathfrak{K}$. По построению, для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ имеем:

- ⋆ $\mathfrak{C}^0\Omega^q = \Omega^q$,
- ⋆ $\mathfrak{C}^p\Omega^q \supset \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^q$ для любого $p \in \mathbb{Z}_+$,
- ⋆ $\mathfrak{C}^p\Omega^q = 0$ для всех $p > q$,
- ⋆ $\mathfrak{C}^p\Omega^q = \mathfrak{C}^{q-m}\Omega^q$ для всех $p \leq q - m$, где $m = \dim_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}$.

В частности, для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ определена *убывающая фильтрация* модуля Ω^q

$$\Omega^q = \mathfrak{C}^0\Omega^q \supset \mathfrak{C}^1\Omega^q \supset \cdots \supset \mathfrak{C}^p\Omega^q \supset \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^q \supset \cdots \supset \mathfrak{C}^q\Omega^q \supset 0.$$

В свою очередь, градуированный модуль $\Omega = \oplus_{q\in\mathbb{Z}_+}\Omega^q$ также имеет убывающую фильтрацию

$$\Omega = \mathfrak{C}^0\Omega \supset \mathfrak{C}^1\Omega \supset \cdots \supset \mathfrak{C}^p\Omega \supset \mathfrak{C}^{p+1}\Omega \supset \ldots, \quad \mathfrak{C}^p\Omega = \oplus_{q\geq p}\mathfrak{C}^p\Omega^q,$$

которую ниже будем называть *картановой*. По построению, градуировка и картанова фильтрация модуля Ω совместимы (иначе говоря, Ω – градуированный модуль с фильтрацией), причем эта фильтрация регулярная.

1.4.4 Спектральная последовательность

Наличие фильтрации позволяет рафинировать формальный комплекс де Рама $\{\Omega, d\} = \{\Omega^q, d^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, поскольку справедливо

Предложение 1.4.2. *Картанова фильтрация совместима с дифференциалом $d : \Omega \to \Omega$, подробнее*

$$d\mathfrak{C}^p\Omega^q \subset \mathfrak{C}^p\Omega^{q+1} \quad \text{\textit{для всех}} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Достаточно вспомнить формулу для дифференциала (см. Предложение 1.3.21), воспользоваться определением p-картановости и учесть, что $\mathfrak{C}$ – алгебра Ли. □

Таким образом, определена градуированная спектральная последовательность $\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}$, где

- ⋆ $E_r^{pq} = Z_r^{pq} \big/ \big(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}\big)$,
- ⋆ $Z_r^{pq} = \{\omega \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}\}$
  $= \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \cap d^{-1}\mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}$,
- ⋆ $B_r^{pq} = \{\omega = d\chi \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid \chi \in \mathfrak{C}^{p-r}\Omega^{p+q-1}\}$
  $= \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \cap d\mathfrak{C}^{p-r}\Omega^{p+q-1}$,
- ⋆ $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}, \quad d_r^{pq}([\omega]_r^{pq}) = [d\omega]_r^{p+r,p-q+1}$.

(Здесь для удобства положено $\mathfrak{C}^p\Omega^q = \Omega^q$ при $p < 0$, $[\omega]_r^{pq}$ означает класс эквивалентности коцепи $\omega \in Z_r^{pq}$ в фактор-модуле E_r^{pq}.)

Предложение 1.4.3. *Справедливы равенства:*

- $\star$ $E_r^{pq} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q}/\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$ *при всех* $r \le 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}$*;*
- $\star$ $E_r^{pq} = 0$ *при всех* $p < 0, \quad r, q \in \mathbb{Z}$*;*
- $\star$ $E_r^{pq} = 0$ *при всех* $q < 0$, $q > m, \quad r, p \in \mathbb{Z}$*, где* $m = \dim_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}$*.*

Доказательство. Действительно, по построению, при $r \le 0$ модули $Z_r^{pq} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q}$, $Z_{r-1}^{p+1,q-1} = \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$, $B_{r-1}^{pq} = d\mathfrak{C}^{p-r+1}\Omega^{p+q-1}$, так что $B_{r-1}^{pq} \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ и $E_r^{pq} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q}/\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$.

Далее, при $p \le 0$ модули $\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} = \Omega^{p+q}$, так что при $p < 0$ имеем $Z_r^{pq} = \{\omega \in \Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}\} = Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, и значит $E_r^{pq} = 0$.

Аналогично, по построению, модули $\mathfrak{C}^p\Omega^q = 0$ при $p > q$, так что $\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} = 0$ при $q < 0$, а в этом случае и $E_r^{pq} = 0$.

Наконец, при $p \le q - m$ имеем $\mathfrak{C}^p\Omega^q = \mathfrak{C}^{q-m}\Omega^q$, другими словами, $\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} = \mathfrak{C}^{p+q-m}\Omega^{p+q}$, при $q \ge m$, а при $q > m$ по построению имеем $\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q} = \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{(p+1)+(q-1)} = \mathfrak{C}^{p+q-m}\Omega^{p+q} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Z_{r-1}^{p+1,q-1} &= \{\omega \in \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{(p+1)+(r-1)}\Omega^{p+q+1}\} \\ &= \{\omega \in \mathfrak{C}^{p}\Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}\} = Z_r^{pq}, \end{aligned}$$

и значит опять $E_r^{pq} = 0$. □

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что

$$\left\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid r, p \in \mathbb{Z}_+, 0 \le q \le m\right\}.$$

В частности,

- $\star$ $E_0^{pq} = \mathfrak{C}^P\Omega^{p+q}/\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$,
- $\star$ $E_1^{pq} = \left[\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \cap d^{-1}\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q+1}\right]/\left[d\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q-1} + \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}\right]$.

Доказательство следующих двух предложений в более общей постановке можно найти, например, в [14], секция 1.7.

Предложение 1.4.4. *Справедливы равенства*

$$E_{r+1}^{pq} = \ker d_r^{pq} / \operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1} \quad \text{\textit{для всех}} \quad r, p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le q \le m.$$

Положим

$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} \big/ \big(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}\big), \quad p,q \in \mathbb{Z},$$

где

$$Z_\infty^{pq} = \{\omega \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid d\omega = 0\},$$
$$B_\infty^{pq} = \{\omega = d\chi \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid \chi \in \Omega^{p+q-1}\}.$$

Предложение 1.4.5. *Для любых* $p, q \in \mathbb{Z}$ *имеет место равенство*

$$\varinjlim E_r^{pq} = E_\infty^{pq}.$$

В приложениях, как правило, используются отдельные члены спектральной последовательности. Так в алгебро-геометрическом анализе дифференциальных уравнений важную роль играют следующие члены:

- ⋆ $E_1^{0m} = \Omega^m \big/ \{d\Omega^{m-1} + \mathfrak{C}\Omega^m\}$ – пространство *функционалов*, представители классов эквивалентности называются *лагранжианами*;
- ⋆ $E_1^{0,m-1} = \{\omega \in \Omega^{m-1} \mid d\omega \in \mathfrak{C}\Omega^m\} \big/ \{d\Omega^{m-2} + \mathfrak{C}\Omega^{m-1}\}$ – пространство *законов сохранения*, представители классов эквивалентности называются *сохраняющимися токами*;
- ⋆ $E_1^{pm} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+m} \big/ \{d\mathfrak{C}^p\Omega^{p+m-1} + \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+m}\}$ – пространство *функциональных p-форм*, $p \in \mathbb{N}$;
- ⋆ $d_1^{pm} : E_1^{pm} \to E_1^{p+1,m}$ – *функциональные (вариационные) дифференциалы* , $p \in \mathbb{Z}_+$, дифференциал $\delta = d_1^{0m}$ называется *оператором Эйлера-Лагранжа* .

1.4.5 Некоторые действия

Посмотрим теперь как на элементах спектральной последовательности действуют отображения ι_D и L_D. Легко проверяется

Предложение 1.4.6. *Пусть* $\omega \in \mathfrak{C}^p\Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, *тогда*

- ⋆ $\iota_D(\omega) \in \mathfrak{C}^{p-1}\Omega^{q-1}$ *для всех* $D \in \mathfrak{D}$,
- ⋆ $\iota_D(\omega) \in \mathfrak{C}^p\Omega^{q-1}$ *для всех* $D \in \mathfrak{C}$,

* $L_D(\omega) \in \mathfrak{C}^{p-1}\Omega^q$ *для всех* $D \in \mathfrak{D}$,
* $L_D(\omega) \in \mathfrak{C}^{p}\Omega^q$ *для всех* $D \in \mathfrak{LB}$.

Предложение 1.4.7. *Для каждого* $\mathbf{D} = D + \mathfrak{C} \in \mathrm{Sym}_{\mathfrak{C}}$ *определены линейные отображения*

$$(\iota_{\mathbf{D}})_r : E_r^{pq} \to E_r^{p-1,q}, \quad [\omega]_r^{pq} \mapsto [\iota_D \omega]_r^{p-1,q},$$

для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$ *и* $r = 0, 1$.

Доказательство. Проводится прямыми вычислениями (которые полезно проделать в качестве упражнения), единственная тонкость – при доказательстве того факта, что $d(\iota_D\omega) \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q+1}$ для всех $D \in \mathfrak{LB}$, $\omega \in Z_1^{pq}$, следует воспользоваться определяющим равенством $d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D$ (см. Предложение 1.3.21 на стр. 30). □

Предложение 1.4.8. *Для каждого* $\mathbf{D} = D + \mathfrak{C} \in \mathrm{Sym}_{\mathfrak{C}}$ *определены линейные отображения*

$$(L_{\mathbf{D}})_1 : E_1^{pq} \to E_1^{pq}, \quad [\omega]_r^{pq} \mapsto [L_D\omega]_1^{pq}, \quad \text{для всех} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Опять единственная тонкость – при доказательстве того факта, что $L_X\omega \in d\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q-1} + \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$ для всех $X \in \mathfrak{C}$, $\omega \in Z_1^{pq}$, следует воспользоваться все тем же определяющим равенством. □

Глава 2

Основы алгебро-геометрического анализа дифференциальных уравнений

Стандартные обозначения

Будем использовать мультииндексные обозначения:

- ⋆ $\mathbb{I} = \mathbb{Z}_+^m = \left\{ i = (i^1, \ldots, i^m) \mid i^\mu \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le \mu \le m \right\};$
- ⋆ $\|i\| = i^1 + \cdots + i^m \in \mathbb{Z}_+$ для всех $i \in \mathbb{I}$;
- ⋆ $\mathbb{I}(p) = \left\{ i \in \mathbb{I} \mid \|i\| \le p \right\}$, $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ⋆ $i + j = (i^1 + j^1, \ldots, i^m + j^m) \in \mathbb{I}$ для всех $i, j \in \mathbb{I}$;
- ⋆ $(\mu) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{I}$ для всех $1 \le \mu \le m$ (1 стоит на μ-м месте).

2.1 Пространство джетов

2.1.1 Переменные

Будем обозначать:

- ⋆ $\mathbb{R}^m = \big\{x = (x^1, \ldots, x^m) \mid x^\mu \in \mathbb{R},\ 1 \le \mu \le m\big\}$ – евклидово пространство *независимых переменных*, $m \in \mathbb{N}$,
- ⋆ $\mathbb{R}^{\mathrm{A}} = \big\{u = (u^\alpha) \mid u^\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathrm{A}\big\}$ – евклидово пространство *зависимых переменных*, где A – конечное множество индексов,
- ⋆ $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}(p) = \big\{\mathbf{u} = (u^\alpha_i) \mid u^\alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}(p)\big\}$ – евклидово пространство *дифференциальных переменных порядка* $\le p$, $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ⋆ $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} = \big\{\mathbf{u} = (u^\alpha_i) \mid u^\alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\big\}$ – пространство *дифференциальных переменных порядка* $\le \infty$, наделенное естественной топологией проективного предела евклидовых пространств $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)}$,
$$\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} = \varprojlim_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)}.$$
- ⋆ $\mathbb{J}(p) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)} = \big\{(x, \mathbf{u}) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)}\big\}$ – евклидово пространство *джетов порядка* p, $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ⋆ $\mathbb{J} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} = \big\{(x, \mathbf{u}) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}\big\}$ – пространство *джетов порядка* ∞, наделенное естественной топологией проективного предела евклидовых пространств $\mathbb{J}(p)$,
$$\mathbb{J} = \varprojlim_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{J}(p).$$

Введем два векторных расслоения над $\mathbb{R}^m$:

- ⋆ $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^m$, $(x, u) \mapsto x$,
- ⋆ $\mathbb{J} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} \xrightarrow{\pi_J} \mathbb{R}^m$, $(x, \mathbf{u}) \mapsto x$.

Хотя эти расслоения и тривиальные, но они мотивируют приводимые ниже стандартные геометрические конструкции.

2.1.2 Функции

Введем следующие пространства гладких (т.е. класса $\mathcal{C}^\infty$) функций

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ – алгебра всех вещественных гладких функций на $\mathbb{R}^m$, наделенная естественной топологией покомпонентной равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков;

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ всех гладких сечений расслоения $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}} \to \mathbb{R}^m$, т.е. пространство всех гладких функций на $\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$, наделенное естественной топологией покомпонентной равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков, в частности, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$;

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ всех гладких сечений расслоения джетов $\mathbb{J} \to \mathbb{R}^m$, т.е. пространство всех гладких функций на $\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$, наделенное естественной топологией покомпонентной равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков;

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p)) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p), \mathbb{R})$, – алгебра всех вещественных гладких функций на $\mathbb{J}(p)$, наделенная естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков, $p \in \mathbb{Z}_+$;

- ⋆ алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R})$ – индуктивный предел алгебр $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p))$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}) = \varinjlim_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p)).$$

  По построению функция $f = f(x, \mathbf{u}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p))$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}_+$, наименьшее из таких номеров p называется *дифференциальным порядком* (или просто *порядком*) функции f (другими словами, p – дифференциальный порядок функции $f(x, \mathbf{u})$, если $\partial^i_\alpha f \neq 0$ для некоторых $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in I$, $\|i\| = p$, тогда как $\partial^i_\alpha f = 0$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in I$, $\|i\| > p$).

  Здесь и всюду ниже $\partial^i_\alpha = \partial_{u^\alpha_i}$ – частная производная по переменной u^α_i.

2.1.3 Джеты

Определено линейное отображение

$$\boldsymbol{j} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}),$$

которое каждой функции $\phi = (\phi^\alpha(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ ставит в соответствие ее *джет* $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi) = (\phi^\alpha_i(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$, где компоненты $\phi^\alpha_i(x) = \partial_{x^i}\phi^\alpha(x)$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, $\partial_{x^i} = (\partial_{x^1})^{i^1} \dots (\partial_{x^m})^{i^m}$, здесь и всюду ниже ∂_{x^μ} – частная производная по переменной x^μ, $1 \le \mu \le m$. Подробнее, элемент $\boldsymbol{j}(\phi)(x) = (\partial_{x^i}\phi^\alpha(x)) \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$ называется *(бесконечным) джетом функции* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ *в точке* $x \in \mathbb{R}^m$.

2.1.4 Мультипликаторы и дифференцирования

По построению $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ есть унитальная ассоциативная коммутативная алгебра с обычными поточечными алгебраическими операциями. В частности, алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. В свою очередь, алгебра Ли $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ есть бесконечномерный свободный $\mathcal{A}$-модуль,

$$\mathfrak{D} = \left\{ X = \sum_{1\le\mu\le m} \xi^\mu \cdot \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha\in\mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \eta^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha \;\middle|\; \xi^\mu, \eta^\alpha_i \in \mathcal{A} \right\}$$

с (топологическим) базисом $\{\partial_{x^\mu}, \partial^i_\alpha \mid 1 \le \mu \le m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\}$. Обратим внимание, что несмотря на то что каждый дифференциальный оператор X содержит бесконечное число слагаемых $\eta^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha$ действие $X(f)$ определено корректно, поскольку по построению для всякой дифференциальной функции $f \in \mathcal{A}$ лишь конечное число частных производных $\partial^i_\alpha f \ne 0$.

Расслоение $\mathbb{J} \xrightarrow{\pi_J} \mathbb{R}^m$ выделяет $\mathcal{A}$-подмодуль

$$\mathfrak{D}_V = \left\{ V = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \zeta^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha \;\middle|\; \zeta^\alpha_i \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathfrak{D}$$

вертикальных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$, с характерным свойством

$$V(\pi^*_J(\phi)) = 0 \quad \text{для всех} \quad V \in \mathfrak{D}_V,\ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m),$$

напомним, что $\pi^*_J : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$, $\phi \mapsto \pi^*_J(\phi) = \phi \circ \pi_J$ (подробнее см., например, [14], секция 2.7).

Предложение 2.1.1. *$\mathcal{A}$-модуль $\mathfrak{D}_V$ всех вертикальных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{D}$, причем*

$$[U,V] = W \quad \text{для всех} \quad U = \sum \xi_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i,\ V = \sum \eta_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i \in \mathfrak{D}_V,$$

где $W = \sum \zeta_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i \in \mathfrak{D}_V$, компоненты $\zeta_i^\alpha = U(\eta_i^\alpha) - V(\xi_i^\alpha)$.

Доказательство. Предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

В частности, вертикальные дифференцирования определяют на пространстве джетов $\mathbb{J}$ инволютивное распределение, интегральные подмногообразия которого суть слои $\pi_J^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Более того, пространство джетов $\mathbb{J}$ покрывается единой расслаивающей картой с глобальными координатами – исходными переменными $(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{J}$.

2.1.5 Картанова подалгебра

Для каждого $1 \leq \mu \leq m$ определена *полная частная производная*

$$D_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha \in \mathrm{A}, i \in \mathbb{I}} u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot \partial_\alpha^i \in \mathfrak{D}.$$

Будем обозначать

$$f\big|_{\boldsymbol{\phi}} = f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) = f(x, \boldsymbol{\phi}(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

для всех $f = f(x, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^{\mathrm{A}})$, $x \in \mathbb{R}^m$. В частности,

$$f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)} = f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(x) = f(x, \boldsymbol{j}(\phi)(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

для всех $f \in \mathcal{A}$, $\phi = \phi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$, $x \in \mathbb{R}^m$.

Предложение 2.1.2. *Для данной функции $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^{\mathrm{A}})$ равенство*

$$\partial_{x^\mu}\big(f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)\big) = \big(D_\mu f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)$$

справедливо для всех $f \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi)$ для некоторой $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ (фактически, $\phi = (\phi^\alpha = \phi_0^\alpha)$, если $\boldsymbol{\phi} = (\phi_i^\alpha)$, где мультииндекс $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{I}$).

Доказательство. Действительно, согласно правилу дифференцирования сложной функции, левая часть доказываемого равенства есть

$$\partial_{x^\mu}\big(f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)\big) = \big(\partial_{x^\mu} f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) + \sum_{\alpha,i}\big(\partial_\alpha^i f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)\cdot\partial_{x^\mu}\phi_i^\alpha(x),$$

тогда как правая часть по определению полной частной производной равна

$$\big(D_\mu f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) = \big(\partial_{x^\mu} f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) + \sum_{\alpha,i}\big(\partial_\alpha^i f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)\cdot u_{i+(\mu)}^\alpha\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x).$$

Таким образом, равенство справедливо для всех $f \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\partial_{x^\mu}\phi_i^\alpha(x) = u_{i+(\mu)}^\alpha\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) = \phi_{i+(\mu)}^\alpha(x)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, $1 \le \mu \le m$. Многомерной индукцией по мультииндексу $i \in \mathbb{I}$ легко проверяется, что это имеет место тогда и только тогда, когда $\phi_i^\alpha(x) = \partial_{x^i}\phi_0^\alpha(x)$, т.е. когда $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi)$, где $\phi = \phi_0$. □

Предложение 2.1.3. *Полные частные производные коммутируют, т.е.*

$$[D_\mu, D_\nu] = 0 \quad \textit{для всех} \quad 1 \le \mu, \nu \le m.$$

Доказательство. Можно вычислить коммутатор непосредственно, исходя из определения полной частной производной, а можно воспользоваться предыдущим Предложением и учесть, что обычные частные производные коммутируют. Полезно проделать и то и другое в качестве упражнения. □

Положим

$$\mathfrak{D}_H = \left\{ X = \sum_{1\le\mu\le m} \xi^\mu \cdot D_\mu \;\middle|\; \xi^\mu \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathfrak{D}.$$

По построению, $\mathfrak{D}_H$ – свободный m-мерный $\mathcal{A}$-модуль, кроме того, $\mathfrak{D}_H$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$, поскольку

$$[X, Y] = Z = \sum \zeta^\mu \cdot D_\mu \in \mathfrak{D}_H, \quad \text{где} \quad \zeta^\mu = X(\eta^\mu) - Y(\xi^\mu),$$

для всех $X = \sum \xi^\mu \cdot D_\mu, Y = \sum \eta^\mu \cdot D_\mu \in \mathfrak{D}_H$. Алгебра Ли $\mathfrak{D}_H$ называется *картановой подалгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{D}$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$.

Предложение 2.1.4. *Картанова подалгебра $\mathfrak{D}_H$ определяет связность в расслоении $\mathbb{J} \xrightarrow{\pi_J} \mathbb{R}^m$. Именно, имеет место разложение $\mathcal{A}$-модуля $\mathfrak{D}$ в прямую сумму*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_H \oplus \mathfrak{D}_V.$$

Доказательство. Действительно, пусть $X \in \mathfrak{D}$ тогда

$$\begin{aligned} X &= \sum_{1\le\mu\le m} \xi^\mu \cdot \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha\in\mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \eta_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i \\ &= \sum_{1\le\mu\le m} \xi^\mu \cdot D_\mu + \sum_{\alpha\in\mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \zeta_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i \\ &= H + V \in \mathfrak{D}_H \oplus \mathfrak{D}_V, \end{aligned}$$

где $\zeta_i^\alpha = \eta_i^\alpha - \sum_\mu \xi^\mu \cdot u_{i+(\mu)}^\alpha$, $\eta_i^\alpha = \zeta_i^\alpha + \sum_\mu \xi^\mu \cdot u_{i+(\mu)}^\alpha$. $\square$

Следуя принятой в теории связностей терминологии, картановы дифференцирования называют *горизонтальными.*

Поскольку $\mathcal{A}$-модуль $\mathfrak{D}_H$ является и алгеброй Ли, то определяемая им связность плоская, другими словами *распределение Картана* на пространстве джетов $\mathbb{J}$, задаваемое алгеброй Ли $\mathfrak{D}_H$ инволютивное.

Предложение 2.1.5. *Интегральные подмногообразия распределения Картана $\mathfrak{D}_H$ на $\mathbb{J}$ имеют вид*

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{u} - \boldsymbol{j}(\phi)(x) = \mathbf{0}, \quad \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}).$$

Доказательство. Действительно, можно проверить, что для распределения Картана на всяком m-мерном интегральном подмногообразии в качестве координат можно выбрать независимые переменные $x \in \mathbb{R}^m$ (см., например, [6]), так что без ограничения общности можно считать, что подмногообразие задается уравнениями

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^{\mathrm{A}}).$$

Такое подмногообразие будет интегральным для $\mathfrak{D}_H$ тогда и только тогда, когда

$$D_\mu(\Phi_i^\alpha)\big|_{\mathbf{\Phi}=\mathbf{0}} = D_\mu(u_i^\alpha - \phi_i^\alpha(x))\big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\phi}(x)} = 0,$$

т.е. когда

$$(u_{i+(\mu)}^\alpha - \partial_{x^\mu}\phi_i^\alpha(x))\big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\phi}(x)} = \phi_{i+(\mu)}^\alpha(x) - \partial_{x^\mu}\phi_i^\alpha(x) = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq \mu \leq m$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$. Отсюда по индукции выводится требуемое представление $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi)$ с $\phi = \phi_0$. □

Если бы пространство джетов $\mathbb{J}$ было конечномерным, отсюда следовало бы, что через каждую точку пространства $\mathbb{J}$ проходит одно и только одно интегральное подмногообразие распределения $\mathfrak{D}_H$, более того, на пространстве $\mathbb{J}$ существовал бы атлас из расслаивающих карт, в которых интегральные подмногообразия были бы горизонтальными. В действительности, пространство $\mathbb{J}$ бесконечномерное, и через каждую точку пространства $\mathbb{J}$ бесконечное число интегральных подмногообразий. Последний факт есть следствие того, что каждое интегральное подмногообразие имеет вид $\mathbf{u} = \boldsymbol{j}(\phi)$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\mathrm{A})$, такое подмногообразие проходит через точку $(x_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{J}$ тогда и только тогда, когда набор $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^\mathrm{A}_\mathbb{I}$ есть множество коэффициентов Тейлора функции $u = \phi(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, а гладкая функция (в отличие от аналитической) восстанавливается по своим тейлоровским коэффициентам, как известно, неоднозначно. В частности, заведомо не существует расслаивающих карт.

Замечание. Отметим, что переход в вещественно аналитическую категорию приводит к своим трудностям, например, отсутствует разбиение единицы.

2.1.6 Операторы в полных частных производных

Наряду с пространством $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ введем еще пространство

$$\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}^\mathrm{A}) = \big\{ f = (f^\alpha) \mid f^\alpha \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathrm{A} \big\} = \mathcal{A}^\mathrm{A},$$

и его поточечное дуальное

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}_\mathrm{A}) = \big\{ f = (f_\alpha) \mid f_\alpha \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathrm{A} \big\} = \mathcal{A}_\mathrm{A},$$

с поточечным спариванием

$$\mathcal{E}^* \times \mathcal{E} \to \mathcal{A}, \quad (g, f) \mapsto \langle g, f \rangle = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} g_\alpha \cdot f^\alpha.$$

Каждой функции $L \in \mathcal{A}$ ставится в соответствие линейный оператор в полных частных производных (формальный дифференциал

Фреше)

$$L_* : \mathcal{E} \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto L_*(f) = \sum_{\alpha,i} \left(\partial^i_\alpha L\right) \cdot D_i f^\alpha.$$

и его дуальный по Лагранжу

$$L^* : \mathcal{A} \to \mathcal{E}^*, \quad M \mapsto L^*(M), \quad L^*(M)_\alpha = \sum_i (-D)_i \big((\partial^i_\alpha L) \cdot M\big).$$

Здесь и всюду ниже

$$D_i = (D_1)^{i^1} \dots (D_m)^{i^m}, \quad (-D)_i = (-1)^{\|i\|} D_i \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{I}.$$

Далее, каждой функции $f \in \mathcal{E}$ ставится в соответствие линейный оператор в полных частных производных

$$f_* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad h \mapsto f_*(h), \quad f_*(h)^\alpha = \sum_{\beta,j} \left(\partial^j_\beta f^\alpha\right) \cdot D_j h^\beta,$$

и его дуальный по Лагранжу

$$f^* : \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*, \quad g \mapsto f^*(g), \quad f^*(g)_\beta = \sum_{\alpha,i} (-D)_i \big((\partial^i_\beta f^\alpha) \cdot g_\alpha\big).$$

Наконец, каждой функции $g \in \mathcal{E}^*$ ставится в соответствие линейный оператор в полных частных производных

$$g_* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*, \quad h \mapsto g_*(h), \quad g_*(h)_\alpha = \sum_{\beta,j} \left(\partial^j_\beta g_\alpha\right) \cdot D_j h^\beta,$$

и его дуальный по Лагранжу

$$g^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*, \quad h \mapsto g^*(h), \quad g^*(h)_\alpha = \sum_{\beta,i} (-D)_i \big((\partial^i_\alpha g_\beta) \cdot h^\beta\big).$$

Предложение 2.1.6. *Для данной функции $g \in \mathcal{E}^*$ операторное равенство $g_* = g^*$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\partial^j_\beta g_\alpha = (-1)^{\|j\|} \sum_k \binom{j+k}{k} (-D)_k (\partial^{j+k}_\alpha g_\beta),$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, $j \in \mathbb{I}$.

Доказательство. Следует лишь воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения. □

2.1.7 Симметрии

Нормализатор подалгебры $\mathfrak{D}_H$ в алгебре Ли $\mathfrak{D}$ есть множество *дифференцирований Ли-Беклунда*

$$\mathfrak{D}_{LB} = \big\{X \in \mathfrak{D} \mid [X, Y] \in \mathfrak{D}_H \quad \text{для всех} \quad Y \in \mathfrak{D}_H\big\}.$$

Согласно Предложению 1.4.1, множество $\mathfrak{D}_{LB}$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$, а картанова подалгебра $\mathfrak{D}_H$ – ее идеал, так что определена фактор-алгебра $\mathrm{Sym} = \mathfrak{D}_{LB}/\mathfrak{D}_H$ симметрий пространства джетов $\mathbb{J}$.

Предложение 2.1.7. *Вертикальное дифференцирование* $V \in \mathfrak{D}_V$ *удовлетворяет равенствам*

$$[V, D_\mu] = 0, \quad 1 \le \mu \le m,$$

тогда и только тогда, когда

$$V = \mathrm{E}_f = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}, i \in \mathbb{I}} (D_i f^\alpha) \cdot \partial_\alpha^i \quad \textit{для некоторого} \quad f \in \mathcal{E}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $V = \sum_{\alpha, i} \zeta_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i$ тогда

$$\begin{aligned}[V, D_\mu] &= \sum_{\alpha, i} \big(V(u_{i+(\mu)}^\alpha) - D_\mu(\zeta_i^\alpha)\big) \cdot \partial_\alpha^i \\ &= \sum_{\alpha, i} \big(\zeta_{i+(\mu)}^\alpha - D_\mu(\zeta_i^\alpha)\big) \cdot \partial_\alpha^i = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \le \mu \le m\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда $\zeta_{i+(\mu)}^\alpha = D_\mu \zeta_i^\alpha$ для всех $1 \le \mu \le m$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$. Последнее, очевидно, имеет место лишь при условии $\zeta_i^\alpha = D_i f^\alpha$, где $f^\alpha = \zeta_0^\alpha$. □

Замечание. Обратим внимание на равенство

$$\mathrm{E}_f(L) = L_*(f) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{E},\ L \in \mathcal{A}.$$

Дифференцирования E_f, $f \in \mathcal{E}$, называются *эволюционными*, множество

$$\mathfrak{D}_E = \big\{\mathrm{E}_f \in \mathfrak{D}_V \mid f \in \mathcal{E}\big\}$$

образует подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{D}_V$, поскольку справедливо

Предложение 2.1.8. *Имеют место равенства*

$$[\mathrm{E}_f, \mathrm{E}_g] = \mathrm{E}_h \quad \textit{для всех} \quad f, g \in \mathcal{E},$$

где $h^\alpha = \mathrm{E}_f(g^\alpha) - \mathrm{E}_g(f^\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{A}$.

Доказательство. Предлагается проделать в качестве упражнения. □

Предложение 2.1.9. *Имеет место изоморфизм алгебр Ли*

$$\mathrm{Sym} = \mathfrak{D}_{LB}/\mathfrak{D}_H \simeq \mathfrak{D}_E.$$

Доказательство. Действительно, пусть $X = H + V \in \mathfrak{D}$, где $H \in \mathfrak{D}_H$, $V \in \mathfrak{D}_V$. По построению $[H, Y] \in \mathfrak{D}_H$ для любого $Y \in \mathfrak{D}_H$, так что $X \in \mathfrak{D}_{LB}$ тогда и только тогда, когда $[V, Y] \in \mathfrak{D}_H$ для всех $Y \in \mathfrak{D}_H$. Легко проверяется (проделать это в качестве упражнения!), что последнее имеет место тогда и только тогда, когда $[V, D_\mu] = 0$ для всех $1 \leq \mu \leq m$, т.е. когда (см. Предложение 2.1.7) $V = \mathrm{E}_f$ с некоторым $f \in \mathcal{E}$. Таким образом, в каждом классе эквивалентности из $\mathrm{Sym}\,\mathfrak{D}_H$ имеется представитель из $\mathfrak{D}_E$. Очевидно, такой представитель единственный, и применение Предложения 2.1.8 завершает доказательство. □

2.1.8 Дифференциальные формы

Определен свободный $\mathcal{A}$-модуль

$$\Omega = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge \mathfrak{D}, \mathcal{A}) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q, \quad \Omega^q = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge^q \mathfrak{D}, \mathcal{A}),$$

дифференциальных форм на пространстве джетов $\mathbb{J}$. В частности,

$$\Omega^1 = \mathfrak{D}^* = \left\{ \omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha, i} \omega^i_\alpha \cdot du^\alpha_i \;\middle|\; \omega_\mu, \omega^i_\alpha \in \mathcal{A} \right\},$$

где лишь конечное число компонент $\omega^i_\alpha \neq 0$, а семейство

$$\left\{ dx^\mu, du^\alpha_i \in \Omega^1 \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I} \right\}$$

есть базис в $\mathcal{A}$-модуле Ω^1, дуальный к базису

$$\left\{ \partial_{x^\mu}, \partial^i_\alpha \in \mathfrak{D} \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I} \right\}$$

в $\mathcal{A}$-модуле $\mathfrak{D}$. Детальное представление при $q > 1$ достаточно громоздкое и имеет следующую структуру

$$\Omega^q = \wedge^q \Omega^1,$$

где внешняя степень берется в категории $\mathcal{A}$-модулей.

Напомним, что для любых $X \in \mathfrak{D}$ и $q \in \mathbb{Z}_+$ определены морфизмы

- ⋆ $\iota_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^q, \Omega^{q-1})$,
- ⋆ $L_X \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Omega^q)$,

(см. подсекцию 1.3.3, где описаны и свойства этих морфизмов). Следуя принятой в данной тематике традиции будем писать $X(\omega)$ вместо $L_X(\omega)$ для всех $X \in \mathfrak{D}$ и $\omega \in \Omega$.

2.1.9 Вариационный бикомплекс

В согласии с общим определением форма $\omega \in \Omega^q$, называется p-*картановой*, если $\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = 0$ при $X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathfrak{D}$ и $X_p, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}_H$, где $p, q \in \mathbb{Z}_+$ (см. подсекцию 1.4.3, стр. 45). Обозначим через $\mathrm{C}^p\Omega^q$ $\mathcal{A}$-модуль всех p-картановых q-форм на пространстве джетов $\mathbb{J}$.

Важную роль играют 1-формы

$$\delta u_i^\alpha = du_i^\alpha - \sum_\nu u_{i+(\nu)}^\alpha \cdot dx^\nu, \quad \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}.$$

Пусть функция $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$. По построению, ее джет $\mathbf{j}(\phi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ порождает одноименное гладкое подмногообразие $\mathbf{j}(\phi) = \{(x, \mathbf{j}(\phi)(x)) \in \mathbb{J} \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ пространства $\mathbb{J}$.

Предложение 2.1.10. *Сужение* $\delta u_i^\alpha\big|_{\mathbf{j}(\phi)} = 0$ *для всех* $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$ *и* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
\delta u_i^\alpha\big|_{\mathbf{j}(\phi)} &= \left(du_i^\alpha - \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu\right)\Big|_{\mathbf{j}(\phi)} \\
&= d\big(\partial_{x^i}\phi^\alpha\big) - \sum_\mu \big(\partial_{x^{i+(\mu)}}\phi^\alpha\big) \cdot dx^\mu \\
&= \sum_\mu \big(\partial_{x^{i+(\mu)}}\phi^\alpha\big) \cdot dx^\mu - \sum_\mu \big(\partial_{x^{i+(\mu)}}\phi^\alpha\big) \cdot dx^\mu = 0,
\end{aligned}$$

где было учтено, что $u_i^\alpha\big|_{\mathbf{j}(\phi)} = \partial_{x^i}\phi^\alpha$. $\square$

Предложение 2.1.11. *для всех* $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, *справедливы утверждения:*

- $\star$ $\delta u_i^\alpha = D_i(\delta u^\alpha)$, *где* $u^\alpha = u_0^\alpha$, $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{I}$,
- $\star$ $\delta u_i^\alpha \in \mathrm{C}^1\Omega^1$.

Доказательство. По построению $L_X \circ d = d \circ L_X$ (см. подсекцию 1.3.3), так что

$$\begin{aligned} D_\mu\big(\delta u_i^\alpha\big) &= D_\mu\big(du_i^\alpha - \sum_\nu u_{i+(\nu)}^\alpha \cdot dx^\nu\big) \\ &= d(D_\mu u_i^\alpha) - \sum_\nu \big((D_\mu u_{i+(\nu)}^\alpha) \cdot dx^\nu - u_i^\alpha \cdot d(D_\mu x^\nu)\big) \\ &= du_{i+(\mu)}^\alpha - \sum_\nu u_{i+(\mu)+(\nu)}^\alpha \cdot dx^\nu = \delta u_{i+(\mu)}^\alpha. \end{aligned}$$

По индукции, отсюда выводим равенство $\delta u_i^\alpha = D_i(\delta u_0^\alpha)$. Далее,

$$\begin{aligned} \delta u_i^\alpha(D_\mu) &= D_\mu(u_i^\alpha) - \sum_\nu u_{i+(\nu)}^\alpha D_\mu(x^\nu) \\ &= u_{i+(\mu)}^\alpha - \sum_\nu u_{i+(\nu)}^\alpha \delta_\mu^\nu = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \leq \mu \leq m, \end{aligned}$$

так что $\delta u_i^\alpha \in \mathrm{C}^1\Omega^1$. $\square$

В частности, всякая 1-форма $\omega \in \Omega^1$ имеет представления:

$$\omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} \omega_\alpha^i \cdot du_i^\alpha = \sum_\mu \chi_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} \omega_\alpha^i \cdot \delta u_i^\alpha,$$

где $\chi_\mu = \omega_\mu + \sum_{\alpha,i} \omega_\alpha^i \cdot u_{i+(\mu)}^\alpha$, $\omega_\mu = \chi_\mu - \sum_{\alpha,i} \omega_\alpha^i \cdot u_{i+(\mu)}^\alpha$.

Таким образом, семейство

$$\big\{dx^\mu, \delta u_i^\alpha \in \Omega^1 \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\big\}$$

образует альтернативный базис в $\mathcal{A}$-модуле Ω^1, более удобный для наших целей. В частности, имеет место разложение в прямую сумму $\mathcal{A}$-модулей

$$\Omega^1 = \Omega_H^1 \oplus \Omega_V^1,$$

где

$$\Omega^1_H = \left\{ \omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu \right\}, \quad \Omega^1_V = \left\{ \omega = \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot \delta u^\alpha_i \right\}.$$

В случае $q > 1$ ситуация аналогичная.

Предложение 2.1.12. *Имеет место разложение в прямую сумму $\mathcal{A}$-модулей:*

$$\begin{aligned}\Omega^q &= \oplus_{p+r=q} \big(\wedge^p \Omega^1_V \big) \wedge \big(\wedge^r \Omega^1_H \big) \\ &= \oplus_{p+r=q} \Omega^p_V \wedge \Omega^r_H = \oplus_{p+r=q} \Omega^{pr},\end{aligned}$$

где внешнее произведение и внешние степени берутся в категории $\mathcal{A}$-модулей. В частности, всякая форма $\omega \in \Omega^{pq}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, имеет единственное представление вида

$$\omega = \frac{1}{q!} \sum_{1 \le \mu_1, \ldots, \mu_q \le m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_q} \wedge (dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_q}),$$

где кососимметрические коэффициенты $\omega_{\mu_1 \ldots \mu_q} \in \Omega^p_V = \wedge^p \Omega^1_V$.

Итак, справедливо

Предложение 2.1.13. *$\mathcal{A}$-модуль Ω биградуирован:*

$$\Omega = \oplus_{p,q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^{pq}.$$

Легко проверяется и

Предложение 2.1.14. *Биградуировка совместима со структурой внешней алгебры, т.е.*

$$\Omega^{pq} \wedge \Omega^{rs} \subset \Omega^{p+r, q+s} \quad \textit{для всех} \quad p, q, r, s \in \mathbb{Z}_+.$$

Подробнее,

$$(\omega \wedge \chi) \wedge (\phi \wedge \psi) = (-1)^{qr} (\omega \wedge \phi) \wedge (\chi \wedge \psi)$$

для всех $\omega \in \Omega^p_V$, $\chi \in \Omega^q_H$, $\phi \in \Omega^r_V$, $\psi \in \Omega^s_H$.

Посмотрим теперь как обстоят дела с внешним дифференциалом $d : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $f \in \mathcal{A} = \Omega^0 = \Omega^{00}$, тогда

$$\begin{aligned} df &= \sum_\mu (\partial_{x^\mu} f) \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} (\partial^i_\alpha f) \cdot du^\alpha_i \\ &= \sum_\mu (D_\mu f) \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} (\partial^i_\alpha f) \cdot \delta u^\alpha_i \\ &= d_H f + d_V f \in \Omega^1_H \oplus \Omega^1_V = \Omega^{01} \oplus \Omega^{10}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_H f &= \sum_\mu (D_\mu f) \cdot dx^\mu, \\ d_V f &= \sum_{\alpha,i} (\partial^i_\alpha f) \cdot \delta u^\alpha_i = f_*(\delta u), \quad \delta u = (\delta u^\alpha) \end{aligned}$$

(см. подсекцию 2.1.6 и Следствие 2.1.1 ниже). В частности,

- ⋆ $d_H x^\mu = dx^\mu$, $d_V x^\mu = 0$, $1 \le \mu \le m$;
- ⋆ $d_H u^\alpha_i = \sum_\mu u^\alpha_{i+(\mu)} \cdot dx^\mu$, $d_V u^\alpha_i = \delta u^\alpha_i$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$.

Пусть $\omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu \in \Omega^1_H = \Omega^{01}$, тогда

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_\mu d\omega_\mu \wedge dx^\mu = \sum_\mu \big(d_H\omega_\mu + d_V\omega_\mu\big) \wedge dx^\mu \\ &= \sum_\mu (d_H\omega_\mu) \wedge dx^\mu + \sum_\mu (d_V\omega_\mu) \wedge dx^\mu \\ &= d_H\omega + d_V\omega \in \Omega^{02} \oplus \Omega^{11}, \end{aligned}$$

где

$$d_H\omega = \sum_\mu d_H\omega_\mu \wedge dx^\mu, \quad d_V\omega = \sum_\mu d_V\omega_\mu \wedge dx^\mu.$$

Пусть $\omega = \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot \delta u^\alpha_i \in \Omega^1_V = \Omega^{10}$, тогда

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{\alpha,i} \big(d\omega^i_\alpha \wedge \delta u^\alpha_i + \omega^i_\alpha \cdot d\delta u^\alpha_i\big) \\ &= \sum_{\alpha,i} \Big(d_H\omega^i_\alpha \wedge \delta u^\alpha_i + d_V\omega^i_\alpha \wedge \delta u^\alpha_i - \omega^i_\alpha \sum_\mu \delta u^\alpha_{i+(\mu)} \wedge dx^\mu\Big) \\ &= \sum_{\alpha,i} \Big(- \delta u^\alpha_i \wedge d_H\omega^i_\alpha - \omega^i_\alpha \sum_\mu \delta u^\alpha_{i+(\mu)} \wedge dx^\mu\Big) + \sum_{\alpha,i} d_V\omega^i_\alpha \wedge \delta u^\alpha_i \\ &= d_H\omega + d_V\omega \in \Omega^{11} \oplus \Omega^{20}, \end{aligned}$$

где

$$
\begin{aligned}
d_H\omega &= -\sum_{\alpha,i}\left(\delta u_i^\alpha \wedge d_H\omega_\alpha^i + \omega_\alpha^i \sum_\mu \delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu\right),\\
d_V\omega &= \sum_{\alpha,i} d_V\omega_\alpha^i \wedge \delta u_i^\alpha,
\end{aligned}
$$

причем мы учли, что

$$
\begin{aligned}
d\delta u_i^\alpha = d\big(du_i^\alpha - \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu\big) &= -\sum_\mu du_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu\\
&= -\sum_\mu \big(\delta u_{i+(\mu)}^\alpha + \sum_\nu u_{i+(\mu)+(\nu)}^\alpha \cdot dx^\nu\big) \wedge dx^\mu\\
&= -\sum_\mu \delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu - \sum_{\mu,\nu} u_{i+(\mu)+(\nu)}^\alpha \cdot dx^\nu \wedge dx^\mu\\
&= -\sum_\mu \delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu \in \Omega^{11}.
\end{aligned}
$$

В общем случае справедливо

Предложение 2.1.15. *Имеет место представление*

$$d = d_H + d_V$$

где

$$d_H : \Omega^{pq} \to \Omega^{p,q+1}, \quad d_V : \Omega^{pq} \to \Omega^{p+1,q}, \quad \textit{для всех} \quad p,q \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться приведенными выше вычислениями и тем фактом, что внешний дифференциал есть косое дифференцирование внешней алгебры Ω (см. Предложение 1.3.25 на стр. 33). □

Более того, справедливо

Предложение 2.1.16. *Выполняются равенства:*

$$d_H \circ d_H = d_H \circ d_V + d_V \circ d_H = d_V \circ d_V = 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$
\begin{aligned}
d \circ d &= (d_H + d_V) \circ (d_H \circ d_V)\\
&= d_H \circ d_H + (d_H \circ d_V + d_V \circ d_H) + d_V \circ d_V = 0,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
d_H \circ d_H &: \Omega^{pq} \to \Omega^{p,q+2},\\
d_H \circ d_V + d_V \circ d_H &: \Omega^{pq} \to \Omega^{p+1,q+1},\\
d_V \circ d_V &: \Omega^{pq} \to \Omega^{p+2,q}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, здесь каждое слагаемое принадлежит своей компоненте прямой суммы (см. Предложение 2.1.13). Следовательно из равенства суммы нулю следует, что каждое слагаемое также равно нулю. □

Замечание. Дифференциал d_H называют *горизонтальным*, а дифференциал d_V – *вертикальным* (см., например, [1]).

Рассмотрим ситуацию подробнее. Нам понадобится следующее

Предложение 2.1.17. *Для данного дифференцирования $X \in \mathfrak{D}$ производная Ли*

$$X = L_X : \Omega^{pq} \to \Omega^{pq} \oplus \Omega^{p+1,q-1} \quad \textit{для всех} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+$$

тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{D}_{LB}$. В частности,

$$\mathrm{E}_f : \Omega^{pq} \to \Omega^{pq} \quad \textit{для всех} \quad \mathrm{E}_f \in \mathfrak{D}_E,\ p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. По построению для всякого дифференцирования $X = \sum_\mu \xi^\mu \cdot D_\mu + \sum_{\alpha,i} \eta_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i \in \mathfrak{D}$ справедливы следующие утверждения:

- ⋆ производная Ли X есть дифференцирование внешней алгебры Ω,
- ⋆ $X(f) \in \mathcal{A}$ для всех $f \in \mathcal{A}$,
- ⋆ $X(dx^\mu) = d(X(x^\mu)) = d\xi^\mu \in \Omega^{01} \oplus \Omega^{10}$,

так что достаточно проверить, что $X(\delta u_i^\alpha) \in \Omega^{10}$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, тогда и только тогда, когда дифференцирование $X \in \mathfrak{D}_{LB}$.

Но,

$$
\begin{aligned}
X(\delta u_i^\alpha) &= X\big(du_i^\alpha - \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu\big)\\
&= d(X(u_i^\alpha)) - \sum_\mu \big(X(u_{i+(\mu)}^\alpha) \cdot dx^\mu + u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot d(X(x^\mu))\big)\\
&= d\big(\sum_\nu \xi^\nu \cdot u_{i+(\nu)}^\alpha + \eta_i^\alpha\big)\\
&\quad - \sum_\mu \big(\big(\sum_\nu \xi^\nu \cdot u_{i+(\mu)+(\nu)}^\alpha + \eta_{i+(\mu)}^\alpha\big) \cdot dx^\mu + u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot d\xi^\mu\big)\\
&= \sum_\nu (u_{i+(\nu)}^\alpha \cdot d\xi^\nu + \xi^\nu \cdot du_{i+(\nu)}^\alpha) + d\eta_i^\alpha\\
&\quad - \sum_{\mu,\nu} \xi^\nu \cdot u_{i+(\mu)+(\nu)}^\alpha \cdot dx^\mu - \sum_\mu (\eta_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu - u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot d\xi^\mu)\\
&= \sum_\nu \xi^\nu \cdot \delta u_{i+(\nu)}^\alpha + \big(d\eta_i^\alpha - \sum_\mu \eta_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu\big),
\end{aligned}
$$

здесь

$$
\begin{aligned}
d\eta_i^\alpha &- \sum_\mu \eta_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu\\
&= \sum_\mu (D_\mu \eta_i^\alpha) \cdot dx^\mu + \sum_{\beta,j} (\partial_\beta^j \eta_i^\alpha) \cdot \delta u_j^\beta - \sum_\mu \eta_{i+(\mu)} \cdot dx^\mu\\
&= \sum_{\beta,j} (\partial_\beta^j \eta_i^\alpha) \cdot \delta u_j^\beta + \sum_\mu \big(D_\mu \eta_i^\alpha - \eta_{i+(\mu)}^\alpha\big) \cdot dx^\mu.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
X(\delta u_i^\alpha) = \sum_\mu \xi^\mu \cdot \delta u_{i+(\mu)}^\alpha + \sum_{\beta,j} (\partial_\beta^j \eta_i^\alpha) \cdot \delta u_j^\beta \in \Omega^{10}
$$

тогда и только тогда, когда $D_\mu \eta_i^\alpha - \eta_{i+(\mu)}^\alpha = 0$ для всех $1 \le \mu \le m$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, т.е. когда $\eta_i^\alpha = D_i \eta_0^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, т.е. когда $X = H + \mathrm{E}_\eta$ с произвольными $H \in \mathfrak{D}_H$ и $\mathrm{E}_\eta \in \mathfrak{D}_E$. $\square$

Следствие 2.1.1. *Справедливы равенства*

- ⋆ $D_\mu \delta u_i^\alpha = \delta u_{i+(\mu)}^\alpha$ *для всех* $1 \le \mu \le m$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$,
- ⋆ $\delta u_i^\alpha = D_i \delta u^\alpha$ *для всех* $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$,

где $u^\alpha = u^\alpha_0$.

Предложение 2.1.18. *Для всякого* $\mathrm{E}_f \in \mathfrak{D}_E$ *имеют место равенства:*

$$\iota_{\mathrm{E}_f} \circ d_H + d_H \circ \iota_{\mathrm{E}_f} = 0,$$
$$\iota_{\mathrm{E}_f} \circ d_V + d_V \circ \iota_{\mathrm{E}_f} = \mathrm{E}_f.$$

Доказательство. Напомним, что отображения $\iota_D : \Omega^q \to \Omega^{q-1}$, $D \in \mathfrak{D}$, были введены выше (см. стр. 28) в общем случае. Легко проверяется, что $\iota_V(\Omega^{pq}) \subset \Omega^{p-1,q}$ для всех $V \in \mathfrak{D}_V$ и $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $\omega \in \Omega^{pq}$, тогда, в силу Предложения 2.1.17, в равенстве

$$\big(\iota_{\mathrm{E}_f} \circ (d_H + d_V) + (d_H + d_V) \circ \iota_{\mathrm{E}_f}\big)\omega = \mathrm{E}_f \omega$$

слагаемые $(\iota_{\mathrm{E}_f} \circ d_H)\omega, (d_H \circ \iota_{\mathrm{E}_f})\omega \in \Omega^{p-1,q+1}$, в то время как слагаемые $(\iota_{\mathrm{E}_f} \circ d_V)\omega, (d_V \circ \iota_{\mathrm{E}_f})\omega, \mathrm{E}_f\omega \in \Omega^{pq}$. Собирая слагаемые, лежащие в одинаковых компонентах прямой суммы $\Omega = \oplus\Omega^{pq}$, приходим к требуемым равенствам. □

Наряду с эндоморфизмами $D_\mu \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(\Omega^q)$, $1 \le \mu \le m$, $q \in \mathbb{Z}_+$, определим морфизмы $\epsilon^\mu = \lambda_{dx^\mu} \in \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\Omega^q, \Omega^{q+1})$, $1 \le \mu \le m$, $q \in \mathbb{Z}_+$, правилом (см. секцию 1.3.3, стр. 27)

$$\epsilon^\mu(\omega) = dx^\mu \wedge \omega \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega^q.$$

Предложение 2.1.19. *Горизонтальный дифференциал*

$$d_H = \sum_\mu \epsilon^\mu \circ D_\mu.$$

Доказательство. Напомним, что морфизмы ϵ^μ суть косые мультипликаторы внешней алгебры Ω, т.е.

$$\begin{aligned}\epsilon^\mu(\omega \wedge \chi) = dx^\mu(\omega \wedge \chi) &= (dx^\mu \wedge \omega) \wedge \chi = \epsilon^\mu(\omega) \wedge \chi \\ &= (-1)^p \omega \wedge (dx^\mu \wedge \chi) = (-1)^p \omega \wedge \epsilon^\mu(\chi)\end{aligned}$$

для всех $1 \le \mu \le m$, $\omega \in \Omega^p$, $\chi \in \Omega$. Как следствие, эндоморфизм $P = \sum_\mu \epsilon^\mu \circ D_\mu \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(\Omega)$ есть косое дифференцирование внешней алгебры Ω,

$$\begin{aligned}P(\omega \wedge \chi) &= \sum_\mu \epsilon^\mu(D_\mu(\omega \wedge \chi)) = \sum_\mu \epsilon^\mu((D_\mu\omega) \wedge \chi + \omega \wedge (D_\mu \chi)) \\ &= \sum_\mu (\epsilon^\mu(D_\mu\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge \epsilon^\mu(D_\mu\chi)) \\ &= P(\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge P(\chi) \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega^p,\ \chi \in \Omega.\end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства равенства $d_H = P$ достаточно проверить его на образующих $f \in \mathcal{A}$, dx^μ, $1 \le \mu \le m$, и δu_i^α, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, внешней алгебры Ω. Предлагается проделать это самостоятельно, в качестве упражнения, используя развитую выше технику. $\square$

Следствие 2.1.2. *Для данной формы*

$$\omega = \frac{1}{q!} \sum_{\mu_1,\dots,\mu_q} \omega_{\mu_1\dots\mu_q} \wedge (dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}) \in \Omega^{pq}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+,$$

горизонтальный дифференциал

$$d_H\omega = \frac{(-1)^p}{(q+1)!} \sum_{\mu_0,\dots,\mu_q} D_{[\mu_0}\omega_{\mu_1\dots\mu_q]} \wedge (dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^q),$$

где

$$D_{[\mu_0}\omega_{\mu_1\dots\mu_q]} = \sum_{0\le r\le q} (-1)^r D_{\mu_r}\omega_{\mu_0\dots\check{\mu}_r\dots\mu_q}.$$

Следствие 2.1.3. *Имеет место равенство*

$$[\mathrm{E}_f, d_H] = 0 \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathcal{E}.$$

Обратимся теперь к вертикальным дифференциалам. Пусть, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathrm{A}^p$, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{I}^p$, (коротко: $|\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{i}| = p$), положим $\wedge^p \delta u_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\alpha}} = \delta u_{i_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \delta u_{i_p}^{\alpha_p}$. Аналогичным образом, для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ положим $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_q) \in [1, m]^q$ (коротко: $|\boldsymbol{\mu}| = q$) и $\wedge^q dx^{\boldsymbol{\mu}} = dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}$. (Полезно подумать, как выглядят эти сокращения при $p, q = 0$.) В таких обозначениях каждая форма $\omega \in \Omega^{pq}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, имеет представление

$$\omega = \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} \omega_{\boldsymbol{\mu}} \wedge \big(\wedge^q dx^{\boldsymbol{\mu}} \big),$$

где

$$\omega_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{p!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha};\mathbf{i}|=p} (\omega_{\boldsymbol{\mu}})_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{i}} \wedge \big(\wedge^p \delta u_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\alpha}} \big) \in \Omega_V^p,$$

причем коэффициенты $(\omega_{\boldsymbol{\mu}})_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{i}} \in \mathcal{A}$ удовлетворяют естественным условиям кососимметрии.

Предложение 2.1.20. *Пусть* $p, q \in \mathbb{Z}_+$ *и*

$$\omega = \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} \omega_{\boldsymbol{\mu}} \wedge \left(\wedge^q \, dx^{\boldsymbol{\mu}} \right) \in \Omega^{pq},$$

где

$$\omega_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{p!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha};\mathbf{i}|=p} (\omega_{\boldsymbol{\mu}})^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \left(\wedge^p \, \delta u^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{i}} \right) \in \Omega^p_V,$$

тогда

$$d_V \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} \left(d_V \omega_{\boldsymbol{\mu}} \right) \wedge \left(\wedge^q \, dx^{\boldsymbol{\mu}} \right) \in \Omega^{p+1,q},$$

где

$$\begin{aligned}
&d_V \omega_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha};\mathbf{i}|=p+1} \left(d_V \omega_{\boldsymbol{\mu}} \right)^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \left(\wedge^{p+1} \, \delta u^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{i}} \right), \\
&\left(d_V \omega_{\boldsymbol{\mu}} \right)^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{0 \le r \le p} (-1)^r \partial^{i_r}_{\alpha_r} (\omega_{\boldsymbol{\mu}})^{\mathbf{i}^r}_{\boldsymbol{\alpha}^r}, \\
&\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathrm{A}^{p+1}, \ \boldsymbol{\alpha}^r = (\alpha_0, \ldots \check{\alpha}_r \ldots, \alpha_p) \in \mathrm{A}^p, \\
&\mathbf{i} = (i_0, \ldots, i_p) \in \mathbb{I}^{p+1}, \ \mathbf{i}^r = (i_1, \ldots \check{i}_r \ldots, i_p) \in \mathbb{I}^p.
\end{aligned}$$

Доказательство. Следует лишь учесть, что вертикальный дифференциал d_V есть косое дифференцирование внешней алгебры Ω, $d_V dx^\mu = d_V \delta u^\alpha_i = 0$ для всех $1 \le \mu \le m$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, и $d_V f = \sum_{\alpha,i} (\partial^i_\alpha f) \cdot \delta u^\alpha_i$. □

Замечание. Обратим внимание, что горизонтальный дифференциал d_H меняет и горизонтальную и вертикальную части формы, а вертикальный дифференциал d_V меняет лишь вертикальную ее часть.

Подводя итоги, приходим к выводу, что справедлива

Теорема 3. *Определен бикомплекс*

$$\left\{ \Omega^{pq}, d^{pq}_H, d^{pq}_V \mid p \in \mathbb{Z}_+, 0 \le q \le m \right\},$$

где $d^{pq}_H = d_H \big|_{\Omega^{pq}}$, $d^{pq}_V = d_V \big|_{\Omega^{pq}}$.

Замечание. Построенный бикомплекс играет важную роль в вариационном исчислении (особенно в формальном вариационном исчислении), и посему называется *вариационным.* Очевидно,

$\Omega^{pq} = 0$ при $q \geq m$. (По поводу бикомплексов см., например, [14], подсекцию 1.6.4. Важная в приложениях составляющая бикомплекса подробно описана в [20].)

Добавим к вариационному бикомплексу стандартный комплекс де Рама пространства $\mathbb{R}^m$

$$\left\{\Omega_R^q, d_R^q \mid 0 \leq q \leq m\right\}$$

где

$\Omega_R^q = \Omega_R^q(\mathbb{R}^m) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}(\wedge^q \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))$, причем определены естественные вложения $0 \to \Omega_R^q \to \Omega^{0q}$,

$d_R^q = d_H^{0q}\big|_{\Omega^q}$

(см., например [14], подсекцию 2.4.2).

Добавим еще комплекс *функциональных форм*

$$\left\{\mathfrak{F}^p, \delta^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\right\},$$

где

фактор-пространства $\mathfrak{F}^p = \Omega^{pm} \big/ \operatorname{im} d_H^{p,m-1}$ суть линейные пространства *функциональных форм*, причем определены канонические проекции $\Omega^{pm} \to \mathfrak{F}^p \to 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$,

фактор-дифференциалы $\delta = \delta^p : \mathfrak{F}^p \to \mathfrak{F}^{p+1}$ действуют по стандартному правилу $[\omega] \mapsto \delta^p[\omega] = [d_V^{pm}\omega]$ и называются *вариационными* (иначе, *функциональными*) *дифференциалами.*

В результате этих построений получаем *пополненный бикомплекс*, изображенный на стр. 73, где пришлось повернуть диаграмму на прямой угол против часовой стрелки, изъять индексы у всех дифференциалов и максимально сократить число строк и столбцов.

Теорема 4. *Пополненный бикомплекс ациклический, т.е. все его строки и столбцы точные.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы весьма кропотливое, требует введения ряда специальных обозначений, так что я вынес его в отдельную подсекцию. Желающие могут также ознакомиться с ним, например, по книге [1]. В этом случае полезно предварительно прочитать соответствующую главу книги [20]. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\
 & 0 \arrow[r] & \Omega^{20} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"] & \Omega^{21} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"] & \cdots \arrow[r, "d_H"] & \Omega^{2m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"] & \mathfrak{F}^2 \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \Omega^{10} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"] & \Omega^{11} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"] & \cdots \arrow[r, "d_H"] & \Omega^{1m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"] & \mathfrak{F}^1 \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^{00} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"] & \Omega^{01} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"] & \cdots \arrow[r, "d_H"] & \Omega^{0m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"] & \mathfrak{F}^0 \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & \Omega_R^{0} \arrow[r, "d_R"] \arrow[u] & \Omega_R^{1} \arrow[r, "d_R"] \arrow[u] & \cdots \arrow[r, "d_R"] & \Omega_R^{m} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Замечание. Линейные пространства $\mathfrak{F}^p$, $p \in \mathbb{N}$, и вариационные дифференциалы δ^p, $p \in \mathbb{Z}_+$, имеют конструктивное описание, приведенное ниже (см. также [1] и [20]).

2.1.10 Доказательство ацикличности пополненного бикомплекса

Приведенное ниже доказательство Теоремы 4 (см. стр. 72), основано на книгах [1, 20]. Мы сохраним введенные выше обозначения и соглашения и для удобства записи положим

$$\iota_\mu = \iota_{D_\mu}, \quad 1 \le \mu \le m, \quad \partial^i_\alpha = \partial_{u^\alpha_i}, \quad \iota^i_\alpha = \iota_{\partial^i_\alpha}, \quad \alpha \in \mathrm{A}, \ i \in \mathbb{I}.$$

Альтернативная индексация

Наряду с со стандартными мультииндексными обозначениями (см. стр. 51), нам понадобится другое описание множества $\mathbb{Z}_+^m$. Именно,

- $\star$ положим $\mathrm{M}^1 = [1, m] = \{\mu \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq \mu \leq m\}$, $\mathrm{M}^q = \times^q \mathrm{M}^1$, $q \in \mathbb{Z}_+$,
- $\star$ положим $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathrm{M}^q$, для всех $q \in \mathbb{Z}_+$, в частности $\mathrm{M}^0 = \{0\}$,
- $\star$ для всякого $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}^q$ положим $|\boldsymbol{\mu}| = q$,
- $\star$ для всякой пары $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathrm{M}^q \times \mathrm{M}^r$ объединение $\boldsymbol{\mu\nu} = (\mu_1, \ldots, \mu_q, \nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathrm{M}^{q+r}$, причем $|\boldsymbol{\mu\nu}| = |\boldsymbol{\mu}| + |\boldsymbol{\nu}|$,
- $\star$ положим $\mathrm{M} = \cup_{q \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{M}^q$,
- $\star$ каждая подстановка $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ определяет одноименное отображение

  $$\sigma : \mathrm{M}^q \to \mathrm{M}^q, \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_q) \mapsto \sigma(\boldsymbol{\mu}) = (\mu_{\sigma(1)}, \ldots, \mu_{\sigma(q)}),$$

  напомним, что $\mathfrak{S}_q$ – группа всех подстановок множества $\{1, \ldots, q\}$,
- $\star$ для пары $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathrm{M}^q$, пишем $\boldsymbol{\mu} \sim \boldsymbol{\nu}$, если $\boldsymbol{\nu} = \sigma(\boldsymbol{\mu})$ для некоторой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_q$,
- $\star$ через $\mathbb{M}^q = \mathrm{M}^q/\!\sim$ обозначим фактор-множество по введенному отношению эквивалентности, причем класс эквивалентности элемента $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{M}^q$ будем обозначать тем же символом $\boldsymbol{\mu}$, если это не приводит к неясности,
- $\star$ положим $\mathbb{M} = \cup_{q \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{M}^q$,
- $\star$ для пары классов $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{M}$ положим

  $$\delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \text{ (в частности, } q = r), \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

На стр. 51 было введено множество

$$\mathbb{I} = \{i = (i^1, \dots, i^m) \mid i^\mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu \in \mathrm{M}\} = \mathbb{Z}_+^m.$$

Положим

$$\mathbb{I}^q = \{i \in \mathbb{I} \mid \|i\| = q\},\ \text{так что}\ \mathbb{I} = \cup_{q\in\mathbb{Z}_+}\mathbb{I}^q.$$

Для каждого $q \in \mathbb{N}$ отображение

$$i : \mathrm{M}^q \to \mathbb{I}^q, \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_q) \mapsto i = i(\boldsymbol{\mu}) = (i^1, \dots, i^m),$$

определено правилом $i^\mu = \sum_{1\le r\le q} \delta^\mu_{\mu_r},\ \mu \in \mathrm{M}^1$. Для полноты, определим отображение $i : \mathrm{M}^0 \to \mathbb{I}^0$, правилом $0 \mapsto 0$. Очевидно, для пары $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathrm{M}^q$ равенство $i(\boldsymbol{\mu}) = i(\boldsymbol{\nu})$ имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\mu} \sim \boldsymbol{\nu}$, так что фактически определены изоморфизмы множеств

$$\mathbb{M}^q \simeq \mathbb{I}^q, \quad \boldsymbol{\mu} \mapsto i(\boldsymbol{\mu}), \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

причем

$$i(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}) = i(\boldsymbol{\mu}) + i(\boldsymbol{\nu}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{M}.$$

Точность всех столбцов, кроме правого

Прежде всего докажем, что все столбцы пополненного бикомплекса, кроме быть может крайнего правого, точные.

Как было замечено (см. стр. 71), вертикальный дифференциал d_V действует лишь на вертикальную часть формы $\omega \in \Omega^{pq}$, так что без ограничения общности считаем, что $q = 0$. Итак, пусть

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha};\mathbf{i}|=p} \omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \big(\wedge^p \delta u^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{i}} \big) \in \Omega^p_V, \quad \omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} \in \Omega^0_V = \mathcal{A}.$$

Вертикальный дифференциал

$$d_V\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha};\mathbf{i}|=p+1} (d_V\omega)^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \big(\wedge^{p+1} \delta u^{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{i}} \big),$$

где

$$(d_V\omega)^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{0\le r\le p} (-1)^r \partial^{i_r}_{\alpha_r} \omega^{\mathbf{i}^r}_{\boldsymbol{\alpha}^r} \quad \text{(см. Предложение 2.1.20).}$$

Слегка модифицируя лемму Пуанкаре, вертикальный гомотопический оператор

$$h_V = h_V^p : \Omega^{pq} \to \Omega^{p-1,q}, \quad \omega \mapsto h_V(\omega), \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

зададим правилом

$$\begin{aligned} &h_V^0(\omega) = 0, \\ &h_V^p(\omega) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha};\mathbf{i}|=p-1} \big(h_V^p\omega\big)_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{i}} \wedge \big(\wedge^{p-1}\, \delta u_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{\alpha}}\big), \quad p \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \big(h_V^p\omega\big)_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{i}}(x,\mathbf{u}) &= \int_0^1 \tau^{p-1} \big(\iota_U\omega\big)_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{i}}(x,\tau\mathbf{u})d\tau \\ &= \int_0^1 \tau^{p-1} \sum_{\alpha,i} u_i^\alpha \omega_{\alpha\boldsymbol{\alpha}}^{i\mathbf{i}}(x,\tau\mathbf{u})d\tau, \end{aligned}$$

вертикальное дифференцирование $U = \sum_{\alpha,i} u_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i$. Дополнительное отображение

$$\varrho : \Omega_V^0 = \mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^{\mathrm{A}}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

зададим правилом $f(x,\mathbf{u}) \mapsto \varrho(f)(x) = f(x,\mathbf{0})$.

Предложение 2.1.21. *Для каждой формы* $\omega \in \Omega_V^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, *имеет место равенство*

$$\big(d_V \circ h_V + h_V \circ d_V\big)\omega = \begin{cases} \omega - \varrho(\omega), & p = 0, \\ \omega, & p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В частности, все столбцы пополненного бикомплекса, быть может кроме крайнего правого, точные.

Доказательство. Действительно, пусть $\omega \in \Omega_V^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, тогда с одной стороны

$$\big((d_V\circ h_V)\omega\big)^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\mathbf{u})=\sum_{1\le r\le p}(-1)^{r-1}\big(\partial^{i_r}_{\alpha_r}(h_V\omega)^{\mathbf{i}^r}_{\boldsymbol{\alpha}^r}\big)(x,\mathbf{u})$$

$$=\sum_{1\le r\le p}(-1)^{r-1}\int_0^1\tau^{p-1}\partial^{i_r}_{\boldsymbol{\alpha}_r}\bigg(\sum_{\alpha,i}u^\alpha_i\omega^{i\mathbf{i}^r}_{\alpha\boldsymbol{\alpha}^r}(x,\tau\mathbf{u})\bigg)d\tau$$

$$=\int_0^1\tau^{p-1}\sum_{\substack{1\le r\le p\\ \alpha,i}}(-1)^{r-1}\big(\delta^\alpha_{\alpha_r}\delta^{i_r}_i\omega^{i\mathbf{i}^r}_{\alpha\boldsymbol{\alpha}^r}(x,\tau\mathbf{u})+u^\alpha_i\partial^{i_r}_{\alpha_r}\omega^{i\mathbf{i}^r}_{\alpha\boldsymbol{\alpha}^r}(x,\tau\mathbf{u})\big)d\tau$$

$$=\int_0^1\bigg(p\tau^{p-1}\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\tau\mathbf{u})+\tau^p\sum_{\substack{1\le r\le p\\ \alpha,i}}(-1)^{r-1}u^\alpha_i\big(\partial^{i_r}_{\alpha_r}\omega^{i\mathbf{i}^r}_{\alpha\boldsymbol{\alpha}^r}\big)(x,\tau\mathbf{u})\bigg)d\tau,$$

а с другой стороны

$$\big((h_V\circ d_V)\omega\big)^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\mathbf{u})=\int_0^1\tau^p\sum_{\alpha,i}u^\alpha_i(d_V\omega)^{i\mathbf{i}}_{\alpha\boldsymbol{\alpha}}(x,\tau\mathbf{u})d\tau$$

$$=\int_0^1\tau^p\sum_{\alpha,i}u^\alpha_i\bigg((\partial^i_\alpha\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}})(x,\tau\mathbf{u})+\sum_{1\le r\le p}(-1)^r(\partial^{i_r}_{\alpha_r}\omega^{i\mathbf{i}^r}_{\alpha\boldsymbol{\alpha}^r})(x,\tau\mathbf{u})\bigg)d\tau$$

$$=\int_0^1\bigg(\tau^p\frac{\partial}{\partial\tau}\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\tau\mathbf{u})+\tau^p\sum_{\substack{1\le r\le p\\ \alpha,i}}(-1)^r u^\alpha_i\big(\partial^{i_r}_{\alpha_r}\omega^{i\mathbf{i}^r}_{\alpha\boldsymbol{\alpha}^r}\big)(x,\tau\mathbf{u})\bigg)d\tau.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\begin{aligned}\big((d_V\circ h_V+h_V\circ d_V)\omega\big)^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}&(x,\mathbf{u})\\ &=\int_0^1\bigg(p\tau^{p-1}\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\tau\mathbf{u})+\tau^p\frac{\partial}{\partial\tau}\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\tau\mathbf{u})\bigg)d\tau\\ &=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\tau}\bigg(\tau^p\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\tau\mathbf{u})\bigg)d\tau=\bigg[\tau^p\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\tau\mathbf{u})\bigg]\bigg|_{\tau=0}^{\tau=1}\\ &=\begin{cases}\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\mathbf{u})-\omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\mathbf{0}), & p=0,\\ \omega^{\mathbf{i}}_{\boldsymbol{\alpha}}(x,\mathbf{u}), & p\in\mathbb{N},\end{cases}\end{aligned}$$

откуда и следует искомая гомотопическая формула. □

Предложение 2.1.22. *Справедливы равенства*

$$[D_\mu,h_V]=0,\quad \epsilon^\mu\circ h_V+h_V\circ\epsilon^\mu=0\quad \textit{для всех}\quad \mu\in\mathrm{M}^1,$$
$$d_H\circ h_V+h_V\circ d_H=0.$$

Доказательство. При доказательстве первого равенства следует учесть, что дифференцирование $U = \sum_{\alpha,i} u^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha = \mathrm{E}_u$, где $u = (u^\alpha_0)$, коммутирует с дифференцированиями D_μ, как эволюционное, второе равенство тривиальное, а последнее следует из двух первых и представления $d_H = \sum_\mu \epsilon^\mu \circ D_\mu$ (см. Предложение 2.1.19 на стр. 69). $\square$

Точность нижней строки

Нижняя строка пополненного бикомплекса есть комплекс де Рама пространства $\mathbb{R}^m$. Его ацикличность есть следствие стандартной леммы Пуанкаре (см., например, [14]).

Точность правого столбца

Напомним, что вариационный дифференциал $\delta = \delta^p : \mathfrak{F}^p \to \mathfrak{F}^{p+1}$, действует по правилу $[\omega] \mapsto [d^{pm}_V \omega]$, где $\mathfrak{F}^p = \Omega^{pm} \big/ d^{p,m-1}_H$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Гомотопический оператор $h_{\mathfrak{F}} = h^p_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F}^p \to \mathfrak{F}^{p-1}$ зададим правилом $[\omega] \mapsto h^p_{\mathfrak{F}}[\omega]$, где

$$h^p_{\mathfrak{F}}[\omega] = \begin{cases} 0, & p = 0, \\ [h^p_V \omega], & p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Корректность такого определения следует из Предложения 2.1.22.

Предложение 2.1.23. *Имеют место равенства*

$$\big(\delta \circ h_{\mathfrak{F}} + h_{\mathfrak{F}} \circ \delta\big)[\omega] = [\omega] \quad \text{\textit{для всех}} \quad [\omega] \in \mathfrak{F}^p,\ p \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности, правый столбец пополненного бикомплекса точный.

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega^{pm}$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Факторизуя гомотопическую формулу Предложения 2.1.21, получим

$$\big(\delta \circ h_{\mathfrak{F}} + h_{\mathfrak{F}} \circ \delta\big)[\omega] = \begin{cases} [\omega] - [\varrho\omega], & p = 0, \\ [\omega], & p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и надо лишь проверить, что $[\varrho\omega] = 0$ для всех $\omega \in \Omega^{0m} = \Omega^m_H$. Пусть $\omega = f(x, \mathbf{u}) \wedge d^m x \in \Omega^m_H$, тогда $\varrho\omega = f(x, \mathbf{0}) \wedge d^m x \in \Omega^m_R$, и в силу точности комплекса де Рама (нижняя строка), $\varrho\omega = d_R \chi$, где форма $\chi \in \Omega^{m-1}_R \subset \Omega^{m-1}_H$. По построению, дифференциал d_R есть сужение горизонтального дифференциала d_H, так что $\varrho\omega = d_H \chi$, и значит $[\varrho\omega] = 0$. $\square$

Вспомогательные конструкции

Для доказательства точности строк нам понадобится ряд специальных конструкций и вспомогательных утверждений.

Прежде всего заметим, что в альтернативных мультииндексных обозначениях некоторые введенные ранее объекты примут другой вид. Так эволюционные дифференцирования записываются следующим образом

$$\mathrm{E}_f = \sum_{\alpha\in \mathrm{A}, \boldsymbol{\mu}\in\mathbb{M}} (D_{\boldsymbol{\mu}} f^\alpha)\cdot\partial_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}, \quad f\in\mathcal{E},$$

где $D_{\boldsymbol{\mu}} = D_{\mu_1}\circ\ldots\circ D_{\mu_q}$, $q\in\mathbb{Z}_+$, $\partial_\alpha^{\boldsymbol{\mu}} = \partial_{u_{\boldsymbol{\mu}}^\alpha}$, $u_{\boldsymbol{\mu}}^\alpha = u_{\mu_1\ldots\mu_q}^\alpha$, $q\in\mathbb{Z}_+$.

Нам понадобятся операторы в полных частных производных вида

$$P:\mathcal{E}\to\Omega^{pq}, \quad f\mapsto P(f) = \sum_{\alpha\in \mathrm{A}, \boldsymbol{\mu}\in\mathbb{M}} P_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\cdot(D_{\boldsymbol{\mu}} f^\alpha),$$

где коэффициенты $P_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\in\Omega^{pq}$, $p,q\in\mathbb{Z}_+$.

Предложение 2.1.24. *Справедливо равенство*

$$P(f) = \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} P_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\cdot(D_{\boldsymbol{\mu}} f^\alpha) = \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(Q_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\cdot f^\alpha\big),$$

где

- ⋆ $P_\alpha^{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\boldsymbol{\nu}} \binom{|\boldsymbol{\mu\nu}|}{|\boldsymbol{\nu}|}(D_{\boldsymbol{\nu}} Q_\alpha^{\boldsymbol{\mu\nu}})$,
- ⋆ $Q_\alpha^{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\boldsymbol{\nu}} \binom{|\boldsymbol{\mu\nu}|}{|\boldsymbol{\nu}|}(-1)^{|\boldsymbol{\nu}|}(D_{\boldsymbol{\nu}} P_\alpha^{\boldsymbol{\mu\nu}})$,
- ⋆ *биномиальные коэффициенты* $\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r-s)!}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Предлагается провести самостоятельно, опираясь на правило Лейбница и свойства биномиальных коэффициентов. □

Предложение 2.1.25. *Пусть* $P:\mathcal{E}\to\Omega^{pm}$, $P(f) = \sum P_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\cdot D_{\boldsymbol{\mu}} f^\alpha$, *тогда*

$$P(f) = Q(f) + d_H(R(f)),$$

где

- ⋆ $Q(f) = \sum_\alpha Q_\alpha\cdot f^\alpha, \quad Q_\alpha = Q_\alpha^0 = \sum_{\boldsymbol{\nu}}(-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}} P_\alpha^{\boldsymbol{\nu}}\in\Omega^{pm}$,

⋆ $R(f) = \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}(R^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} f^{\alpha}), \quad R^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} = \sum_{\nu} \iota_{\nu} Q^{\nu\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} \in \Omega^{p,m-1}$.

Доказательство. Согласно Предложению 2.1.24,

$$P(f) = \sum_{\alpha} Q^0_{\alpha} f^{\alpha} + \sum_{\alpha,|\boldsymbol{\mu}|>0} D_{\boldsymbol{\mu}}(Q^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} f^{\alpha}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} d_H(R(f)) &= \left(\sum_{\mu} \epsilon^{\mu} \circ D_{\mu}\right)\left(\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} (R^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} f^{\alpha})\right) \\ &= \sum_{\alpha,\mu,\boldsymbol{\mu}} D_{\mu\boldsymbol{\mu}}(dx^{\mu} \wedge R^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} \cdot f^{\alpha}) = \sum_{\alpha,\mu\boldsymbol{\mu}} D_{\mu\boldsymbol{\mu}}(Q^{\mu\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} f^{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha,|\boldsymbol{\mu}|>0} D_{\boldsymbol{\mu}}(Q^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} f^{\alpha}), \end{aligned}$$

поскольку $dx^{\mu} \wedge \omega_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\omega$ для всякой формы $\omega \in \Omega^{pm}$, где форма $\omega_{\nu} = \iota_{\nu}\omega \in \Omega^{p,m-1}$, и в частности

$$dx^{\mu} \wedge R^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} = \sum_{\nu} dx^{\mu} \wedge (Q^{\nu\boldsymbol{\mu}}_{\alpha})_{\nu} = Q^{\mu\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}.$$

□

Каждой форме $\omega \in \Omega^{pq}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, поставим в соответствие оператор $P_{\omega} : \mathcal{E} \to \Omega^{p-1,q}$, $f \mapsto P_{\omega}(f) = \iota_{\mathrm{E}_f}\omega$, подробнее

$$P_{\omega}(f) = \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} \omega^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} \cdot D_{\boldsymbol{\mu}} f^{\alpha}, \quad \text{где} \quad \omega^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} = \iota^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}\omega = \big(P_{\omega}\big)^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}, \quad \iota^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} = \iota_{\partial^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}}.$$

В силу Предложения 2.1.24, $\iota_{\mathrm{E}_f}\omega = \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}(f^{\alpha} K^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}(\omega))$, где

$$K^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}(\omega) = \sum_{\boldsymbol{\nu}} \binom{|\boldsymbol{\mu\nu}|}{|\boldsymbol{\nu}|} (-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}} \omega^{\boldsymbol{\mu\nu}}_{\alpha},$$

в частности $K_{\alpha}(\omega) = K^0_{\alpha}(\omega) = \sum_{\boldsymbol{\nu}} (-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}} \omega^{\boldsymbol{\nu}}_{\alpha}$.

Предложение 2.1.26. *Имеют место равенства*

(*a*) $K^{\boldsymbol{\mu}\mu}_{\alpha}(d_H\omega) = K^{\{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}(dx^{\mu\}} \wedge \omega)$, *в частности* $K_{\alpha}(d_H\omega) = 0$,
(*b*) $\iota_{\mathrm{E}_f} K^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}(\omega) = -K^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}(\iota_{\mathrm{E}_f}\omega)$,

где $\{\boldsymbol{\mu}\mu\}$ *означает симметризацию по индексам* $\mu_1, \ldots, \mu_q, \mu$.

Доказательство. Известное равенство $\iota_X \circ d + d \circ \iota_X = L_X$ в случае $X = \mathrm{E}_f \in \mathfrak{D}_E$ и $d = d_H + d_V$ распадается на два

$$\iota_{\mathrm{E}_f} \circ d_H + d_H \circ \iota_{\mathrm{E}_f} = 0 \quad \text{и} \quad \iota_{\mathrm{E}_f} \circ d_V + d_V \circ \iota_{\mathrm{E}_f} = L_{\mathrm{E}_f}.$$

Используем первое из этих равенств. С одной стороны, имеем

$$\iota_{\mathrm{E}_f}(d_H\omega) = \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(f^\alpha K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(d_H\omega)\big),$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} d_H\big(\iota_{\mathrm{E}_f}\omega\big) &= \bigg(\sum_{\mu} \epsilon^\mu \circ D_\mu\bigg)\bigg(\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} \big(f^\alpha K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(\omega)\big)\bigg) \\ &= \sum_{\alpha,\mu,\boldsymbol{\mu}} D_{\mu\boldsymbol{\mu}}\big(f^\alpha dx^\mu \wedge K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(\omega)\big) \\ &= -\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}\mu} D_{\boldsymbol{\mu}\mu}\big(f^\alpha K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(dx^\mu \wedge \omega)\big), \end{aligned}$$

где было учтено, что

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(\omega) &= \sum_{\boldsymbol{\nu}} \binom{|\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}|}{|\boldsymbol{\nu}|}(-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}}\big(dx^\mu \wedge \omega_\alpha^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}\big) \\ &= -\sum_{\boldsymbol{\nu}} \binom{|\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}|}{|\boldsymbol{\nu}|}(-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}}\big(dx^\mu \wedge \omega\big)_\alpha^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} = -K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(dx^\mu \wedge \omega), \end{aligned}$$

поскольку

$$dx^\mu \wedge \omega_\alpha^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}} = dx^\mu \wedge (\iota_\alpha^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}\omega) = -\iota_\alpha^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}(dx^\mu \wedge \omega) = -(dx^\mu \wedge \omega)_\alpha^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(f^\alpha K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(d_H\omega)\big) &= \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}\mu} D_{\boldsymbol{\mu}\mu}\big(f^\alpha K_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}(dx^\mu \wedge \omega)\big) \\ &= \sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}\mu} D_{\boldsymbol{\mu}\mu}\big(f^\alpha K_\alpha^{\{\boldsymbol{\mu}}(dx^{\mu\}} \wedge \omega)\big). \end{aligned}$$

В силу Предложения 2.1.24, отсюда следует равенство (a) (обратим внимание, что восстанавливается лишь симметрическая по индексам $\mu_1, \dots, \mu_q, \mu$ часть коэффициентов). Обратимся к равенству (b). Здесь

$$\iota_{\mathrm{E}_f}\big(K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega)\big) = \sum_{\boldsymbol{\nu}} \binom{|\boldsymbol{\mu\nu}|}{|\boldsymbol{\nu}|}(-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}}\big(\iota_{\mathrm{E}_f}(\omega^{\boldsymbol{\mu\nu}}_\alpha)\big)$$
$$= -\sum_{\boldsymbol{\nu}} \binom{|\boldsymbol{\mu\nu}|}{|\boldsymbol{\nu}|}(-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}}\big((\iota_{\mathrm{E}_f}\omega)^{\boldsymbol{\mu\nu}}_\alpha\big) = -K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\iota_{\mathrm{E}_f}\omega).$$

□

Легко проверяется, что для всякой формы $\omega \in \Omega^{pq}$ имеет место равенство

$$\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} \delta u^\alpha_{\boldsymbol{\mu}} \wedge \omega^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha = p\omega, \quad \text{где} \quad \omega^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha = \iota^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \omega,$$

в частности

$$\omega = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} \delta u^\alpha_{\boldsymbol{\mu}} \wedge \omega^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \quad \text{при} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Предложение 2.1.27. *Каждая форма $\omega \in \Omega^{pq}$, $p \in \mathbb{N}$, имеет представление*

$$\omega = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega)\big).$$

В частности, при $p \in \mathbb{N}$, $q = m$,

$$\omega = I(\omega) + d_H(h_H(\omega)),$$

где

- ⋆ $I(\omega) = \frac{1}{p}\sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge K_\alpha(\omega)$,
- ⋆ $h_H(\omega) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu},\nu} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge K^{\boldsymbol{\mu}\nu}_\alpha(\omega_\nu)\big)$.

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega^{pq}$, $p \in \mathbb{N}$, тогда как было отмечено выше,

$$\omega = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} \delta u^\alpha_{\boldsymbol{\mu}} \wedge \omega^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\delta u^\alpha \wedge \omega^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega)\big)$$

по аналогии с Предложением 2.1.24. В свою очередь, при $q = m$, по аналогии с Предложением 2.1.25 имеем,

$$\omega = \frac{1}{p}\sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge K_\alpha(\omega) + d_H(R(\delta u)),$$

где

$$R(\delta u) = -\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge R^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha\big),$$

причем

$$R^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha = \frac{1}{p}\sum_\nu \big(K^{\nu\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega)\big)_\nu = -\frac{1}{p}\sum_\nu K^{\boldsymbol{\mu}\nu}_\alpha(\omega_\nu),$$

так что $R(\delta u) = h_H(\omega)$. □

Предложение 2.1.28. *Пусть $\omega \in \Omega^{pq}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le q \le m$, тогда для любых $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}'\mu \in \mathbb{M}$, $\alpha \in \mathrm{A}$, имеет место равенство*

$$\begin{aligned}(m - q + |\boldsymbol{\mu}|)&K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega)\\ &= \sum_\nu \big((|\boldsymbol{\mu}|+1)K^{\nu\boldsymbol{\mu}}_\alpha((d_H\omega)_\nu) + |\boldsymbol{\mu}|K^{\nu\{\boldsymbol{\mu}'}_\alpha(dx^{\mu\}} \wedge \omega_\nu)\big).\end{aligned}$$

Доказательство. В силу Предложения 2.1.26(a), имеем

$$\begin{aligned}K^{\nu\boldsymbol{\mu}}_\alpha(d_H\omega) &= K^{\{\nu\boldsymbol{\mu}'}_\alpha(dx^{\mu\}} \wedge \omega)\\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{\mu}|+1}\big(K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(dx^\nu \wedge \omega) + |\boldsymbol{\mu}|K^{\nu\{\boldsymbol{\mu}'}_\alpha(dx^{\mu\}}) \wedge \omega\big).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(|\boldsymbol{\mu}|+1)&\sum_\nu \iota_\nu K^{\nu\boldsymbol{\mu}}_\alpha(d_H\omega)\\ &= \sum_\nu \big(\iota_\nu K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(dx^\nu \wedge \omega) + |\boldsymbol{\mu}|\iota_\nu K^{\nu\{\boldsymbol{\mu}'}_\alpha(dx^{\mu\}} \wedge \omega)\big).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось учесть, что

$$\iota_\nu K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega) = -K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega_\nu), \quad \iota_\nu(dx^\mu \wedge \omega) = \delta^\mu_\nu\omega - dx^\mu \wedge \omega_\nu,$$

и провести элементарные выкладки. □

Точность всех строк, кроме нулевой

Для $p \in \mathbb{N}$, $0 \le q \le m$, определим горизонтальный гомотопический оператор

$$h_H = h_H^{pq} : \Omega^{pq} \to \Omega^{p,q-1}, \quad \omega \mapsto h_H(\omega),$$

правилом

$$h_H(\omega) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu},\nu}\frac{|\boldsymbol{\mu}|+1}{m-q+|\boldsymbol{\mu}|+1}D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge K^{\boldsymbol{\mu}\nu}_\alpha(\omega_\nu)\big).$$

Предложение 2.1.29. *Для всех $\omega \in \Omega^{pq}$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \le q \le m-1$, имеет место равенство*

$$\big(d_H \circ h_H + h_H \circ d_H\big)\omega = \omega.$$

В частности, все строки пополненного бикомплекса, кроме быть может нулевой ($p = 0$), точные.

Доказательство. Действительно, пусть $\omega \in \Omega^{pq}$, $d_H\omega \in \Omega^{p,q+1}$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \le q \le m-1$, тогда

$$h_H(d_H\omega) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu},\nu} \frac{|\boldsymbol{\mu}|+1}{m-q+|\boldsymbol{\mu}|} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge K^{\nu\boldsymbol{\mu}}_\alpha((d_H\omega)_\nu)\big),$$

$$d_H(h_H\omega) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}',\mu,\nu} \frac{|\boldsymbol{\mu}'\mu|}{m-q+|\boldsymbol{\mu}'\mu|} D_{\boldsymbol{\mu}'\mu}\big(\delta u^\alpha \wedge K^{\nu\{\boldsymbol{\mu}'}(dx^{\mu\}} \wedge \omega_\nu)\big),$$

где $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}'\mu$. Складывая эти равенства, получаем

$$\begin{aligned}
&\big(h_H \circ d_H + d_H \circ h_H\big)\omega = \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu},\nu} \frac{1}{m-q+|\boldsymbol{\mu}|}\cdot \\
&\cdot D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge \big((|\boldsymbol{\mu}|+1)K^{\nu\boldsymbol{\mu}}_\alpha((d_H\omega)_\nu) + |\boldsymbol{\mu}|K^{\nu\{\boldsymbol{\mu}'}(dx^{\mu\}} \wedge \omega_\nu)\big)\big) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{\alpha,\boldsymbol{\mu}} D_{\boldsymbol{\mu}}\big(\delta u^\alpha \wedge K^{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(\omega)\big) = \omega,
\end{aligned}$$

в силу Предложений 2.1.28 и 2.1.27. Для завершения доказательства, следует учесть, что последовательности

$$\Omega^{p,m-1} \xrightarrow{d_H} \Omega^{pm} \longrightarrow \mathfrak{F}^p \longrightarrow 0, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

точные по построению. $\square$

Точность нулевой строки

Точность нулевой строки ($p = 0$) можно доказать, построив соответствующий гомотопический оператор (см., например, [1, 20]), но по существу этот факт следует из уже доказанной точности всех столбцов и всех строк, кроме нулевой.

Предложение 2.1.30. *Нулевая строка пополненного бикомплекса точная.*

Доказательство. Сначала проверим точность в члене $\Omega^{00} = \mathcal{A}$. Пусть $f \in \mathcal{A}$, $d_H f = \sum_\mu D_\mu f \cdot dx^\mu = 0$, т.е., $D_\mu f = 0$ для всех $\mu \in \mathrm{M}^1$. В силу конечности порядка функции f по дифференциальным переменным (см. стр. 53) это возможно тогда и только тогда, когда $f = \mathrm{const}$, т.е. когда $f \in \mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ (проверить это утверждение в качестве упражнения), что и требуется.

Далее используем *метод диаграммного поиска*, и это будет полезным упражнением по диаграммной технике.

Пусть $1 \le q \le m-1$, $\omega = \omega^{0q} \in \Omega^{0q}$, $d_H\omega^{0q} = 0$.

Начинаем ход вверх и влево. Положим $\omega^{1q} = d_V\omega^{0q} \in \Omega^{1q}$, тогда $d_H\omega^{1q} = d_H(d_V\omega^{0q}) = -d_V(d_H\omega^{0q}) = 0$, и в силу точности 1-й строки $\omega^{1,q} = d_H\omega^{1,q-1}$ с некоторой формой $\omega^{1,q-1} \in \Omega^{1,q-1}$. Положим $\omega^{2,q-1} = d_V\omega^{1,q-1} \in \Omega^{2,q-1}$, тогда

$$\begin{aligned} d_H\omega^{2,q-1} &= d_H(d_V\omega^{1,q-1}) = -d_V(d_H\omega^{1,q-1}) = -d_V(\omega^{1,q}) \\ &= -d_V(d_V\omega^{0q}) = 0, \end{aligned}$$

и в силу точности 2-й строки, $\omega^{2,q-1} = d_H\omega^{2,q-2}$, $\omega^{2,q-2} \in \Omega^{2,q-2}$. Положив $\omega^{3,q-2} = d_V\omega^{2,q-2}$, получим $\omega^{3,q-2} = d_H\omega^{3,q-3}$, и так далее. В результате, придем к форме $\omega^{q0} \in \Omega^{q0}$, с $d_H\omega^{q0} = \omega^{q1}$. Положив $\omega^{q+1,0} = d_V\omega^{q0}$, получим $d_H\omega^{q+1,0} = 0$, и в силу точности $(q+1)$-й строки $\omega^{q+1,0} = 0$.

Начинаем ход вниз и вправо. Здесь, $d_V\omega^{q0} = \omega^{q+1,0} = 0$, так что в силу точности 0-го столбца, $\omega^{q0} = d_V\omega^{q-1,0}$, $\omega^{q-1,0} \in \Omega^{q-1,0}$. Положим $\chi^{q-1,1} = \omega^{q-1,1} + d_H\omega^{q-1,0} \in \Omega^{q-1,1}$, тогда с одной стороны $d_H\chi^{q-1,1} = d_H\omega^{q-1,1} = \omega^{q-1,2}$, а с другой стороны

$$\begin{aligned} d_V\chi^{q-1,1} &= d_V\omega^{q-1,1} - d_H(d_V\omega^{q-1,0}) = \omega^{q1} - d_H\omega^{q0} \\ &= \omega^{q1} - \omega^{q1} = 0, \end{aligned}$$

и в силу точности 1-го столбца $\chi^{q-1,1} = d_V\omega^{q-2,1}$, $\omega^{q-2,1} \in \Omega^{q-2,1}$. Положив $\chi^{q-2,2} = \omega^{q-2,2} + d_H\omega^{q-2,1}$, получим $d_H\chi^{q-2,2} = \omega^{q-2,3}$ и

$$\begin{aligned} d_V\chi^{q-2,2} &= d_V\omega^{q-2,2} - d_H(d_V\omega^{q-2,1}) = \omega^{q-1,2} - d_H\chi^{q-1,1} \\ &= \omega^{q-1,2} - \omega^{q-1,2} = 0, \end{aligned}$$

и так далее. В результате придем к форме $\chi^{0q} = \omega^{0q} + d_H\omega^{0,q-1}$ со свойствами: $d_H\chi^{0q} = d_H\omega^{0q} = 0$, $d_V\chi^{0q} = \omega^{1q} - \omega^{1q} = 0$. В силу точности q-го столбца, из равенства $d_V\chi^{0q} = 0$ следует, что

$\chi^{0q} \in \Omega_R^q \subset \Omega^{0q}$, причем $d_R\chi^{0q} = d_H\chi^{0q} = 0$. Точность нижней строки влечет $\chi^{0q} = d_R\phi^{q-1} = d_H\phi^{q-1}$, $\phi^{q-1} \in \Omega_R^{q-1} \subset \Omega^{0,q-1}$. Таким образом, $\omega = \omega^{0q} = \chi^{0q} - d_H\omega^{0,q-1} = d_H(\phi^{q-1} - \omega^{0,q-1})$, что и требовалось доказать. □

2.1.11 Спектральная последовательность

Обозначив через $\mathrm{C}^p\Omega^q$ $\mathcal{A}$-модуль всех p-картановых q-форм на пространстве $\mathbb{J}$, получим убывающие фильтрации

$$\Omega^q = \mathrm{C}^0\Omega^q \supset \mathrm{C}^1\Omega^q \supset \cdots \supset \mathrm{C}^q\Omega^q \supset 0, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

со свойствами, описанными в подсекции 1.4.3. Согласно Предложению 2.1.15, эта фильтрация совместима с внешним дифференциалом d, так что определена градуированная *спектральная последовательность*

$$\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}_+\},$$

со свойствами, приведенными в подсекции 1.4.4. По построению (см., например, [14], секция 1.7),

$$E_0^{pq} = \mathrm{C}^p\Omega^{p+q}/\mathrm{C}^{p+1}\Omega^{p+q} = \begin{cases} \Omega^{pq}, & p \in \mathbb{Z}_+, 0 \le q \le m, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

В свою очередь, дифференциалы $d_0^{pq} : E_0^{pq} \to E_0^{p,q+1}$ в общем случае действуют по правилу

$$d_0^{pq}[\omega]_0^{pq} = [d\omega]_0^{p,q+1} \quad \text{для всех} \quad [\omega]_0^{pq} \in E_0^{pq},$$

что в данном случае, очевидно, сводится к

$$d_0^{pq} = d_H^{pq} : \Omega^{pq} \to \Omega^{p,q+1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} E_1^{pq} &= \ker d_0^{pq} / \operatorname{im} d_0^{p,q-1} = \ker d_H^{pq} / \operatorname{im} d_H^{p,q-1} \\ &= \begin{cases} \mathfrak{F}^p, & p \in \mathbb{Z}_+, q = m, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \end{aligned}$$

поскольку, в силу Теоремы 4, строки пополненного бикомплекса точные.

Дифференциалы $d_1^{pm} : E_1^{pm} \to E_1^{p+1,m}$ действуют по правилу

$$d_1^{pm}[\omega]_1^{pm} = [d\omega]_1^{p+1,m} = [d_V]_1^{p+1,m} \quad \text{для всех} \quad [\omega]_1^{pm} \in E_0^{pq},$$

так как $d_H\omega = 0$ для любой формы Ω^{pm}. Следовательно,

$$d_1^{pm} = \delta^p : \mathfrak{F}^p \to \mathfrak{F}^{p+1}.$$

В частности,

$$E_2^{pm} = \ker d_1^{pm} \big/ \operatorname{im} d_1^{p-1,m} = \ker \delta^p \big/ \operatorname{im} \delta^{p-1} = 0, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

в силу точности столбцов пополненного бикомплекса (см. Теорему 4). Подводя итоги, приходим к выводу, что справедлива

Теорема 5. *Спектральная последовательность* $\left\{E_r^{pq}, d_r^{pq}\right\}$ *имеет вид*

$$E_r^{pq} = \begin{cases} \mathbb{R}, & r \in \mathbb{N},\ p = q = 0, \\ \Omega^{pq}, & r = 0,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le q \le m, \\ \mathfrak{F}^p, & r = 1,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ q = m, \\ 0, & \textit{в других случаях}, \end{cases}$$

$$d_r^{pq} = \begin{cases} d_H^{pq}, & r = 0,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le q \le m, \\ \delta^p, & r = 1,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ q = m, \\ 0, & \textit{в других случаях}. \end{cases}$$

2.1.12 Функциональные формы, подробнее

Для полноты изложения дадим детальное описание комплекса функциональных форм $\left\{\mathfrak{F}^p, \delta^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\right\}$, в частности покажем, что при $p \in \mathbb{N}$ в каждом классе эквивалентности имеется канонический представитель.

Выше (см. Предложение 2.1.27) были определены эндоморфизмы

$$I = I^p : \Omega^{pm} \to \Omega^{pm}, \quad \omega \mapsto I(\omega) = \frac{1}{p} \sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge K_\alpha(\omega), \quad p \in \mathbb{N},$$

где $K_\alpha(\omega) = \sum_{\boldsymbol{\nu}} (-1)^{|\boldsymbol{\nu}|} D_{\boldsymbol{\nu}} \omega_\alpha^{\boldsymbol{\nu}}, \quad \omega_\alpha^{\boldsymbol{\nu}} = \iota_\alpha^{\boldsymbol{\nu}} \omega, \quad \iota_\alpha^{\boldsymbol{\nu}} = \iota_{\partial_\alpha^{\boldsymbol{\nu}}}$.

Предложение 2.1.31. *Имеют место равенства*

$$\ker I^p = \operatorname{im} d_H^{p,m-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Действительно, в силу Предложения 2.1.26(a), $K_\alpha(d_H\omega) = 0$, а значит и $I(d_H\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega^{pm}$, так что $\operatorname{im} d_H^{p,m-1} \subset \ker I^p$. С другой стороны, для каждой $\omega \in \Omega^{pm}$ из равенства $I(\omega) = 0$, в силу Предложения 2.1.27, следует, что $\omega = d_H\eta$, где $\eta = h_H(\omega) \in \Omega^{p,m-1}$, так что $\ker I^p \subset \operatorname{im} d_H^{p,m-1}$. □

Предложение 2.1.32. *Имеют место равенства*

$$I^p \circ I^p = I^p, \quad p \in \mathbb{N},$$

т.е. эндоморфизмы I^p *суть проекторы.*

Доказательство. Действительно, пусть $\omega \in \Omega^{pm}$, тогда в силу Предложения 2.1.27, $\omega = I(\omega) + d_H\eta$, $\eta = h_H(\omega)$, и следовательно $I(\omega) = I(I(\omega)) + I(d_H(\eta)) = I(I(\omega))$, в силу Предложения 2.1.31. □

Положим

$$\Omega_I^{pm} = \bigl\{\omega \in \Omega^{pm} \mid I(\omega) = \omega\bigr\}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Предложение 2.1.33. *Определены изоморфизмы линейных пространств*

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}^p : \mathfrak{F}^p \simeq \Omega_I^{pm}, \quad [\omega] \mapsto \mathrm{I}([\omega]) = I(\omega), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Корректность определения отображения I и тот факт, что это отображение действительно является изоморфизмом линейных пространств непосредственно вытекают из Предложений 2.1.27, 2.1.31 и 2.1.32. □

Замечание. Для данной формы $\omega \in \Omega^{pm}$ форма $I(\omega) \in \Omega_I^{pm}$, $p \in \mathbb{N}$, называется *каноническим представителем* функциональной формы (т.е. класса эквивалентности) $[\omega] \in \mathfrak{F}^p$.

Предложение 2.1.34. *Определена коммутативная диаграмма ли-*

нейных пространств

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{F}^2 \arrow[u, "\delta"] \arrow[rr, "\mathrm{I}"] & & \Omega_I^{2m} \arrow[u, "\delta_I"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{F}^1 \arrow[u, "\delta"] \arrow[rr, "\mathrm{I}"] & & \Omega_I^{1m} \arrow[u, "\delta_I"'] \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathfrak{F}^0 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\delta_I"'] & & \\
 & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

с точными строками и столбцами, где линейные отображения

$$
\begin{aligned}
&\delta_I = \delta_I^0 : \mathfrak{F}^0 \to \Omega_I^{1m}, && [\omega] \mapsto \delta_I[\omega] = I(d_V\omega), \quad p = 0,\\
&\delta_I = \delta_I^p : \Omega_I^{pm} \to \Omega_I^{p+1,m}, && \omega \mapsto \delta_I\omega = I(d_V\omega), \quad p \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Корректность определения отображения δ_I^0 следует из Предложения 2.1.31, а коммутативность нижнего треугольника имеется по построению. Для всякой формы $\omega \in \Omega^{pm}$, $p \in \mathbb{N}$, опять в силу Предложения 2.1.31, имеет место равенство $I(d_V\omega) = I(d_V(I\omega))$. Отсюда следует коммутативность остальной части диаграммы. Точность строк есть стрелочная запись того факта, что отображения I^p, $p \in \mathbb{N}$, суть изоморфизмы линейных пространств (см. Предложение 2.1.33). Точность левой ветви есть точность правого столбца пополненного бикомплекса. Точность правой ветви доказывается методом диаграммного поиска, что предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

Замечание. На практике можно отождествлять левую и правую ветви диаграммы.

По построению $\mathcal{A}$-модуль

$$
\Omega^{1m} = \left\{ \omega = \sum_{\alpha,i} \omega_\alpha^i \cdot \delta u_i^\alpha \wedge d^m x \;\middle|\; \omega_\alpha^i \in \mathcal{A} \right\},
$$

где лишь конечное число коэффициентов $\omega^i_\alpha \neq 0$.

Предложение 2.1.35. *Пусть* $\omega = \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot \delta u^\alpha_i \wedge d^m x \in \Omega^{1m}$, *тогда*

$$I(\omega) = \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x, \quad \chi_\alpha = \chi_\alpha(\omega) = \sum_i (-D)_i \omega^i_\alpha.$$

Доказательство. Проводится прямыми вычислениями, которые предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

Следствие 2.1.4. *Имеет место представление*

$$\Omega^{1m}_I = \left\{ \omega = \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x \;\middle|\; \chi = (\chi_\alpha) \in \mathcal{E}^* \right\} \simeq \mathcal{E}^*.$$

Предложение 2.1.36. *Пусть форма* $\omega = \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x \in \Omega^{1m}_I$, *тогда образ* $\delta_I(\omega) \in \Omega^{2m}_I$ *имеет вид*

$$\delta_I(\omega) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \big((\chi_* - \chi^*)\delta u\big)_\alpha \wedge \delta u^\alpha \wedge d^m x,$$

где

- $\star$ $\big(\chi_* \delta u\big)_\alpha = \sum_{\beta,j} (\partial^j_\beta \chi_\alpha) \cdot (D_j \delta u^\beta)$,
- $\star$ $\big(\chi^* \delta u\big)_\alpha = \sum_{\beta,j} (-D)_j \big((\partial^j_\alpha \chi_\beta) \cdot \delta u^\beta\big)$.

Доказательство. Действительно, по определению,

$$\delta_I(\omega) = I(d_V \omega) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge K_\alpha(d_V \omega),$$

где

$$\begin{aligned} d_V \omega &= \sum_\gamma (\chi_* \delta u)_\gamma \wedge \delta u^\gamma \wedge d^m x, \\ \iota^i_\alpha(d_V \omega) &= \sum_\gamma \big((\partial^i_\alpha \chi_\gamma) \cdot \delta u^\gamma - (\chi_* \delta u)_\gamma \cdot \delta^\gamma_\alpha \delta^i_0\big) \wedge d^m x \\ &= \left(\sum_\gamma (\partial^i_\alpha \chi_\gamma) \cdot \delta u^\gamma - (\chi_* \delta u)_\alpha \cdot \delta^i_0 \right) \wedge d^m x, \end{aligned}$$

так что

$$K_\alpha(d_V\omega) = \sum_i (-D)_i\big(\iota^i_\alpha(d_V\omega)\big)$$
$$= \left(\sum_{\gamma,i}(-D)_i\big((\partial^i_\alpha\chi_\gamma)\cdot\delta u^\gamma\big) - (\chi_*\delta u)_\alpha\right)\wedge d^m x$$
$$= \big((\chi^*\delta u)_\alpha - (\chi_*\delta u)_\alpha\big)\wedge d^m x,$$

откуда

$$\delta_I(\omega) = \frac{1}{2}\sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge \big((\chi^*\delta u)_\alpha - (\chi_*\delta u)_\alpha\big)\wedge d^m x$$
$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha \big((\chi_* - \chi^*)\delta u\big)_\alpha \wedge \delta u^\alpha \wedge d^m x.$$

Отметим, что в этих выкладках мы свободно (без комментариев) пользовались развитой выше техникой. □

Следствие 2.1.5. *имеет место представление*

$$\ker\delta^1_I = \left\{\omega = \sum_\alpha \chi_\alpha\cdot\delta u^\alpha\wedge d^m x \in \Omega^{1m}_I \;\middle|\; \chi\in\mathcal{E}^*,\ \chi_* = \chi^*\right\}.$$

2.1.13 Формальное вариационное исчисление

Выделим здесь элементы пополненного бикомплекса, играющие ведущую роль в формальном вариационном исчислении.

Основной объект – линейное пространство *функционалов* (иначе, *действий*)

$$\mathfrak{F}^0 = \Omega^{0m}\big/\operatorname{im} d^{0,m-1}_H.$$

Здесь $\mathcal{A}$-модуль *лагранжианов*

$$\Omega^{0m} = \big\{\omega = L\cdot d^m x \mid L\in\mathcal{A}\big\}\simeq\mathcal{A},$$

где $d^m x = dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m$, а линейное пространство *тривиальных* (иначе, *нулевых*) *лагранжианов*

$$\operatorname{im} d^{0,m-1} = \big\{\omega = d_H\chi \mid \chi\in\Omega^{0,m-1}\big\}.$$

Легко проверяется, что имеет место представление

$$\Omega^{0,m-1} = \left\{\chi = \sum_\mu J^\mu\cdot d_\mu x \mid J^\mu\in\mathcal{A},\ 1\le\mu\le m\right\}\simeq\mathcal{A}^m,$$

где форма $d_\mu x = (-1)^{\mu-1} dx^1 \wedge \ldots d\check{x}^\mu \ldots \wedge dx^m$ характеризуется свойством: $dx^\nu \wedge d_\mu x = \delta^\nu_\mu \cdot d^m x$ (значок ˇ как всегда означает, что стоящий под ним элемент пропущен). Более того, для формы $\chi = \sum_\mu J^\mu \cdot d_\mu x$ горизонтальный дифференциал

$$d_H \chi = \sum_\mu d_H J^\mu \wedge d_\mu x = \mathrm{Div} J \cdot d^m x,$$

где *полная дивергенция*

$$\mathrm{Div} J = \sum_\mu D_\mu J^\mu \quad \text{для всех} \quad J = (J^\mu) \in \mathcal{A}^m.$$

Таким образом,

$$\operatorname{im} d_H^{0,m-1} = \left\{ \omega = \mathrm{Div} J \cdot d^m x \mid J \in \mathcal{A}^m \right\} \simeq \mathrm{Div} \mathcal{A}^m,$$

и значит определен изоморфизм линейных пространств

$$\mathfrak{F}^0 \simeq \mathcal{A} \big/ \mathrm{Div} \mathcal{A}^m.$$

Отметим, что в классах эквивалентности $[\omega] \in \mathfrak{F}^0$ не существует естественного способа выделения канонического представителя.

Следующий объект есть линейное пространство *функциональных 1-форм*

$$\mathfrak{F}^1 = \Omega^{1m} \big/ \operatorname{im} d_H^{1,m-1}.$$

Согласно Предложению 2.1.34 и Следствию 2.1.4, определены изоморфизмы линейных пространств

$$\mathfrak{F}^1 \simeq \Omega^{1m}_I \simeq \mathcal{E}^*.$$

Как это принято в вариационном исчислении, мы будем отождествлять пространства $\mathfrak{F}^1$ и Ω^{1m}_I.

Далее, в опять согласно Предложению 2.1.34, вариационный дифференциал

$$\delta : \mathfrak{F}^0 \to \mathfrak{F}^1, \quad [\omega] \mapsto \delta[\omega],$$

действует по правилу: $\delta[\omega] = (I \circ d_V)\omega$.

Предложение 2.1.37. *Пусть* $\omega = L \cdot d^m x \in \Omega^{0m}$, *тогда*

$$\delta[\omega] = \sum_\alpha \left(\delta_{u^\alpha} L \right) \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x,$$

где вариационные производные

$$\delta_{u^\alpha} L = \sum_i (-D)_i \big(\partial^i_\alpha L\big) \quad \textit{для всех} \quad L \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathrm{A}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\omega = L \cdot d^m x \in \Omega^{0m}$, тогда

$$I(d_V\omega) = \sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge K_\alpha(d_V\omega) = \sum_{\alpha,i} (-D)_i(\partial^i_\alpha L) \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x,$$

поскольку

$$\begin{aligned} d_V\omega &= \sum_{\beta,j} (\partial^j_\beta L) \cdot \delta u^\beta_j \wedge d^m x, \\ \iota^i_\alpha(d_V\omega) &= (\partial^i_\alpha L) \cdot d^m x, \\ K_\alpha(d_V\omega) &= \sum_i (-D)_i(\partial^i_\alpha L) \cdot d^m x. \end{aligned}$$

□

В частности, определено линейное отображение (*оператор Эйлера-Лагранжа*)

$$\delta_u : \mathcal{A} \to \mathcal{E}^*, \quad L \mapsto \delta_u L = \big(\delta_{u^\alpha} L\big) = L^*(1), \quad 1 \in \mathcal{A}.$$

Точность правой ветви диаграммы из Предложения 2.1.34 в члене $\mathfrak{F}^0$ означает, что ядро

$$\ker \delta_u = \mathrm{Div}\mathcal{A}^m = \big\{L = \mathrm{Div} J \;\big|\; J \in \mathcal{A}^m\big\}.$$

С другой стороны, в силу Предложения 2.1.34 и Следствия 2.1.5, образ

$$\mathrm{im}\, \delta_u = \big\{\chi \in \mathcal{E}^* \mid \chi_* = \chi^*\big\}.$$

2.2 Эволюционные системы

2.2.1 Переменные

К переменным, введенным в подсекции 2.1.1 (см. стр. 52), добавим еще одну независимую переменную – *время* $t \in \mathbb{R}$, а независимые переменные $x \in \mathbb{R}^m$ будем теперь называть *пространственными*. Так что теперь имеются пространство независимых переменных $\mathbb{R}^{1+m} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, пространство зависимых переменных $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$, пространство дифференциальных переменных $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$, пространство пространственных джетов $\mathbb{J} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$ и его расширение $\widetilde{\mathbb{J}} = \mathbb{R} \times \mathbb{J}$. Отметим, что дифференциальные переменные, отвечающие частным производным по t отсутствуют.

2.2.2 Функции

Новая независимая переменная приводит к модификации пространств функций. Именно:

- $\star$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ переходит в $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})$;
- $\star$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ переходит в $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$;
- $\star$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ переходит в $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$;
- $\star$ $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ переходит в $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathbb{J}})$;
- $\star$ $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ переходит в $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathbb{J}}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$;
- $\star$ $\mathcal{E}^* = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}_{\mathrm{A}})$ переходит в $\widetilde{\mathcal{E}}^* = \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathbb{J}}, \mathbb{R}_{\mathrm{A}})$.

2.2.3 Джеты

Определено линейное отображение

$$\boldsymbol{j} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}), \quad \phi \mapsto \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi),$$

где функция $\boldsymbol{j}(\phi) = (\phi^\alpha_i(t,x))$ – *пространственный джет* функции $\phi = (\phi^\alpha(t,x))$, компоненты $\phi^\alpha_i(t,x) = \partial_{x^i}\phi^\alpha(t,x)$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$.

2.2.4 Мультипликаторы и дифференцирования

Здесь алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \widetilde{\mathcal{A}}$. Алгебра Ли дифференцирований алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$ есть свободный $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \left\{ X = \tau \cdot \partial_t + \sum_\mu \xi^\mu \cdot \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha,i} \eta^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha \;\middle|\; \tau, \xi^\mu, \eta^\alpha_i \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\}$$

с базисом $\{\partial_t, \partial_{x^\mu}, \partial^i_\alpha \mid 1 \le \mu \le m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\}$, где ∂_t – частная производная по $t \in \mathbb{R}$. $\widetilde{\mathcal{A}}$-подмодуль *вертикальных дифференцирований* имеет вид

$$\widetilde{\mathfrak{D}}_V = \left\{ V = \sum_{\alpha,i} \zeta^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha \;\middle|\; \zeta^\alpha_i \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\}.$$

Очевидно, справедливо

Предложение 2.2.1. *$\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль $\widetilde{\mathfrak{D}}_V$ всех вертикальных дифференцирований алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$ является подалгеброй алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{D}}$, причем*

$$[U,V] = W \quad \text{для всех} \quad U = \sum \xi^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha,\ V = \sum \eta^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{D}}_V,$$

где $W = \sum \zeta^\alpha_i \cdot \partial^i_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{D}}_V$, компоненты $\zeta^\alpha_i = U(\eta^\alpha_i) - V(\xi^\alpha_i)$.

2.2.5 Пространственные полные производные

Определены *пространственные полные частные производные*

$$D_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha,i} u^\alpha_{i+(\mu)} \cdot \partial^i_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{D}}, \quad 1 \le \mu \le m.$$

Здесь время t является параметром, в частности справедливы все результаты предыдущей секции с соответствующими модификациями.

Будем теперь обозначать

$$f\big|_{\boldsymbol{\phi}} = f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(t,x) = f(t,x,\boldsymbol{\phi}(t,x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})$$

для всех $f = f(t,x,\mathbf{u}) \in \widetilde{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(t,x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$. В частности,

$$f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)} = f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t,x) = f(t,x,\boldsymbol{j}(\phi)(t,x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})$$

для всех $f \in \mathcal{A}$, $\phi = \phi(t,x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$.

Предложение 2.2.2. *Для данной функции $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ равенство*

$$\partial_{x^\mu}\big(f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(t,x)\big) = \big(D_\mu f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(t,x)$$

справедливо для всех $f \in \widetilde{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi)$ для некоторой $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться доказанным выше Предложением 2.1.2, поскольку переменная t по сути является здесь параметром. $\square$

Точно также (см. Предложение 2.1.3), справедливо

Предложение 2.2.3. *Пространственные полные частные производные коммутируют, т.е.*

$$[D_\mu, D_\nu] = 0 \quad \textit{для всех} \quad 1 \le \mu, \nu \le m.$$

Для функций $L \in \widetilde{\mathcal{A}}$, $f \in \widetilde{\mathcal{E}}$, $g \in \widetilde{\mathcal{E}}^*$ операторы в пространственных полных производных $L_*, L^*, f_*, f^*, g_*, g^*$ определяются теми же формулами, что и в подсекции 2.1.6. Переменная $t \in \mathbb{R}$ является в этом случае параметром.

2.2.6 Эволюция

Для задания эволюции на пространстве $\mathbb{R}^m$ теперь необходима *эволюционная система уравнений в частных производных*, которая в наших обозначениях имеет вид $u_t = \mathrm{f}$, где $\mathrm{f} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ – заданная функция, подробнее,

$$\partial_t u^\alpha = \mathrm{f}^\alpha(t, x, \mathbf{u}), \quad \alpha \in \mathrm{A},$$

иначе $\mathrm{F} = 0$, где $\mathrm{F} = u_t - \mathrm{f}$. (Чтобы подчеркнуть выделенность букв f и F мы используем для них прямое написание.) Функция $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ называется *решением системы* $u_t = \mathrm{f}$, если

$$\partial_t \phi^\alpha(t, x) = \mathrm{f}^\alpha\big|_{\boldsymbol{\jmath}(\phi)}(t, x), \quad \alpha \in \mathrm{A}.$$

Определим *оператор* $D_t \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ *частной производной по времени в силу системы* $u_t = \mathrm{f}$ таким образом, чтобы интегральные подмногообразия распределения Картана

$$\mathrm{C}(\mathrm{f}) = \left\{ X = \tau \cdot D_t + \sum_\mu \xi^\mu \cdot D_\mu \;\middle|\; \tau, \xi^\mu \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\}$$

были индуцированы решениями системы $u_t = \mathrm{f}$ и только ими. Прежде всего положим $D_t = \partial_t + V$, где $V \in \widetilde{\mathfrak{D}}_V$. Тогда свободный $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль $\mathrm{C}(\mathrm{f})$ будет иметь необходимую размерность $1 + m$, а условие инволютивности распределения C(f) сведется к естественным равенствам

$$[D_t, D_\mu] = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \le \mu \le m.$$

Очевидно, $[\partial_t, D_\mu] = 0$, так что условие инволютивности имеет вид $[V, D_\mu]{=}0$, $1 \le \mu \le m$, т.е. $V = \mathrm{E}_g$ с некоторой $g \in \widetilde{\mathcal{A}}$ (см. Предложение 2.1.7). Далее, интегральные подмногообразия распределения C(f) имеют вид (см. Предложение 2.1.5)

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{u} - \boldsymbol{j}(\phi)(t,x) = \mathbf{0}, \quad \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}).$$

Условия касания $\big(D_\mu \boldsymbol{\Phi}\big)\big|_{\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{0}}$, $1 \le \mu \le m$, по построению выполняются для любой функции $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$, а условие касания $\big(D_t \boldsymbol{\Phi}\big)\big|_{\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{0}}$ подробнее запишется так:

$$\begin{aligned}
&\big[(\partial_t + \mathrm{E}_g)(u_i^\alpha - \phi_i^\alpha(t,x))\big]\big|_{\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{0}} \\
&\qquad = \big((D_i g^\alpha)(t,x,\mathbf{u}) - \partial_t \partial_{x^i} \phi^\alpha(t,x)\big)\big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{j}(\phi)} \\
&\qquad = \partial_{x^i}\big(g^\alpha\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t,x) - \partial_t \phi^\alpha(t,x)\big) = 0
\end{aligned}$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, где мы воспользовались Предложением 2.2.2. Другими словами, это условие касания выполняется тогда и только тогда, когда ϕ есть решение системы $u_t = g$. Таким образом, поставленные условия на оператор D_t будут выполнены, если $g = \mathrm{f}$, т.е. когда

$$D_t = \partial_t + \mathrm{E}_\mathrm{f} = \partial_t + \sum_{\alpha,i} D_i \mathrm{f}^\alpha \cdot \partial_\alpha^i = \partial_t + \sum_{\alpha,i} \mathrm{f}_i^\alpha \cdot \partial_\alpha^i$$

(здесь и всюду ниже используем сокращенную запись $\mathrm{f}_i^\alpha = D_i \mathrm{f}^\alpha$).

В этом случае дополнительно справедливо

Предложение 2.2.4. *Для данной функции $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ равенство*

$$\partial_t\big(F\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t,x)\big) = \big(D_t F\big)\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t,x)$$

имеет место для всех $F \in \widetilde{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда ϕ есть решение системы $u_t = \mathrm{f}$.

Доказательство. Предлагается провести самостоятельно, в качестве упражнения. □

Замечание. Именно это свойство оператора D_t оправдывает термин *частная производная по времени в силу системы* $u_t = \mathrm{f}$ и явилось основанием для выбора представления $D_t = \partial_t + V$.

Итак, построены все компоненты для алгебро-геометрического анализа системы $u_t = \mathrm{f}$. Именно:

- ⋆ $\widetilde{\mathbb{J}} = \mathbb{R} \times \mathbb{J} = \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$ – расширенное пространство джетов и расслоение $\widetilde{\mathbb{J}} = \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{J}}} \mathbb{R}^{1+m}$, где $\pi_{\widetilde{\mathbb{J}}}$ – проекция на первый сомножитель;
- ⋆ $\widetilde{\mathcal{A}}$ – алгебра всех гладких функций на пространстве $\widetilde{\mathbb{J}}$;
- ⋆ $\mathrm{C}(\mathrm{f}) = \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f})$ – картанова подалгебра алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{D}}$ всех дифференцирований алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Предложение 2.2.5. *Картанова подалгебра* $\widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f})$ *определяет связность в расслоении* $\widetilde{\mathbb{J}} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{J}}} \mathbb{R}^{1+m}$. *Именно, имеет место разложение* $\widetilde{\mathcal{A}}$*-модуля* $\widetilde{\mathfrak{D}}$ *в прямую сумму*

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f}) \oplus \widetilde{\mathfrak{D}}_V.$$

Доказательство. По существу совпадает с доказательством аналогичного Предложения 2.1.4. Предлагается провести его самостоятельно в качестве упражнения. □

2.2.7 Симметрии

Нормализатор подалгебры $\widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f})$ в алгебре Ли $\widetilde{\mathfrak{D}}$ есть множество *дифференцирований Ли-Беклунда*

$$\widetilde{\mathfrak{D}}_{LB}(\mathrm{f}) = \left\{ X \in \widetilde{\mathfrak{D}} \;\middle|\; [X, Y] \in \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f}) \quad \text{для всех} \quad Y \in \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f}) \right\}.$$

Опять, в силу Предложения 1.4.1, $\widetilde{\mathfrak{D}}_{LB}(\mathrm{f})$ есть подалгебра алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{D}}$, а $\widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f})$ – ее идеал, так что определена фактор-алгебра $\mathrm{Sym}(\mathrm{f}) = \widetilde{\mathfrak{D}}_{LB}(\mathrm{f}) / \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f})$ *симметрий системы* $u_t = \mathrm{f}$.

Предложение 2.2.6. *Вертикальное дифференцирование* $V \in \widetilde{\mathfrak{D}}_V$ *удовлетворяет равенствам*

$$[D_t, V] = 0, \quad [D_\mu, V] = 0, \quad 1 \le \mu \le m,$$

тогда и только тогда, когда

$$V = \mathrm{E}_g = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}, i \in \mathbb{I}} (D_i g^\alpha) \cdot \partial_\alpha^i,$$

где функция $g \in \widetilde{\mathcal{E}}$ *удовлетворяет* определяющей системе уравнений

$$\mathrm{F}_*(g) = \big(D_t - \mathrm{f}_*\big) g = 0.$$

Доказательство. Действительно, согласно Предложению 2.1.7, вертикальное дифференцирование $V \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ коммутирует с пространственными полными производными D_μ, $1 \le \mu \le m$, тогда и только тогда, когда $V = \mathrm{E}_g$, $g \in \widetilde{\mathcal{E}}$ (переменная $t \in \mathbb{R}$ является здесь параметром). Далее, коммутатор

$$[D_t, V] = [\partial_t, \mathrm{E}_g] + [E_\mathrm{f}, E_g] = \mathrm{E}_{\partial_t g} + \mathrm{E}_h = \mathrm{E}_{\partial_t g + h},$$

где $h^\alpha = \mathrm{E}_\mathrm{f}(g^\alpha) - E_g(\mathrm{f}^\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{A}$. Следовательно, $[D_t, V] = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\partial_t g^\alpha + \mathrm{E}_\mathrm{f}(g^\alpha) - E_g(\mathrm{f}^\alpha) = D_t(g^\alpha) - f_*(g)^\alpha = 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathrm{A}$$

(поясним, что $\mathrm{E}_g(\mathrm{f}^\alpha) = \mathrm{f}_*(g)^\alpha$). □

Замечание. Обратим внимание, что определяющая система уравнений $\mathrm{F}_*(g) = 0$ есть система *линейных* уравнений в частных производных на функцию g, в то время как исходная эволюционная система $u_t = \mathrm{f}$, вообще говоря, *нелинейная*.

Предложение 2.2.7. *Линейное пространство*

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathrm{f}) = \big\{ g \in \widetilde{\mathcal{E}} \;\big|\; \mathrm{F}_*(g) = 0 \big\}$$

обладает структурой алгебры Ли со скобкой Якоби

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathrm{f}) \times \widetilde{\mathcal{E}}(\mathrm{f}) \to \widetilde{\mathcal{E}}(\mathrm{f}), \quad (f, g) \mapsto h = \{f, g\},$$

где

$$h^\alpha = \mathrm{E}_f(g^\alpha) - \mathrm{E}_g(f^\alpha) \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in \mathrm{A}.$$

Доказательство. Следует лишь проверить, что справедливо равенство $(D_t - \mathrm{f}_*)h = 0$. По построению $\mathrm{E}_h = [\mathrm{E}_f, \mathrm{E}_g]$, так что согласно Предложению 2.2.6, достаточно показать, что коммутатор

$[D_t, \mathrm{E}_h] = 0$. Но, в силу тождества Якоби и опять Предложения 2.2.6, имеем

$$[D_t, \mathrm{E}_h] = [D_t, [\mathrm{E}_f, \mathrm{E}_g]] = -[\mathrm{E}_f, [\mathrm{E}_g, D_t]] - [\mathrm{E}_g, [D_t, \mathrm{E}_f]] = 0.$$

□

Предложение 2.2.8. *Имеет место изоморфизм алгебр Ли*

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mathrm{f}) \simeq \mathrm{Sym}(\mathrm{f}), \quad g \mapsto \mathrm{E}_g + \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f}).$$

Доказательство. По существу, повторяет доказательство Предложения 2.1.9 с учетом Предложений 2.2.6 и 2.2.7. Предлагается проделать это самостоятельно, в качестве упражнения. □

2.2.8 Дифференциальные формы

Определен свободный $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{A}}}(\wedge \widetilde{\mathfrak{D}}, \widetilde{\mathcal{A}})) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{\Omega}^q, \quad \widetilde{\Omega}^q = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{A}}}(\wedge^q \widetilde{\mathfrak{D}}, \widetilde{\mathcal{A}}),$$

дифференциальных форм на пространстве $\widetilde{\mathbb{J}}$. В частности,

$$\widetilde{\Omega}^1 = \left\{ \omega = \omega_0 \cdot dt + \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot du^\alpha_i \;\middle|\; \omega_0, \omega_\mu, \omega^i_\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\},$$

где лишь конечное число компонент $\omega^i_\alpha \neq 0$, а семейство

$$\left\{ dt, dx^\mu, du^\alpha_i \in \widetilde{\Omega}^1 \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I} \right\}$$

есть базис в $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуле $\widetilde{\Omega}^1$, дуальный к базису

$$\left\{ \partial_t, \partial_{x^\mu}, \partial^i_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{D}} \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I} \right\}$$

в $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуле $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Детальное представление при $q > 1$ достаточно громоздкое и имеет следующую структуру

$$\widetilde{\Omega}^q = \wedge^q \widetilde{\Omega}^1,$$

где внешняя степень берется в категории $\widetilde{\mathcal{A}}$-модулей.

Опять, для любых $X \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ и $q \in \mathbb{Z}_+$ определены морфизмы

- ⋆ $\iota_X \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{A}}}(\widetilde{\Omega}^q, \widetilde{\Omega}^{q-1})$,
- ⋆ $L_X \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\widetilde{\Omega}^q)$,

(см. подсекцию 1.3.3, где описаны и свойства этих морфизмов). Следуя принятой в данной тематике традиции будем писать $X(\omega)$ вместо $L_X(\omega)$ для всех $X \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ и $\omega \in \widetilde{\Omega}$.

2.2.9 Вариационный бикомплекс

В согласии с общим определением форма $\omega \in \widetilde{\Omega}^q$, называется p-картановой, если $\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = 0$ при $X_1, \ldots, X_{p-1} \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ и $X_p, \ldots, X_q \in \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f})$, где $p, q \in \mathbb{Z}_+$ (см. подсекцию 1.4.3, стр. 45). Обозначим через $\mathrm{C}^p\widetilde{\Omega}^q$ $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль всех p-картановых q-форм на пространстве джетов $\widetilde{\mathbb{J}}$.

Важную роль играют 1-формы

$$\delta u_i^\alpha = du_i^\alpha - \mathrm{f}_i^\alpha \cdot dt - \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu, \quad \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I},$$

напомним, что $\mathrm{f}_i^\alpha = D_i \mathrm{f}^\alpha$.

Пусть функция $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$. По построению, ее джет $\mathbf{j}(\phi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ порождает одноименное гладкое подмногообразие $\mathbf{j}(\phi) = \{(x, \mathbf{j}(\phi))(x) \in \widetilde{\mathbb{J}} \mid x \in \mathbb{R}^{1+m}\}$ пространства $\widetilde{\mathbb{J}}$.

Предложение 2.2.9. *Для данной функции $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ сужение $\delta u_i^\alpha\big|_{\mathbf{j}(\phi)} = 0$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и $i \in \mathbb{I}$ тогда и только тогда, когда ϕ есть решение системы $u_t = \mathrm{f}$.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
\delta u_i^\alpha\big|_{\mathbf{j}(\phi)} &= \left(du_i^\alpha - \mathrm{f}_i^\alpha \cdot dt - \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu\right)\bigg|_{\mathbf{j}(\phi)} \\
&= d\big(\partial_{x^i}\phi^\alpha\big) - \partial_{x^i}\big(\mathrm{f}^\alpha|_{\mathbf{j}(\phi)}\big) \cdot dt - \sum_\mu \big(\partial_{x^{i+(\mu)}}\phi^\alpha\big) \cdot dx^\mu \\
&= \big(\partial_{x^i}\partial_t\phi^\alpha\big) \cdot dt + \sum_\mu \big(\partial_{x^{i+(\mu)}}\phi^\alpha\big) \cdot dx^\mu \\
&\quad - \partial_{x^i}\big(\mathrm{f}^\alpha|_{\mathbf{j}(\phi)}\big) \cdot dt - \sum_\mu \big(\partial_{x^{i+(\mu)}}\phi^\alpha\big) \cdot dx^\mu \\
&= \partial_{x^i}\big(\partial_t\phi^\alpha - \mathrm{f}^\alpha|_{\mathbf{j}(\phi)}\big) \cdot dt,
\end{aligned}$$

что и требуется. □

Предложение 2.2.10. *Для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$ справедливы утверждения:*

- ⋆ $\delta u_i^\alpha = D_i(\delta u^\alpha), \quad u^\alpha = u_0^\alpha,$
- ⋆ $\delta u_i^\alpha \in \mathrm{C}^1\widetilde{\Omega}^1.$

Доказательство. Действительно (см. доказательство аналогичного Предложения 2.1.11),

$$\begin{aligned}
D_\mu\big(\delta u_i^\alpha\big) &= D_\mu\big(du_i^\alpha - \mathrm{f}_i^\alpha\cdot dt - \sum_\nu u_{i+(\nu)}^\alpha\cdot dx^\nu\big)\\
&= d(D_\mu u_i^\alpha) - (D_\mu \mathrm{f}_i^\alpha)\cdot dt - \sum_\nu (D_\mu u_{i+(\nu)}^\alpha)\cdot dx^\nu\\
&= du_{i+(\mu)}^\alpha - \mathrm{f}_{i+(\mu)}^\alpha\cdot dt - \sum_\nu u_{i+(\mu)+(\nu)}^\alpha\cdot dx^\nu = \delta u_{i+(\mu)}^\alpha.
\end{aligned}$$

По индукции, отсюда выводим равенство $\delta u_i^\alpha = D_i(\delta u_0^\alpha)$. Далее,

$$\begin{aligned}
\delta u_i^\alpha(D_t) &= D_t(u_i^\alpha) - \mathrm{f}_i^\alpha\cdot D_t(t) = \mathrm{f}_i^\alpha - \mathrm{f}_i^\alpha = 0,\\
\delta u_i^\alpha(D_\mu) &= D_\mu(u_i^\alpha) - \sum_\nu u_{i+(\nu)}^\alpha D_\mu(x^\nu)\\
&= u_{i+(\mu)}^\alpha - \sum_\nu u_{i+(\nu)}^\alpha\delta_\mu^\nu = 0 \quad \text{для всех} \quad 1\le\mu\le m,
\end{aligned}$$

так что $\delta u_i^\alpha \in \mathrm{C}^1\widetilde{\Omega}^1$. □

Предложение 2.2.11. *Для всех* $\alpha\in\mathrm{A}$, $i\in\mathbb{I}$ *имеет место равенство*

$$D_t(\delta u_i^\alpha) = (\mathrm{f}_i^\alpha)_*(\delta u), \quad \delta u = (\delta u^\alpha).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
D_t(\delta u_i^\alpha) &= (\partial_t + \mathrm{E_f})(du_i^\alpha - \mathrm{f}_i^\alpha\cdot dt - \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha\cdot dx^\mu)\\
&= -\partial_t \mathrm{f}_i^\alpha\cdot dt + d\mathrm{f}_i^\alpha - \mathrm{E_f}(\mathrm{f}_i^\alpha)\cdot dt - \sum_\mu \mathrm{f}_{i+(\mu)}^\alpha\cdot dx^\mu\\
&= d_H\mathrm{f}_i^\alpha + d_V\mathrm{f}_i^\alpha - \big(\partial_t + \mathrm{E_f}\big)(\mathrm{f}_i^\alpha)\cdot dt - \sum_\mu \mathrm{f}_{i+(\mu)}^\alpha\cdot dx^\mu\\
&= d_V\mathrm{f}_i^\alpha = \sum_{\beta,j}\big(\partial_\beta^j \mathrm{f}_i^\alpha\big)\cdot\delta u_j^\beta = (\mathrm{f}_i^\alpha)_*(\delta u),
\end{aligned}$$

в силу предыдущего Предложения. □

В частности, всякая 1-форма $\omega\in\widetilde{\Omega}^1$ имеет два представления:

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_0\cdot dt + \sum_\mu \omega_\mu\cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i}\omega_\alpha^i\cdot du_i^\alpha\\
&= \chi_0\cdot dt + \sum_\mu \chi_\mu\cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i}\omega_\alpha^i\cdot \delta u_i^\alpha,
\end{aligned}$$

где $\chi_0 = \omega_0 + \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot \mathrm{f}^\alpha_i$, $\chi_\mu = \omega_\mu + \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot u^\alpha_{i+(\mu)}$.

Таким образом, семейство

$$\left\{dt, dx^\mu, \delta u^\alpha_i \in \widetilde{\Omega}^1 \mid 1 \le \mu \le m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\right\}$$

образует альтернативный базис в $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуле $\widetilde{\Omega}^1$, более удобный для наших целей. В частности, имеет место разложение в прямую сумму $\widetilde{\mathcal{A}}$-модулей

$$\widetilde{\Omega}^1 = \widetilde{\Omega}^1_H \oplus \widetilde{\Omega}^1_V(\mathrm{f}),$$

где

$$\widetilde{\Omega}^1_H = \left\{\omega = \omega_0 \cdot dt + \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu\right\}, \quad \widetilde{\Omega}^1_V(\mathrm{f}) = \left\{\omega = \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot \delta u^\alpha_i\right\}$$

В случае $q > 1$ ситуация аналогичная:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}^q &= \oplus_{p+r=q}\big(\wedge^p \widetilde{\Omega}^1_V(\mathrm{f})\big) \wedge \big(\wedge^r \widetilde{\Omega}^1_H\big) \\ &= \oplus_{p+r=q}\widetilde{\Omega}^p_V(\mathrm{f}) \wedge \widetilde{\Omega}^r_H = \oplus_{p+r=q}\widetilde{\Omega}^{pr}. \end{aligned}$$

Итак, справедливо

Предложение 2.2.12. *$\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль $\widetilde{\Omega}$ биградуирован:*

$$\widetilde{\Omega} = \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{\Omega}^{pq}.$$

Посмотрим теперь, как обстоят дела с внешним дифференциалом $d : \widetilde{\Omega}^q \to \widetilde{\Omega}^{q+1}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $g \in \widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\Omega}^0 = \widetilde{\Omega}^{00}$, тогда

$$\begin{aligned} dg &= (\partial_t g) \cdot dt + \sum_\mu (\partial_{x^\mu} g) \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} (\partial^i_\alpha g) \cdot du^\alpha_i \\ &= (D_t g) \cdot dt + \sum_\mu (D_\mu g) \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} (\partial^i_\alpha g) \cdot \delta u^\alpha_i \\ &= d_H g + d_V g \in \widetilde{\Omega}^1_H \oplus \widetilde{\Omega}^1_V(\mathrm{f}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_H g &= (D_t g) \cdot dt + \sum_\mu (D_\mu g) \cdot dx^\mu, \\ d_V g &= \sum_{\alpha,i} (\partial^i_\alpha g) \cdot \delta u^\alpha_i = g_*(\delta u), \quad \delta u = (\delta u^\alpha). \end{aligned}$$

В частности,

* $d_H t = dt$, $d_V t = 0$;
* $d_H x^\mu = dx^\mu$, $d_V x^\mu = 0$;
* $d_H u_i^\alpha = \mathrm{f}_i^\alpha \cdot dt + \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu$, $d_V u_i^\alpha = \delta u_i^\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$.

Пусть $\omega = \omega_0 \cdot dt + \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu \in \widetilde{\Omega}_H^1$, тогда

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\omega_0 \wedge dt + \sum_\mu d\omega_\mu \wedge dx^\mu \\
&= \big(d_H\omega_0 + d_V\omega_0\big) \wedge dt + \sum_\mu \big(d_H\omega_\mu + d_V\omega_\mu\big) \wedge dx^\mu \\
&= \big(d_H\omega_0 \wedge dt + \sum_\mu d_H\omega_\mu \wedge dx^\mu\big) + \big(d_V\omega_0 \wedge dt + \sum_\mu d_V\omega_\mu \wedge dx^\mu\big) \\
&= d_H\omega + d_V\omega \in \widetilde{\Omega}^{02} \oplus \widetilde{\Omega}^{11},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_H\omega &= d_H\omega_0 \wedge dt + \sum_\mu d_H\omega_\mu \wedge dx^\mu, \\
d_V\omega &= d_V\omega_0 \wedge dt + \sum_\mu d_V\omega_\mu \wedge dx^\mu.
\end{aligned}$$

Предложение 2.2.13. *Для всех* $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$ *справедливо равенство*

$$d\delta u_i^\alpha = dt \wedge \big((\mathrm{f}_i^\alpha)_*(\delta u)\big) - \sum_\mu \delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu,$$

где

$$(\mathrm{f}_i^\alpha)_*(\delta u) = \sum_{\beta,j} (\partial_\beta^j \mathrm{f}_i^\alpha) \cdot \delta u_j^\beta = \sum_{\beta,j} (\partial_\beta^j \mathrm{f}_i^\alpha) \cdot D_i(\delta u^\beta)$$

(сравни с определениями в подсекции 2.1.6 и Предложением 2.2.11).
В частности,

$$d_H \delta u_i^\alpha = d\delta u_i^\alpha, \quad d_V \delta u_i^\alpha = (d_V \circ d_V) u_i^\alpha = 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$
\begin{aligned}
d\delta u_i^\alpha &= d\big(du_i^\alpha - \mathrm{f}_i^\alpha \cdot dt - \sum_\mu u_{i+(\mu)}^\alpha \cdot dx^\mu\big) \\
&= -d\mathrm{f}_i^\alpha \wedge dt - \sum_\mu du_{i+\mu}^\alpha \wedge dx^\mu \\
&= -\Bigg(\sum_\mu (D_\mu \mathrm{f}_i^\alpha) \cdot dx^\mu + \sum_{\beta,j} (\partial_\beta^j \mathrm{f}_i^\alpha) \cdot \delta u_j^\beta\Bigg) \wedge dt \\
&\quad - \sum_\mu \big(\delta u_{i+(\mu)}^\alpha + (D_{i+(\mu)} \mathrm{f}^\alpha) \cdot dt\big) \wedge dx^\mu \\
&= -\sum_{\beta,j} (\partial_\beta^j \mathrm{f}_i^\alpha) \cdot \delta u_j^\beta \wedge dt - \sum_\mu \delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu.
\end{aligned}
$$

□

Пусть $\omega = \sum_{\alpha,i} \omega_\alpha^i \cdot \delta u_i^\alpha \in \widetilde{\Omega}_V^1(\mathrm{f})$, тогда

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{\alpha,i} \big(d\omega_\alpha^i \wedge \delta u_i^\alpha + \omega_\alpha^i \cdot d\delta u_i^\alpha\big) \\
&= \sum_{\alpha,i} \Big(\big(d_H \omega_\alpha^i + d_V \omega_\alpha^i\big) \wedge \delta u_i^\alpha + \omega_\alpha^i \cdot d_H \delta u_i^\alpha\Big) \\
&= \sum_{\alpha,i} \big(- \delta u_i^\alpha \wedge d_H \omega_\alpha^i + \omega_\alpha^i \cdot d_H \delta u_i^\alpha\big) + \sum_{\alpha,i} d_V \omega_\alpha^i \wedge \delta u_i^\alpha \\
&= d_H \omega + d_V \omega \in \widetilde{\Omega}^{11} \oplus \widetilde{\Omega}^{20},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
d_H \omega &= \sum_{\alpha,i} \big(- \delta u_i^\alpha \wedge d_H \omega_\alpha^i + \omega_\alpha^i \cdot d_H \delta u_i^\alpha\big), \\
d_V \omega &= \sum_{\alpha,i} d_V \omega_\alpha^i \wedge \delta u_i^\alpha.
\end{aligned}
$$

В общем случае справедливо

Предложение 2.2.14. *Имеет место представление*

$$d = d_H + d_V,$$

где

$$d_H : \widetilde{\Omega}^{pq} \to \widetilde{\Omega}^{p,q+1}, \quad d_V : \widetilde{\Omega}^{pq} \to \widetilde{\Omega}^{p+1,q},$$

для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться приведенными выше вычислениями и тем фактом, что внешний дифференциал есть косое дифференцирование внешней алгебры $\widetilde{\Omega}$ (см. Предложение 1.3.25 на стр. 33). □

Более того, справедливо

Предложение 2.2.15. *Имеют место равенства:*

$$d_H \circ d_H = d_H \circ d_V + d_V \circ d_H = d_V \circ d_V = 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} d \circ d &= (d_H + d_V) \circ (d_H \circ d_V) \\ &= d_H \circ d_H + (d_H \circ d_V + d_V \circ d_H) + d_V \circ d_V = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_H \circ d_H &: \widetilde{\Omega}^{pq} \to \widetilde{\Omega}^{p,q+2}, \\ d_H \circ d_V + d_V \circ d_H &: \widetilde{\Omega}^{pq} \to \widetilde{\Omega}^{p+1,q+1}, \\ d_V \circ d_V &: \widetilde{\Omega}^{pq} \to \widetilde{\Omega}^{p+2,q}, \end{aligned}$$

и для завершения доказательства следует воспользоваться Предложением 2.1.13. □

Подводя итоги, приходим к выводу, что справедлива

Теорема 6. *Определен* вариационный бикомплекс системы $u_t = \mathrm{f}$

$$\left\{\widetilde{\Omega}^{pq}, d_H^{pq}, d_V^{pq} \mid p \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq q \leq 1+m\right\},$$

где $d_H^{pq} = d_H\big|_{\widetilde{\Omega}^{pq}}$, $d_V^{pq} = d_V\big|_{\widetilde{\Omega}^{pq}}$.

Добавим к вариационному бикомплексу системы $u_t = \mathrm{f}$ стандартный комплекс де Рама пространства $\mathbb{R}^{1+m}$

$$\left\{\widetilde{\Omega}^q_R, d^q_R \mid 0 \leq q \leq 1+m\right\}$$

где

$\widetilde{\Omega}^q_R = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})}(\wedge^q \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}))$, и определены естественные вложения $0 \to \widetilde{\Omega}^q_R \to \widetilde{\Omega}^{0q}$,

$d^q_R = d^{0q}_H\big|_{\widetilde{\Omega}^q_R}$

(см., например [14], подсекцию 2.4.2).

Добавим еще комплекс *функциональных форм системы* $u_t = \mathrm{f}$

$$\big\{\widetilde{\mathfrak{F}}^p, \delta^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\big\},$$

где

> фактор-пространства $\widetilde{\mathfrak{F}}^p = \widetilde{\Omega}^{p,1+m}\big/ \operatorname{im} d_H^{pm}$, причем определены канонические проекции $\widetilde{\Omega}^{pm} \to \widetilde{\mathfrak{F}}^p \to 0$,
>
> фактор-дифференциалы $\delta = \delta^p : \widetilde{\mathfrak{F}}^p \to \widetilde{\mathfrak{F}}^{p+1}$ действуют по стандартному правилу $[\omega] \mapsto \delta^p[\omega] = [d_V^{pm}\omega]$.

В итоге получим *пополненный бикомплекс системы* $u_t = \mathrm{f}$, изображенный на стр. 108.

Как показано в подсекции 1.3.3, на пространстве $\widetilde{\Omega}$ для любых $\theta \in \widetilde{\Omega}^1$ и $D \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ определены отображения λ_θ, ι_D, $L_D = D$ с перечисленными там свойствами.

Ниже $\theta = dt \in \widetilde{\Omega}^1_H$, $D = D_t \in \widetilde{\mathfrak{D}}_H(\mathrm{f})$.

Рассмотрим теперь $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль *пространственных форм системы* $u_t = \mathrm{f}$

$$\Theta = \big\{\omega \in \widetilde{\Omega} \mid \iota_{D_t}(\omega) = 0\big\} = \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}_+}\Theta^{pq},$$

где

$$\Theta^{pq} = \Theta \cap \widetilde{\Omega}^{pq} = \widetilde{\Omega}^p_V(\mathrm{f}) \wedge \Theta^q_H, \quad \Theta^q_H = \Theta \cap \widetilde{\Omega}^q_H,$$

поскольку $\Theta \cap \widetilde{\Omega}^p_V(\mathrm{f}) = \widetilde{\Omega}^p_V(\mathrm{f})$. В частности,

$$\Theta^{0q} = \Theta^q_H = \wedge^q\Theta^1_H, \quad \Theta^1_H = \left\{\omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu \,\middle|\, \omega_\mu \in \widetilde{\mathcal{A}}\right\}.$$

Таким образом, форма $\omega \in \Theta$ тогда и только тогда, когда она не содержит дифференциал dt явным образом, а только в составе 1-форм δu_i^α, напомним, что $\delta u_i^\alpha(D_t) = 0$. Подчеркнем, что формы δu_i^α рассматриваются здесь как единое целое, как базисные 1-формы на Θ.

Согласно Предложению 1.3.17, имеет место равенство (здесь $dt(D_t) = D_t(t) = 1 \in \widetilde{\mathcal{A}}$):

$$\iota_{D_t} \circ \lambda_{dt} + \lambda_{dt} \circ \iota_{D_t} = \operatorname{id}_{\widetilde{\Omega}}.$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & 0 \arrow[r] & \widetilde{\Omega}^{20} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\Omega}^{21} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \dots \arrow[r, "d_H"] & \widetilde{\Omega}^{2m} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\Omega}^{2,1+m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\mathfrak{F}}^{2} \arrow[r] \arrow[u, "\delta"'] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[u, phantom] & \widetilde{\Omega}^{10} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\Omega}^{11} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \dots \arrow[r, "d_H"] & \widetilde{\Omega}^{1m} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\Omega}^{1,1+m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\mathfrak{F}}^{1} \arrow[r] \arrow[u, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & \widetilde{\Omega}^{00} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\Omega}^{01} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \dots \arrow[r, "d_H"] & \widetilde{\Omega}^{0m} \arrow[r, "d_H"] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\Omega}^{0,1+m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"'] & \widetilde{\mathfrak{F}}^{0} \arrow[r] \arrow[u, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & \widetilde{\Omega}^{0}_{R} \arrow[r, "d_R"] \arrow[u] & \widetilde{\Omega}^{1}_{R} \arrow[r, "d_R"] \arrow[u] & \dots \arrow[r, "d_R"] & \widetilde{\Omega}^{m}_{R} \arrow[r, "d_R"] \arrow[u] & \widetilde{\Omega}^{1+m}_{R} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Положим $\pi = \iota_{D_t} \circ \lambda_{dt}, \widetilde{\pi} = \lambda_{dt} \circ \iota_{D_t} \in \mathrm{End}_{\widetilde{\mathcal{A}}}(\widetilde{\Omega})$. Тогда, в силу предыдущего равенства,

$$\pi \circ \pi = \pi, \quad \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}, \quad \pi + \widetilde{\pi} = \mathrm{id}_{\widetilde{\Omega}},$$

т.е. морфизмы π, $\widetilde{\pi}$ образуют полную систему проекторов на $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуле $\widetilde{\Omega}$. Более того, образ $\mathrm{im}(\pi) = \pi(\widetilde{\Omega}) = \Theta$. Положим еще $\widetilde{\Theta} = \mathrm{im}(\widetilde{\pi}) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\Omega})$, тогда получим разложение в прямую сумму $\widetilde{\mathcal{A}}$-модулей

$$\widetilde{\Omega} = \Theta \oplus \widetilde{\Theta}, \quad \text{подробнее} \quad \widetilde{\Omega}^{pq} = \Theta^{pq} \oplus \widetilde{\Theta}^{pq},$$

где

$$\widetilde{\Theta}^{pq} = \widetilde{\pi}(\widetilde{\Omega}^{pq}) = \lambda_{dt}(\Theta^{p,q-1}) = dt \wedge \Theta^{p,q-1}.$$

Таким образом,

$$\widetilde{\Omega}^{pq} = \Theta^{pq} \oplus \big(dt \wedge \Theta^{p,q-1}\big) \quad \text{для всех} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+,$$

т.е. каждая форма $\omega \in \widetilde{\Omega}^{pq}$ имеет однозначное представление

$$\omega = \phi + dt \wedge \psi, \quad \text{где} \quad \phi = \pi(\omega) \in \Theta^{pq},\ \psi = \iota_{D_t}(\omega) \in \Theta^{p,q-1}.$$

Обратимся теперь к дифференциалам d_H и d_V. Горизонтальный дифференциал d_H расщепляется на два частных дифференциала d_t и d_x, так что теперь

$$d = d_t + d_x + d_V,$$

где для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$ имеем:

- ⋆ $d_t : \Theta^{pq} \to dt \wedge \Theta^{pq}$,
- ⋆ $d_x : \Theta^{pq} \to \Theta^{p,q+1}$,
- ⋆ $d_V : \Theta^{pq} \to \Theta^{p+1,q}$.

Предложение 2.2.16. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} d_t \circ d_t &= d_t \circ d_x + d_x \circ d_t = d_t \circ d_V + d_V \circ d_t \\ &= d_x \circ d_x = d_x \circ d_V + d_V \circ d_x = d_V \circ d_V = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, для любой формы $\omega \in \Theta^{pq}$ равенство $d \circ d = 0$ влечет

$$
\begin{aligned}
0 &= (d_t + d_x + d_V) \circ (d_t + d_x + d_V)\omega \\
&= (d_t \circ d_t)\omega + (d_t \circ d_x + d_x \circ d_t)\omega + (d_t \circ d_V + d_V \circ d_t)\omega \\
&\qquad + (d_x \circ d_x)\omega + (d_x \circ d_V + d_V \circ d_x)\omega + (d_V \circ d_V)\omega \\
&\in (dt \wedge dt \wedge \Theta^{pq}) \oplus (dt \wedge \Theta^{p,q+1}) \oplus (dt \wedge \Theta^{p+1,q}) \\
&\qquad \oplus \Theta^{p,q+2} \oplus \Theta^{p+1,q+1} \oplus \Theta^{p+2,q}.
\end{aligned}
$$

Поскольку здесь каждое слагаемое лежит в своей компоненте прямой суммы, из равенства суммы нулю следует, что каждое слагаемое тоже равно нулю. $\square$

Аналогичным образом, из равенства $d(dt) = 0$ следует, что $d_t(dt) = d_x(dt) = d_V(dt) = 0$, а из равенства $dt \wedge dt = 0$ следует, что $d_t\bigl(dt \wedge \Theta^{pq}\bigr) = 0$.

В частности, согласно Предложению 2.2.13, для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$ имеем

$$
d_t(\delta u_i^\alpha) = dt \wedge \bigl((\mathrm{f}_i^\alpha)_*(\delta u)\bigr), \quad d_x(\delta u_i^\alpha) = -\sum_\mu \delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge dx^\mu.
$$

В силу равенств $d_x \circ d_x = d_x \circ d_V + d_V \circ d_x = d_V \circ d_V = 0$ определен *пространственный бикомплекс системы* $u_t = \mathrm{f}$

$$
\bigl\{\Theta^{pq}, d_x^{pq}, d_V^{pq} \mid p, q \in \mathbb{Z}_+\bigr\},
$$

где дифференциалы $d_x^{pq} = d_x\big|_{\Theta^{pq}}$, $d_V^{pq} = d_V\big|_{\Theta^{pq}}$.

Добавим *пространственный комплекс де Рама*

$$
\bigl\{\Theta_R^q, d_x^q \mid 0 \le q \le m\bigr\},
$$

где

$\Theta_R^q = \bigl\{\omega \in \widetilde{\Omega}_R^q \mid \iota_{D_t}(\omega) = 0\bigr\}$, причем определены естественные вложения $0 \to \Theta_R^q \to \Theta^{0q}$,

$d_x^q = d_x^{0q}\big|_{\Theta_R^q}$.

Добавим еще комплекс *пространственных функциональных форм системы* $u_t = \mathrm{f}$

$$
\bigl\{\mathfrak{G}^p, \delta^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\bigr\},
$$

где

фактор-пространства $\mathfrak{G}^p = \Theta^{pm} \big/ \operatorname{im} d_x^{p,m-1}$, причем определены канонические проекции $\Theta^{pm} \to \mathfrak{G}^p \to 0$,

фактор-дифференциалы $\delta = \delta^p : \mathfrak{G}^p \to \mathfrak{G}^{p+1}$ действуют по стандартному правилу $[\omega] \mapsto \delta^p[\omega] = [d_V^{pm}\omega]$.

В результате получим *пополненный пространственный бикомплекс системы* $u_t = \mathrm{f}$, изображенный на стр. 111, где алгебра гладких функций $\mathbf{T} = \{f(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\
 & 0 \arrow[r] & \Theta^{20} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u, "d_V"] & \Theta^{21} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u, "d_V"] & \vdots \arrow[r, "d_x"] & \Theta^{2m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"] & \mathfrak{G}^2 \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \Theta^{10} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u, "d_V"] & \Theta^{11} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u, "d_V"] & \vdots \arrow[r, "d_x"] & \Theta^{1m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"] & \mathfrak{G}^1 \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{T} \arrow[r] \arrow[u] & \Theta^{00} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u, "d_V"] & \Theta^{01} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u, "d_V"] & \vdots \arrow[r, "d_x"] & \Theta^{0m} \arrow[r] \arrow[u, "d_V"] & \mathfrak{G}^0 \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{T} \arrow[r] \arrow[u] & \Theta_R^{0} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u] & \Theta_R^{1} \arrow[r, "d_x"] \arrow[u] & \vdots \arrow[r, "d_x"] & \Theta_R^{m} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Замечание. Бикомплекс на стр. 111, получен из бикомплекса на стр. 73, заменами $\mathbb{R} \mapsto \mathbf{T}$, $\Omega \mapsto \Theta$, $\mathfrak{F} \mapsto \mathfrak{G}$, $d_H \mapsto d_x$.

Лемма 2.2.1. *Пополненный пространственный бикомплекс системы* $u_t = \mathrm{f}$ *ациклический, т.е. все его строки и столбцы точные.*

Доказательство. По построению, в пополненном пространственном бикомплексе временная переменная t является параметром. Более того, при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ диаграмма, изображенная на стр. 111 изоморфна диаграмме, изображенной на стр. 73. В частности, гомотопические операторы h_V (см. стр. 76), $h_{\mathfrak{F}}$ (см. стр. 78) и h_H (см. стр. 83) порождают соответствующие гомотопические операторы h_V, $h_{\mathfrak{G}}$ и h_x для пополненного пространственного бикомплекса, гладко зависящие от параметра t. Как следствие, пополненный пространственный бикомплекс ациклический, в силу тех же аргументов, что и пополненный бикомплекс, изображенный на стр. 73. □

В полной аналогии с результатами подсекции 2.1.12 имеет место следующее

Предложение 2.2.17. *Определена коммутативная диаграмма линейных пространств, изображенная на стр. 112, с точными*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{G}^2 \arrow[u, "\delta"] \arrow[rr, "\mathrm{I}"] & & \Theta_I^{2m} \arrow[u, "\delta_I"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{G}^1 \arrow[u, "\delta"] \arrow[rr, "\mathrm{I}"] & & \Theta_I^{1m} \arrow[u, "\delta_I"'] \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathfrak{G}^0 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\delta_I"'] & & \\
 & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

строками и столбцами, где (см. стр. 88 и ниже)

$$
\begin{aligned}
&\Theta_I^{pm} = \{\omega \in \Theta^{pm} \mid I(\omega) = \omega\}, \quad p \in \mathbb{N},\\
&I = I^p : \Theta^{pm} \to \Theta^{pm}, \quad \omega \mapsto I(\omega) = \frac{1}{p} \sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge K_\alpha(\omega),\\
&K_\alpha = \sum_{\boldsymbol{\mu}} (-1)^{|\boldsymbol{\mu}|} D_{\boldsymbol{\mu}} \omega_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}, \quad \omega_\alpha^{\boldsymbol{\mu}} = \iota_\alpha^{\boldsymbol{\mu}},\\
&\mathrm{I} = \mathrm{I}^p : \mathfrak{G}^p \simeq \Theta_I^{pm}, \quad [\omega] \mapsto \mathrm{I}([\omega]) = I(\omega), \quad p \in \mathbb{N},\\
&\delta_I = \delta_I^0 : \mathfrak{G}^0 \to \Theta_I^{1m}, \quad [\omega] \mapsto \delta_I[\omega] = I(d_V \omega), \quad p = 0,\\
&\delta_I = \delta_I^p : \Theta_I^{pm} \to \Theta_I^{p+1,m}, \quad \omega \mapsto \delta_I \omega = I(d_V \omega), \quad p \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Поскольку здесь переменная $t \in \mathbb{R}$ является параметром, для доказательства достаточно воспользоваться рассуждениями подсекции 2.1.12. □

Следствие 2.2.1. *Имеет место изоморфизм* $\delta_I^0 : \mathfrak{G}^0 \simeq \ker \delta_I^1$, *где ядро* $\ker \delta_I^1 = \{\phi \in \Theta_I^{1m} \mid \delta_I(\phi) = 0\}$.

Теорема 7. *В пополненном бикомплексе системы* $u_t = \mathrm{f}$, *изображенном на стр. 108,*

(1) все столбцы точные,

(2) нижняя строка (пространственный комплекс де Рама) точная,

(3) остальные строки точные во всех членах, кроме члена $\widetilde{\Omega}^{pm}$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Докажем точность столбцов. Точность в членах $\widetilde{\Omega}_R^q$, $\widetilde{\Omega}^{0q}$, $0 \le q \le 1 + m$, доказывается теми же рассуждениями, что и в случае пополненного бикомплекса, изображенного на стр. 73. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $0 \le q \le 1 + m$,

$$
\omega = \phi + dt \wedge \psi \in \widetilde{\Omega}^{pq} = \Theta^{pq} \oplus (dt \wedge \Theta^{p,q-1}), \quad d_V \omega = 0.
$$

В этом случае, равенство $d_V(\phi + dt \wedge \psi) = d_V \phi + dt \wedge d_V \psi = 0$ сводится к равенствам $d_V \phi = 0$, $d_V \psi = 0$, что в силу точности столбцов пополненного пространственного бикомплекса системы $u_t = \mathrm{f}$, влечет представления $\phi = d_V \phi'$, $\psi = d_V \psi'$, где формы $\phi' \in \Theta^{p-1,q}$, $\psi' \in \Theta^{p-1,q-1}$, и значит $\omega = d_V \omega'$, где $\omega' = \phi' + dt \wedge \psi' \in$

$\widetilde{\Omega}^{p-1,q}$. Точность крайнего правого столбца доказывается теми же рассуждениями, что и в случае пополненного бикомплекса, изображенного на стр. 73.

Точность нижней строки, как и выше, следует из стандартной леммы Пуанкаре.

Пусть $p \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq q \leq m-1$,

$$\omega = \phi + dt \wedge \psi \in \widetilde{\Omega}^{pq} = \Theta^{pq} \oplus (dt \wedge \Theta^{p,q-1}), \quad d_H\omega = 0.$$

Здесь, равенство

$$\begin{aligned} d_H\omega &= (d_t + d_x)(\phi + dt \wedge \psi) = d_t\phi + d_x\phi - dt \wedge d_x\psi \\ &= d_x\phi + dt \wedge (D_t\phi - d_x\psi) = 0 \end{aligned}$$

(мы учли, что $d_t\phi = dt \wedge D_t\phi$), сводится к равенствам $d_x\phi = 0$, $D_t\phi - d_x\psi = 0$. Из первого равенства, в силу точности строк пополненного пространственного бикомплекса системы $u_t = \mathrm{f}$, следует, что $\phi = d_x\phi'$, $\phi' \in \Theta^{p,q-1}$, тогда второе равенство дает $d_x(D_t\phi' - \psi) = 0$ (учтено, что $[D_t, d_x] = 0$), откуда, опять в в силу точности строк пополненного пространственного бикомплекса системы $u_t = \mathrm{f}$, имеем $D_t\phi' - \psi = d_x\psi'$, $\psi' \in \Theta^{p,q-2}$. Положим $\omega' = \phi' + dt \wedge \psi' \in \widetilde{\Omega}^{p,q-1}$, тогда

$$\begin{aligned} d_H\omega' &= (d_t + d_x)(\phi' + dt \wedge \psi') = d_t\phi' + d_x\phi' - dt \wedge d_x\psi' \\ &= \phi + dt \wedge (D_t\phi' - D_t\phi' + \psi) = \phi + dt \wedge \psi = \omega, \end{aligned}$$

что и требуется. Точность строк в членах $\widetilde{\Omega}^{p,1+m}$, $\widetilde{\mathfrak{F}}^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, доказывается теми же рассуждениями, что и в случае пополненного бикомплекса, изображенного на стр. 73. $\square$

2.2.10 Законы сохранения

Итак, в пополненном бикомплексе системы $u_t = \mathrm{f}$ есть только один столбец нетривиальных пространств когомологий

$$\mathrm{CL}^p(\mathrm{f}) = \ker d_H^{pm} \big/ \operatorname{im} d_H^{p,m-1}, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Изучим его подробнее.

Предложение 2.2.18. *Производная Ли $D_t = L_{D_t}$ обладает свойствами:*

* $D_t : \Theta^{pq} \to \Theta^{pq}$ *для всех* $p, q \in \mathbb{Z}_+$,

* $[D_t, d_t] = [D_t, d_x] = [D_t, d_V] = 0$.

Доказательство. Поскольку, всякая производная Ли есть дифференцирование внешней алгебры дифференциальных форм, первое утверждение достаточно проверить на образующих $\widetilde{\mathcal{A}} = \Theta^{00}$, dx^μ, $1 \le \mu \le m$, δu_i^α, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$. Но,

* $\widetilde{\mathcal{A}} \ni g \mapsto D_t g = \partial_t g + \sum_{\beta,j} \mathrm{f}_j^\beta \cdot \partial_\beta^j g \in \widetilde{\mathcal{A}}$,

* $\Theta^{01} \ni dx^\mu \mapsto D_t(dx^\mu) = d(D_t x^\mu) = d0 = 0 \in \Theta^{01}$,

* $\Theta^{10} \ni \delta u_i^\alpha \mapsto D_t\big(\delta u_i^\alpha\big) = \big(\mathrm{f}_i^\alpha\big)_*(\delta u) \in \Theta^{10}$, в силу Предложения 2.2.11.

Второе утверждение следует из равенства $[D_t, d] = 0$, в силу тех же доводов, что и в Предложении 2.2.16. □

Предложение 2.2.19. *Имеет место равенство*

$$d_t\omega = dt \wedge D_t(\omega) \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Theta.$$

Доказательство. Поскольку левая и правая части доказываемого равенства суть косые дифференцирования внешней алгебры $\widetilde{\Omega}$ (проверить этот факт), достаточно установить предлагаемую формулу на образующих $\widetilde{\mathcal{A}} = \Theta^{00}$, dx^μ, $1 \le \mu \le m$, δu_i^α, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$. Итак,

* $\widetilde{\mathcal{A}} \ni g \mapsto d_t g = (D_t g) \cdot dt = dt \cdot D_t g$,

* $\Theta^{01} \ni dx^\mu \mapsto d_t(dx^\mu) = 0 = dt \wedge D_t(dx^\mu)$,

* $\Theta^{10} \ni \delta u_i^\alpha \mapsto d_t(\delta u_i^\alpha) = dt \wedge \big((\mathrm{f}_i^\alpha)_*(\delta u)\big) = dt \wedge D_t(\delta u_i^\alpha)$, в силу Предложений 2.2.13 и 2.2.18 (см. доказательство).

□

Пусть $\omega = \phi + dt \wedge \psi \in \widetilde{\Omega}^{pm} = \Theta^{pm} \oplus (dt \wedge \Theta^{p,m-1})$, тогда $d_H\omega = d_t\phi - dt \wedge d_x\psi = dt \wedge \big(D_t\phi - d_x\psi\big)$, в силу Предложения 2.2.19, поскольку здесь $d_x\phi \equiv 0$. Таким образом,

$$\ker d_H^{pm} = \big\{\phi + dt \wedge \psi \mid \phi \in \Theta^{pm},\ \psi \in \Theta^{p,m-1},\ D_t\phi - d_x\psi = 0\big\}$$

Теперь, пусть $\omega' = \phi' + dt\wedge\psi' \in \widetilde{\Omega}^{p,m-1} = \Theta^{p,m-1}\oplus(dt\wedge\Theta^{p,m-2})$, тогда $d_H\omega' = d_x\phi' + dt\wedge\bigl(D_t\phi' - d_x\psi'\bigr)$, так что

$$\operatorname{im} d_H^{p,m-1} = \bigl\{d_x\phi' + dt\wedge(D_t\phi' - d_x\psi') \mid \phi'\in\Theta^{p,m-1},\ \psi'\in\Theta^{p,m-2}\bigr\}.$$

Положим $ID_t = I\circ D_t$ и в дополнение к пространству Θ_I^{pm} (см. стр. 113) введем линейные пространства

$$\Theta_{\mathrm{f}}^{pm} = \bigl\{\phi\in\Theta^{pm} \mid ID_t(\phi) = 0\bigr\}, \quad p\in\mathbb{Z}_+,$$

$$\Theta_{I\mathrm{f}}^{pm} = \bigl\{\phi\in\Theta_I^{pm} \mid ID_t(\phi) = 0\bigr\}, \quad p\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что $\operatorname{im} d_x^{p,m-1}\subset\Theta_{\mathrm{f}}^{pm}$, поскольку $D_t\phi = d_x(D_t\phi')$ для любой формы $\phi = d_x\phi'\in\operatorname{im} d_x^{p,m-1}$, и $\Theta_{I\mathrm{f}}^{pm}\subset\Theta_{\mathrm{f}}^{pm}$, в силу Предложения 2.1.31.

Теорема 8. Имеют место канонические изоморфизмы

$$\mathrm{CL}^p(\mathrm{f})\simeq\Theta_{I\mathrm{f}}^{pm}, \quad [\phi + dt\wedge\psi]\mapsto I(\phi), \quad p\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. По построению для каждого $p\in\mathbb{Z}_+$ определено линейное отображение

$$\mathrm{CL}^p(\mathrm{f})\to\Theta_{\mathrm{f}}^{pm}\big/\operatorname{im} d_x^{p,m-1}, \quad [\phi + dt\wedge\psi]\mapsto[\phi].$$

Такое определение корректно, поскольку если $\phi + dt\wedge\psi\in\operatorname{im} d_H^{p,m-1}$, то в частности, $\phi = d_x\phi'$, $\phi'\in\Theta^{p,m-1}$. Более того, это отображение сюръективное, поскольку для каждой $\phi\in\Theta_{\mathrm{f}}^{pm}$ существует $\psi\in\Theta^{p,m-1}$ такая, что $D_t\phi = d_x\psi$, и легко проверяется, что форма $\phi + dt\wedge\psi\in\ker d_H^{pm}$ является прообразом для ϕ. Наконец, это отображение инъективное. Действительно, пусть $\phi + dt\wedge\psi\in\ker d_H^{pm}$ и $[\phi] = 0$, т.е. $\phi = d_x\phi'$, $\phi'\in\Theta^{p,m-1}$, причем $D_t\phi - d_x\psi = d_x(D_t\phi' - \psi) = 0$, и значит $D_t\phi' - \psi = d_x\psi'$, $\psi'\in\Theta^{p,m-2}$, в силу точности p-й строки пополненного пространственного бикомплекса системы $u_t = \mathrm{f}$. Таким образом, форма

$$\phi + dt\wedge\psi = d_x\phi' + dt\wedge(D_t\phi' - d_x\psi') = d_H(\phi' + dt\wedge\psi')\in\operatorname{im} d_H^{p,m-1}.$$

Итак, построены изоморфизмы

$$\mathrm{CL}^p(\mathrm{f})\simeq\Theta_{\mathrm{f}}^{pm}\big/\operatorname{im} d_x^{p,m-1}, \qquad [\phi + dt\wedge\psi]\mapsto[\phi], \quad p\in\mathbb{Z}_+.$$

Покажем теперь, что для каждого $p\in\mathbb{N}$ определен изоморфизм

$$\Theta_{\mathrm{f}}^{pm}\big/\operatorname{im} d_x^{p,m-1}\simeq\Theta_{I\mathrm{f}}^{pm}, \quad [\phi]\mapsto I(\phi).$$

Проверим сначала, что такое определение корректно. Действительно, с одной стороны, в силу Предложения 2.1.31, образ $I(\phi)$ не зависит от выбора представителя класса эквивалентности $[\phi]$, причем $I(\phi) \in \Theta_I^{pm}$, в силу Предложения 2.1.32, а с другой стороны,

$$(I \circ D_t)(I(\phi)) = (I \circ D_t)(\phi - d_x\chi) = (I \circ d_x)(\psi - D_t\chi) = 0,$$

так что образ $I(\phi) \in \Theta_{I\mathrm{f}}^{pm}$, поскольку, в силу Предложения 2.1.27, $\phi = I(\phi) + d_x\chi$, по определению, $D_t\phi = d_x\psi$, где $\chi, \psi \in \Theta^{p,m-1}$, $[D_t, d_x] = 0$, см. Предложение 2.2.18, и мы опять воспользовались Предложением 2.1.31. Далее, это отображение сюръективное, поскольку как было отмечено выше $\Theta_{I\mathrm{f}}^{pm} \subset \Theta_{\mathrm{f}}^{pm}$. Наконец, это отображение инъективное, поскольку согласно Предложению 2.1.27, $I(\phi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\phi \in \operatorname{im} d_x^{p,m-1}$. Композиция двух построенных изоморфизмов дает искомый изоморфизм. □

Теорема 9. ([13]) *Имеет место канонический изоморфизм*

$$\mathrm{char} : \mathrm{CL}^0(\mathrm{f}) \simeq \mathcal{X}(\mathrm{f}), \quad [\phi + dt \wedge \psi] \mapsto \delta_I(\phi),$$

где

$$\mathcal{X}(\mathrm{f}) = \Theta_{I\mathrm{f}}^{1m} \cap \ker \delta_I^1.$$

Доказательство. В первой части доказательства Теоремы 8, в частности, был установлен изоморфизм

$$\mathrm{CL}^0(\mathrm{f}) \simeq \Theta_{\mathrm{f}}^{0m} \big/ \operatorname{im} d_x^{0,m-1}, \qquad [\phi + dt \wedge \psi] \mapsto [\phi].$$

Таким образом, достаточно показать, что правило $[\phi] \mapsto \delta_I(\phi)$ задает изоморфизм $\Theta_{\mathrm{f}}^{0m} \big/ \operatorname{im} d_x^{0,m-1} \simeq \mathcal{X}(\mathrm{f})$. Прежде всего, для всякой формы $\phi \in \Theta_{\mathrm{f}}^{0m}$ образ $\chi = \delta_I(\phi) = I(d_V\phi) \in \mathcal{X}(\mathrm{f})$, поскольку (а) $I(\chi) = (I \circ I)(d_V\phi) = I(d_V\phi) = \chi$, в силу Предложения 2.1.32, (б) $\delta_I(\chi) = (\delta_I \circ \delta_I)(\phi) = 0$, в силу точности правой ветви диаграммы из Предложения 2.2.17, (в) имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} I(D_t\chi) &= (I \circ D_t)(I(d_V\phi)) = (I \circ D_t)(d_V\phi - d_x\varrho) \\ &= I\big(d_V(D_t\phi) - d_x(D_t\varrho)\big) = I\big(d_V(d_x\psi) - d_x(D_t\varrho)\big) \\ &= -(I \circ d_x)(d_V\psi + D_t\varrho) = 0, \end{aligned}$$

где мы учли, что $d_V\phi = I(d_V\phi) + d_x\varrho$, $\varrho \in \Theta^{1,m-1}$ (см. Предложение 2.1.27), $D_t\phi = d_x\psi$, $\psi \in \Theta^{0,m-1}$, согласно определению пространства Θ^{0m}_{f}, и $I\circ d_x=0$, в силу Предложения 2.1.31. Далее, в силу Предложения 2.2.17, $\ker\delta^0_I=0$, и в частности фактор-отображение $[\phi]\mapsto\delta_I(\phi)$ инъективное. Покажем, что оно сюръективное. Пусть $\chi\in\mathcal{X}(\mathrm{f})$. В частности, $\chi\in\ker\delta^1_I$, так что $\chi=\delta_I(\phi)$, $\phi\in\Theta^{0m}$ ($\operatorname{im}\delta^0_I=\ker\delta^1_I$ в силу Предложения 2.2.17). Более того, здесь

$$
\begin{aligned}
\delta_I(D_t\phi)&=(I\circ d_V\circ D_t)\phi=(I\circ D_t\circ d_V)\phi\\
&=(I\circ D_t)\big(I(d_V\phi)-d_x\varrho\big)=(I\circ D_t)(\chi)-(I\circ D_t\circ d_x)\varrho\\
&=0-(I\circ d_x)(D_t\varrho)=0,
\end{aligned}
$$

по тем же соображениям, что и выше. Итак, $\delta_I(D_t\phi)=0$, а значит $D_t\phi\in\operatorname{im}d_x^{0,m-1}$, снова в силу Предложения 2.2.17, т.е. $\phi\in\Theta^{0m}_{\mathrm{f}}$. $\square$

Учитывая важность Теоремы 9 в приложениях, опишем ее элементы максимально подробно.

Итак, $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль

$$\widetilde{\Omega}^{0m}=\big\{\omega=\phi+dt\wedge\psi\mid\phi\in\Theta^{0m},\ \psi\in\Theta^{0,m-1}\big\},$$

где $\phi=\varrho\cdot d^mx$, $\psi=\sum_\mu J^\mu\cdot d_\mu x$, компонента $\varrho\in\widetilde{\mathcal{A}}$ называется *плотностью тока*, компонента $J=(J^1,\dots,J^m)\in\widetilde{\mathcal{A}}^m$ называется *вектором тока*, пара (ϱ,J) (как и форма ω) называется *током*, (напомним, что $dx^\nu\wedge d_\mu x=\delta^\nu_\mu\cdot d^mx$, см. стр. 92). Далее, $d_H\omega=dt\wedge(D_t\varrho-\mathrm{Div}J)\cdot d^mx=0$ тогда и только тогда, когда выполняется *уравнение неразрывности*

$$D_t\varrho-\mathrm{Div}J=0.$$

В этом случае пара (ϱ,J) (как и форма ω) называется *сохраняющимся током системы* $u_t=\mathrm{f}$. Ядро

$$
\begin{aligned}
\ker d^{0m}_H&=\big\{\phi+dt\wedge\psi\mid\phi\in\Theta^{0m},\ \psi\in\Theta^{0,m-1},\ D_t\phi-d_x\psi=0\big\}\\
&\simeq\big\{(\varrho,J)\in\widetilde{\mathcal{A}}^{1+m}\mid D_t\varrho-\mathrm{Div}J=0\big\}
\end{aligned}
$$

– линейное пространство сохраняющихся токов системы $u_t=\mathrm{f}$.

В свою очередь, $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль

$$\widetilde{\Omega}^{0,m-1}=\big\{\omega'=\phi'+dt\wedge\psi'\mid\phi'\in\Theta^{0,m-1},\ \psi'\in\Theta^{0,m-2}\big\},$$

образ

$$\operatorname{im} d_H^{0,m-1} = \bigl\{ d_x\phi' + dt\wedge(D_t\phi' - d_x\psi') \mid \phi'\in\Theta^{0,m-1},\ \psi'\in\Theta^{0,m-2}\bigr\}$$

– линейное пространство *тривиальных сохраняющихся токов системы* $u_t = \mathrm{f}$. Для каждого сохраняющегося тока $\omega \in \ker d_H^{0,m}$ класс эквивалентности $[\omega]\in \mathrm{CL}^0(\mathrm{f}) = \ker d_H^{0m}\big/\operatorname{im} d_H^{0,m-1}$ называется *законом сохранения системы* $u_t = \mathrm{f}$.

Перейдем к описанию линейного пространства $\mathcal{X}(\mathrm{f})$. Прежде всего отметим, что согласно Следствию 2.1.4,

$$\Theta_I^{1m} = \left\{ \phi = \sum_\alpha \chi_\alpha\cdot\delta u^\alpha\wedge d^m x \;\middle|\; \chi=(\chi_\alpha)\in\widetilde{\mathcal{E}}^* \right\}.$$

Далее, справедливо

Предложение 2.2.20. *Имеет место представление*

$$\Theta_{I\mathrm{f}}^{1m} = \left\{ \phi = \sum_\alpha \chi_\alpha\cdot\delta u^\alpha\wedge d^m x \;\middle|\; \chi=(\chi_\alpha)\in\widetilde{\mathcal{E}}^*,\ D_t\chi + \mathrm{f}^*\chi = 0 \right\},$$

где $(D_t\chi)_\alpha = D_t\chi_\alpha$, $(\mathrm{f}^*\chi)_\alpha = \sum_{\beta,i}(-D)_i\bigl(\chi_\beta\cdot\partial_\alpha^i\mathrm{f}^\beta\bigr)$.

Доказательство. С помощью техники, развитой выше (см. также подсекции 2.1.12 и 2.1.13), для $\phi = \sum_\alpha \chi_\alpha\cdot\delta u^\alpha\wedge d^m x\in\Theta_I^{1m}$ выводим

$$\begin{aligned} D_t\phi &= \sum_\alpha \Bigl(D_t\chi_\alpha\cdot\delta u^\alpha + \chi_\alpha\cdot D_t\delta u^\alpha \Bigr)\wedge d^m x \\ &= \sum_\alpha \Bigl(D_t\chi_\alpha\cdot\delta u^\alpha + \chi_\alpha\cdot\sum_{\beta,j}(\partial_\beta^j\mathrm{f}^\alpha)\cdot\delta u_j^\beta \Bigr)\wedge d^m x. \end{aligned}$$

Далее,

$$\iota_\alpha^i\bigl(D_t\phi\bigr) = \Bigl(\delta_0^i\cdot D_t\chi_\alpha + \sum_\beta \chi_\beta(\partial_\alpha^i\mathrm{f}^\beta)\Bigr)\wedge d^m x.$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} K_\alpha(D_t\phi) &= \sum_i(-D)_i\bigl(\iota_\alpha^i D_t\phi\bigr) \\ &= \Bigl(D_t\chi_\alpha + \sum_{\beta,i}(-D)_i\bigl(\chi_\beta(\partial_\alpha^i\mathrm{f}^\beta)\bigr)\Bigr)\wedge d^m x \\ &= \bigl(D_t\chi + \mathrm{f}^*\chi\bigr)_\alpha\wedge d^m x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$ID_t\phi = \sum_\alpha \delta u^\alpha \wedge K_\alpha(D_t\phi) = \sum_\alpha \bigl(D_t\chi + \mathrm{f}^*\chi\bigr)_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x,$$

откуда и следует искомое представление для $\Theta^{1m}_{I\mathrm{f}}$. □

Следствие 2.2.2. *Имеет место представление*

$$\mathcal{X}(\mathrm{f}) = \left\{ \phi = \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x \;\middle|\; D_t\chi + \mathrm{f}^*\chi = 0,\ \chi_* = \chi^* \right\}$$
$$\simeq \left\{ \chi = (\chi_\alpha) \in \widetilde{\mathcal{E}}^* \;\middle|\; D_t\chi + \mathrm{f}^*\chi = 0,\ \chi_* = \chi^* \right\}$$

Доказательство. Следует воспользоваться определением линейного пространства $\mathcal{X}(\mathrm{f})$, предыдущим Предложением и учесть Следствие 2.1.5. □

Для закона сохранения $[\omega] \in \mathrm{CL}^0(\mathrm{f})$ образ $\mathrm{char}[\omega] \in \mathcal{X}(\mathrm{f})$ называется его *характеристикой*.

Предложение 2.2.21. *Для тока $\omega = \phi + dt \wedge \psi \in \ker d^{0m}_H$, где форма $\phi = \varrho \cdot d^m x \in \Theta^{0m}$, характеристика соответствующего закона сохранения имеет вид*

$$\mathrm{char}[\omega] = \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x, \quad \chi_\alpha = \delta_{u^\alpha}\varrho = \sum_i (-D)_i(\partial^i_\alpha \varrho).$$

Доказательство. Следует воспользоваться определением характеристики $\mathrm{char}[\omega] = I(d_V\phi)$ и Предложением 2.1.37. □

2.2.11 Функциональные формы, подробнее

По определению, пространства функциональных форм системы $u_t = \mathrm{f}$ суть

$$\widetilde{\mathfrak{F}}^p = \widetilde{\Omega}^{p,1+m} \big/ \operatorname{im} d^{pm}_H, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

При $p \in \mathbb{N}$ они имеют более детальное описание.

Предложение 2.2.22. *Для каждого $p \in \mathbb{N}$ имеет место изоморфизм*

$$\widetilde{\mathfrak{F}}^p \simeq \Theta^{pm}_I \big/ \operatorname{im} ID^p_t, \quad [dt \wedge \psi] \mapsto I(\psi),$$

где $ID^p_t : \Theta^{pm}_I \to \Theta^{pm}_I$, $\phi \mapsto ID_t(\phi)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что здесь

$$\widetilde{\Omega}^{p,m+1} = \big\{\omega = dt\wedge\psi \bigm| \psi\in\Theta^{pm}\big\},$$

$$\operatorname{im} d_H^{pm} = \big\{\omega = dt\wedge(D_t\phi' - d_x\psi') \bigm| \phi'\in\Theta^{pm},\ \psi'\in\Theta^{p,m-1}\big\},$$

так что можно положить

$$\widetilde{\mathfrak{F}}^p = \Theta^{pm}\big/\big\{\operatorname{im} D_t^p + \operatorname{im} d_x^{p,m-1}\big\},$$

где $D_t^p:\Theta^{pm}\to\theta^{pm}$, $\phi\to D_t\phi$. Дальнейшие выкладки опираются на технику, развитую в подсекциях 2.1.12 и 2.2.10, в частности активно используются Предложения 2.1.27, 2.1.31, 2.1.32. Справедливо представление $\Theta^{pm} = \Theta_I^{pm}\oplus\operatorname{im} d_x^{p,m-1}$, откуда стандартными методами работы с фактор-пространствами выводим

$$\widetilde{\mathfrak{F}}^p \simeq \Theta_I^{pm}\Big/\Theta_I^{pm}\cap\big\{\operatorname{im} D_t^p + \operatorname{im} d_x^{p,m-1}\big\},$$

откуда и вытекает требуемое представление, поскольку, как легко проверить, $\Theta^{pm}\cap\operatorname{im} d_x^{p,m-1} = 0$ и $\Theta_I^{pm}\cap\operatorname{im} D_t^p = \operatorname{im} ID_t^p$. □

Замечание. Доказанное выше утверждение красиво записывается как точность следующей последовательности линейных пространств

$$0\longrightarrow\Theta_{I\mathrm{f}}^{pm}\longrightarrow\Theta_I^{pm}\xrightarrow{ID_t^p}\Theta_I^{pm}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{F}}^p\longrightarrow 0,\quad p\in\mathbb{N}.$$

2.2.12 Спектральная последовательность

Повторяя с соответствующими модификациями построения подсекции 2.1.11, и учитывая полученное описание пополненного бикомплекса системы $u_t = \mathrm{f}$, можно показать, что справедлива следующая

Теорема 10. *Спектральная последовательность* $\{E_r^{pq}(\mathrm{f}), d_r^{pq}\}$ *си-*

стемы $u_t = \mathrm{f}$ *имеет вид*

$$E_r^{pq}(\mathrm{f}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & r \in \mathbb{N},\ p = q = 0, \\ \widetilde{\Omega}^{pq}, & r = 0,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le q \le 1+m, \\ \mathrm{CL}^p(\mathrm{f}), & r = 1,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ q = m, \\ \widetilde{\mathfrak{F}}^p, & r = 1,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ q = 1+m, \\ 0, & \text{в других случаях}, \end{cases}$$

$$d_r^{pq} = \begin{cases} d_H^{pq}, & r = 0,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le q \le m, \\ \delta^{pq}, & r = 1,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ q = m, 1+m, \\ 0, & \text{в других случаях}, \end{cases}$$

где $\delta^{pq}[\omega] = [d_V\omega]$ *для всех* $[\omega] \in E_1^{pq}(\mathrm{f})$.

2.2.13 Примеры

Рассмотрим эволюционное уравнение $u_t = \mathrm{f}(t, x, u, \dots, u_p)$. Здесь $t, x, u, \dots, u_p \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{3+p})$, так что $m = 1$, множество $\mathrm{A} = \{1\}$ состоит из одного элемента (индекс α опускаем), как всегда $u = u_0$.

Прежде всего, заметим, что критерий из Предложения 2.1.6 в случае $m = 1$, $\mathrm{A} = \{1\}$, имеет вид.

Предложение 2.2.23. *Для гладкой функции* $\chi(u, \dots, u_n)$, $\chi_{u_n} \neq 0$, *операторное равенство* $\chi_* = \chi^*$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\chi_{u_i} = (-1)^i \sum_{k=0}^{n-k} \binom{i+k}{k} (-D)_k \chi_{u_{i+k}}, \quad i = 0, \dots, n.$$

В частности, оно возможно лишь при $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Справедливо также

Предложение 2.2.24. ([16]) *Пусть* $\mathrm{f} = \mathrm{f}(t, x, u, \dots, u_p)$, $\mathrm{f}_{u_p} \neq 0$, *где* $p = 2q$, $q \in \mathbb{N}$. *Тогда определяющее уравнение* $(D_t + \mathrm{f}^*)\chi = 0$ *не имеет решений и вида* $\chi = \chi(t, x, u, \dots, u_n)$, *где* $\chi_{u_n} \neq 0$, $n > p$. *Если, кроме того, функция* f – *многочлен по старшей переменной* u_p, *то это уравнение не имеет решений также и вида* $\chi = \chi(t, x, u, \dots, u_p)$, *где* $\chi_{u_p} \neq 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $n > p$, тогда, как показывают простые вычисления (полезно проделать их в качестве упражнения),

$$\bigl(D_t + \mathrm{f}^*\bigr)\chi = 2u_{u_{p+n}}\mathrm{f}_{u_p}\chi_{u_n} + O(u_{p+n-1}).$$

В частности, для того чтобы функция χ была решением уравнения $(D_t+\mathrm{f}^*)\chi = 0$ необходимо, чтобы было справедливо равенство $\mathrm{f}_{u_p}\chi_{u_n} = 0$, что противоречит наложенным на f и χ условиям. В случае $n = p$ более детальные выкладки (которые также полезно проделать в качестве упражнения) дают

$$\begin{aligned}\bigl(D_t + \mathrm{f}^*\bigr)\chi = {}& u_{2p}\bigl(\mathrm{f}_{u_p}\chi_{u_p} + (\mathrm{f}_{u_p}\chi)_{u_p}\bigr)\\ &+ pu_{2p-1}u_{p+1}\bigl(\mathrm{f}_{u_pu_p}\chi_{u_p} + (\mathrm{f}_{u_p}\chi)_{u_pu_p}\bigr) + \dots,\end{aligned}$$

где многоточие означает члены других типов, которые в данный момент несущественны. В частности, для того чтобы в этом случае функция χ была решением определяющего уравнения необходимо, чтобы были справедливы равенства

$$\begin{cases}\mathrm{f}_{u_p}\chi_{u_p} + (\mathrm{f}_{u_p}\chi)_{u_p} = 0,\\ \mathrm{f}_{u_pu_p}\chi_{u_p} + (\mathrm{f}_{u_p}\chi)_{u_pu_p} = 0.\end{cases}$$

Можно проверить (полезно проделать это в качестве упражнения), что полученная система уравнений не имеет решений вида $\chi(t,x,u,\dots,u_p)$, $\chi_{u_p} \neq 0$, если известная функция f – многочлен по старшей переменной u_p, □

Пример 2.2.1. $u_t = \phi(u)u_x$. Здесь, $\mathrm{f}(u,u_1) = \phi(u)u_1$, $\phi(u) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\phi_u \neq 0$.

Начнем с описания симметрий этого эволюционного уравнения. Введем линейные пространства

$$\mathrm{Sym}_n(\mathrm{f}) = \bigl\{g = g(u,\dots,u_n) \in \widetilde{\mathcal{E}} \bigm| F_*(g) = 0\bigr\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

симметрий порядка n, не зависящих явно от $t, x \in \mathbb{R}$ (заметим, что здесь $\widetilde{\mathcal{E}} = \widetilde{\mathcal{A}}$). Пусть $g \in \mathrm{Sym}_n(\mathrm{f})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, тогда

$$\begin{aligned}F_*(g) &= \bigl(D_t - \mathrm{f}_*\bigr)g = \mathrm{E}_\mathrm{f}(g) - \mathrm{E}_g(\mathrm{f}) = \sum_i (D_i\mathrm{f})g_{u_i} - \sum_j \mathrm{f}_{u_j}(D_jg)\\ &= \sum_i (D_i\mathrm{f})g_{u_i} - \bigl(\mathrm{f}_ug + \mathrm{f}_{u_1}Dg\bigr) = \sum_{i=1}^n A_ig_{u_i} - u_1\phi_ug = 0,\end{aligned}$$

где

$$A_i = D_i(u_1\phi) - \phi u_{i+1} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} u_{k+1} \cdot D_{i-k}\phi = A_i(u, \dots, u_i).$$

В частности

- $\star$ $A_0 = u_1\phi - \phi u_1 = 0,$
- $\star$ $A_1 = \binom{1}{0} u_1 D\phi = u_1^2 \phi_u,$
- $\star$ $A_2 = \binom{2}{0} u_1 D_2\phi + \binom{2}{1} u_2 D\phi = 3u_2 u_1 \phi_u + u_1^3 \phi_{uu},$
- $\star$ $A_3 = \binom{3}{0} u_1 D_3\phi + \binom{3}{1} u_2 D_2\phi + \binom{3}{2} u_3 D\phi$
  $= (4u_3u_1 + 3u_2^2)\phi_u + 6u_2u_1^2\phi_{uu} + u_1^4\phi_{uuu},$

и так далее.

Пусть сначала $n = 0$, т.е. $g = g(u)$, тогда

$$F_*(g) = -u_1\phi_u g = 0,$$

так что условие $\phi_u \neq 0$ влечет $g = 0$.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$. Будем искать решение *определяющего уравнения*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i g_{u_i} - u_1\phi_u g = 0$$

в виде $g = u_1 h$, тогда для новой неизвестной $h = h(u, \dots, u_n)$ получим линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(u, \dots, u_i) h_{u_i} = 0.$$

Согласно стандартной теории дифференциальных уравнений (см., например, [22]), это уравнение имеет общее решение вида

$$h = H(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

где $H(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – произвольная гладкая функция, а функции $\sigma_1(u, u_1), \sigma_2(u, u_1, u_2), \dots, \sigma_n(u, \dots, u_n)$ – независимые первые интегралы характеристической системы

$$\frac{du}{0} = \frac{du_1}{A_1} = \dots = \frac{du_n}{A_n}.$$

Общее решение определяющего уравнения имеет, соответственно, вид

$$g(u,\dots,u_n)=u_1H(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

Для низших значений n первые интегралы легко вычисляются. Сначала, интеграл σ_1 находится как решение уравнения $du=0$ и дает $\sigma_1=u$. Затем интеграл σ_2 находится из уравнения

$$\frac{du_1}{A_1}=\frac{du_2}{A_2},\quad \text{т.е.}\quad \frac{du_2}{du_1}=\frac{A_2}{A_1}=3u_2u_1^{-1}+\lambda u_1,$$

где $\lambda=\lambda(u)=\phi_{uu}/\phi_u$. Последнее линейное неоднородное уравнение первого порядка стандартным образом интегрируется и дает $\sigma_2=u_2u_1^{-3}+\lambda(u)u_1^{-1}$.

В качестве упражнения полезно вычислить дальнейшие интегралы.

Обратимся теперь к рассмотрению законов сохранения (точнее, их характеристик) уравнения $u_t=\phi(u)u_x$.

Для каждого $n\in\mathbb{Z}_+$ определим линейное пространство

$$\mathcal{X}_n(\mathrm{f})=\bigl\{\chi=\chi(u,\dots,u_n)\in\widetilde{\mathcal{E}}\bigm|(D_t+\mathrm{f}^*)\chi=0,\ \chi_*=\chi^*\bigr\}.$$

Пусть $\chi\in\mathcal{X}_n(\mathrm{f})$, $n=2k\in\mathbb{Z}_+$, тогда, как и в случае симметрий

$$\begin{aligned}(D_t+\mathrm{f}^*)\chi&=\sum_i(D_i\mathrm{f})\chi_{u_i}+\sum_j(-D)_j(\mathrm{f}_{u_j}\chi)\\&=\sum_i(D_i\mathrm{f})\chi_{u_i}+\bigl(\mathrm{f}_u\chi-D(\mathrm{f}_{u_1}\chi)\bigr)\\&=\sum_i(D_i\mathrm{f})\chi_{u_i}+\mathrm{f}_u\chi-(D\phi)\chi-\phi D\chi\\&=\sum_{i=1}^nA_i(u,\dots,u_i)\chi_{u_i}=0,\end{aligned}$$

где коэффициенты $A_i(u,\dots,u_i)$ те же самые, что и в случае симметрий. и опять результирующее линейное уравнение в частных производных первого порядка относительно $\chi(u,\dots,u_n)$ имеет общее решение вида

$$\chi=H(\sigma_1,\dots,\sigma_n),$$

где $H(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ – произвольная гладкая функция, а функции $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ – независимые первые интегралы характеристической системы. После нахождения общего этого общего решения, следует выделить решения удовлетворяющие условию $\chi_* = \chi^*$.

Пусть $n = 0$, т.е. $\chi = \chi(u)$, тогда

$$(D_t + \mathrm{f}^*)\chi \equiv 0, \quad \chi_* \equiv \chi^*,$$

так что каждая гладкая функция $\chi(u)$ является характеристикой своего закона сохранения уравнения $u_t = \phi(u)u_x$. В свою очередь, каждая функция $\varrho(u) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ является плотностью закона сохранения с характеристикой $\chi = \delta_u(\varrho) = \varrho_u$, причем

$$D_t\varrho = DJ, \quad \text{где вектор тока} \quad J(u) = \int \phi\varrho_u du.$$

Пусть $n = 2$, т.е. $\chi = \chi(u, u_1, u_2)$, тогда, как легко вывести из Предложения 2.2.23, равенство $\chi_* = \chi^*$ имеет место тогда и только тогда, когда $D\chi_{u_2} - \chi_{u_1} = 0$, в частности $\chi_{u_2u_2} = 0$. Для $\chi = H(u, v)$, где переменная $v = \sigma_2 = u_2u_1^{-3} + \lambda u_1^{-1}$, последнее условие сводится к равенству $DH_v + H_v \cdot \lambda u_1 = 0$, где $H_{vv} = 0$, т.е. $H = K(u)v + r(u)$. В свою очередь, функция $K(u)$ есть решение уравнения $K_u + \lambda K = 0$, и равна c/ϕ_u. Подводя итоги, приходим к выводу, что функция $\chi(u, u_1, u_2)$ есть характеристика закона сохранения изучаемого уравнения $u_t = \phi(u)u_x$ тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$\chi = \frac{v}{\phi_u} + r(u) = c \cdot \frac{u_2\phi_u + u_1^2\phi_{uu}}{u_1^3\phi_u^2} + r(u) = c \cdot \frac{D_2\phi}{u_1^3\phi_u^2} + r(u),$$

где c – произвольная постоянная, причем без ограничения общности можно положить $c = 1$, а $r(u)$ – произвольная гладкая функция, которой здесь можно пренебречь, поскольку она уже была изучена выше, при $n = 0$ (напомним, что как законы сохранения, так и характеристики образуют линейные пространства). Простые вычисления показывают, что в этом случае плотность соответствующего тока есть

$$\varrho = -\frac{1}{2u_1\phi_u}.$$

В качестве упражнения можно проверить, что вариационная производная $\delta_u(D_t\varrho) = 0$, и убедится, что вектор тока

$$J = -\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{u_1\phi_u} - 2x\right)$$

(обратим внимание, что вектор тока явно зависит от x).

Пример 2.2.2. $u_t = \phi(u)u_{xx}$. Здесь $\mathrm{f}(u, u_2) = \phi(u)u_2$, $\phi_u \neq 0$.

Начнем с описания симметрий этого эволюционного уравнения. Для $g \in \mathrm{Sym}_n(\mathrm{f})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\begin{aligned}\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g &= \sum_i (D_i\mathrm{f}) \cdot g_{u_i} - \sum_j (D_j g) \cdot \mathrm{f}_{u_j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (D_i\mathrm{f}) \cdot g_{u_i} - \big(u_2\phi_u \cdot g + \phi \cdot (D_2 g)\big) = 0.\end{aligned}$$

Пусть, сначала, $n = 0$, т.е. $g = g(u)$, тогда

$$\begin{aligned}\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g &= u_2\phi g_u - \big(u_2\phi_u g + \phi(u_2 g_u + u_1^2 g_{uu})\big) \\ &= -u_2\phi_u g - u_1^2\phi g_{uu} = 0.\end{aligned}$$

В частности, $\phi_u \cdot g = 0$, и значит $g = 0$, поскольку по условию $\phi_u \neq 0$.

Пусть $n = 1$, т.е. $g = g(u, u_1)$, тогда

$$\begin{aligned}\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g &= u_2\phi g_u + \big(u_3\phi + u_2u_1\phi_u\big)g_{u_1} \\ &- \big(u_2\phi_u g + \phi(u_3 g_{u_1} + u_2(u_2 g_{u_1u_1} + u_1 g_{u_1u}) \\ &+ u_2 g_u + u_1(u_2 g_{uu_1} + u_1 g_{uu}))\big) \\ &= -u_2^2 g_{u_1u_1} + u_2\big(\phi_u u_1 g_{u_1} - \phi_u g - 2u_1\phi g_{uu_1}\big) \\ &- u_1^2\phi g_{uu} = 0.\end{aligned}$$

Последнее равенство эквивалентно однородной системе уравнений

$$\begin{cases} g_{u_1u_1} = 0, \\ \phi_u u_1 g_{u_1} - \phi_u g - 2u_1\phi g_{uu_1} = 0, \\ \phi g_{uu} = 0, \end{cases}$$

которая, как легко проверить, имеет единственное (с точностью до несущественного постоянного множителя) решение $g = u_1$. Соответствующая симметрия $\mathrm{E}_{u_1} = \sum_i u_{i+1}\partial_{u_i} = D - \partial_x \simeq \partial_x$ отвечает сдвигам вдоль пространственной переменной $x \in \mathbb{R}$ (обратим внимание, что в уравнение $u_t = \phi(u)u_2$ переменная x явно не входит).

Пусть $n = 2$, т.е. $g = g(u, u_1, u_2)$, тогда

$$\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g = (D_2\mathrm{f})g_{u_2} + (D\mathrm{f})g_{u_1} - \mathrm{f}_{u_2}(D_2 g) + O(u_2),$$

где всюду $O(u_k)$ означает члены порядка $\le k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Здесь

$$\begin{aligned} D_2\mathrm{f} &= u_4\phi + 2u_3u_1\phi_u + O(u_2), \\ D_2 g &= u_4 g_{u_2} + u_3^2 g_{u_2u_2} + u_3(g_{u_1} + 2D' g_{u_2}) + O(u_2), \end{aligned}$$

где всюду $Dg = u_{n+1}g_{u_n} + D'g$ для любой функции g порядка n. Подставляя эти выражения в приведенную выше формулу для $\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g$, получим

$$\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g = u_3^2\phi g_{u_2u_2} + 2u_3\big(u_1\phi_u g_{u_2} - \phi(D' g_{u_2})\big) + O(u_2) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $g(u, u_1, u_2)$ может определять симметрию данного уравнения лишь тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} g_{u_2u_2} = 0, \\ u_1\phi_u g_{u_2} - \phi D' g_{u_2} = 0. \end{cases}$$

В качестве упражнения предлагается проверить, что общее решение этой системы (с точностью до несущественного постоянного множителя) есть $g(u, u_1, u_2) = \mathrm{f} + h$, где функция $h(u, u_1)$ удовлетворяет уравнению $\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)h = 0$, и значит как было показано выше $h = u_1$ (опять с точностью до несущественного постоянного множителя). Заметим, что функция $g = \mathrm{f}$ есть очевидное решение уравнения $\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g = \mathrm{E}_f(g) - \mathrm{E}_g(\mathrm{f}) = 0$, соответствующая симметрия $\mathrm{E}_\mathrm{f} = D_t - \partial_t \simeq \partial_t$ отвечает сдвигам вдоль временной переменной t (обратим внимание, что в уравнение $u_t = \phi(u)u_2$ переменная t явно не входит).

Пусть теперь $n > 2$, $g = g(u, \dots, u_n)$, тогда

$$\big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g = \sum_{i=0}^{n} (D_i\mathrm{f})g_{u_i} - \big(gu_2\phi_u + (D_2 g)\phi\big),$$

где

$$\begin{aligned} D_i\mathrm{f} &= u_{i+2}\phi + iu_{i+1}(D\phi) + \frac{i(i-1)}{2}u_i(D_2\phi) + O(u_{i-1}), \\ D_2 g &= u_{n+2}g_{u_n} + u_{n+1}^2 g_{u_nu_n} + u_{n+1}(g_{u_{n-1}} + 2D' g_{u_n}) + D_2' g. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \big(D_t - \mathrm{f}_*\big)g &= \big[(u_{n+2}\phi + nu_{n+1}(D\phi))g_{u_n} + u_{n+1}\phi g_{u_{n-1}}\big] \\ &- \phi\big[u_{n+2}g_{u_n} + u_{n+1}^2 g_{u_nu_n} + u_{n+1}(g_{u_{n-1}} + 2D' g_{u_n})\big] + O(u_n) \\ &= -u_{n+1}^2\phi g_{u_nu_n} + u_{n+1}(n(D\phi)g_{u_n} - 2\phi(D' g_{u_n})) + O(u_n), \end{aligned}$$

так что функция $g(u,\dots,u_n)$ может определять симметрию, лишь когда она удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} g_{u_n u_n} = 0, \\ n(D\phi)g_{u_n} - 2\phi(D' g_{u_n}). \end{cases}$$

Общее решение последней системы есть $g = u_n K + h$, где функция $K(u)$ удовлетворяет уравнению $n\phi_u K - 2\phi K_u = 0$, а функция $h = h(u,\dots,u_{n-1})$. Подставляя это представление в исходное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} &\bigl(D_t - \mathrm{f}_*\bigr)(u_n K + h) = -u_n^2 \phi \cdot h_{u_{n-1}u_{n-1}} \\ &+ u_n \biggl(\frac{n(n-1)}{2} (D_2\phi) \cdot K - \phi \cdot (D_2 K) + u_2(\phi \cdot K_u - \phi_u \cdot K) \\ &+ (n-1)(D\phi) \cdot h_{u_{n-1}} - 2\phi \cdot (D' h_{u_{n-1}}) \biggr) + O(u_{n-1}) \\ &= u_n u_2 \frac{(n-2)(n+1)}{2} \phi_u \cdot K + \dots = 0, \end{aligned}$$

где многоточие означает члены других типов, которые в данный момент несущественны, поскольку выделенный член обращается в нуль лишь при условии $K = 0$. Итак, $g = h(u,\dots,u_{n-1})$, где $(D_t - \mathrm{f}_*)h = 0$, и по индукции выводим, что при $n > 2$ имеются лишь тривиальные нулевые решения.

Обратимся теперь к рассмотрению законов сохранения (точнее, их характеристик) уравнения $u_t = \phi(u)u_{xx}$.

Согласно Предложениям 2.2.23, 2.2.24, уравнение $u_t = \phi(u)u_{xx}$, $\phi_u \neq 0$, может иметь характеристики законов сохранения лишь вида $\chi = \chi(t,x,u)$. В этом случае

$$\begin{aligned} \bigl(D_t + \mathrm{f}^*\bigr)\chi &= \chi_t + \mathrm{f}\chi_u + \mathrm{f}_u\chi + D_2(\mathrm{f}_{u_2}\chi) \\ &= \chi_t + u_2(\phi\chi)_u + (D_2\phi) + 2(D\phi)(D\chi) + \phi(D_2\chi) \\ &= 2u_2(\phi\chi)_u + u_1^2(\phi\chi)_{uu} + u_1(\phi\chi)_{ux} + (\chi_t + \phi\chi_{xx}) = 0, \end{aligned}$$

так что функция $\chi(t,x,u)$ есть решение определяющего уравнения $\bigl(D_t + \mathrm{f}^*\bigr)\chi = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (\phi\chi)_u = 0, \\ \chi_t + \phi\chi_{xx} = 0. \end{cases}$$

Общее решение последней системы есть

$$\chi(t,x,u) = \frac{ax+b}{\phi(u)}, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Эта формула описывает и характеристики всех законов сохранения уравнения $u_t = \phi(u)u_{xx}$, поскольку условие $\chi_* = \chi^*$ выполняется для любой функции $\chi(t,x,u)$. Плотности сохраняющихся токов в этом случае имеют вид

$$\varrho(t,x,u) = \int \chi(t,x,u)du = (ax+b)\Phi(u), \quad \text{где} \quad \Phi_u = \frac{1}{\phi}.$$

Соответствующие векторы токов предлагается найти самостоятельно, в качестве упражнения.

Пример 2.2.3. $u_t = u_{xx}^2$. Здесь $\mathrm{f}(u_2) = u_2^2$ $(u_2^2 = (u_2)^2)$. Проверим, что это эволюционное уравнение не имеет ненулевых законов сохранения. Действительно, в силу Предложений 2.2.23, 2.2.24, оно может иметь характеристики только вида $\chi(t,x,u)$, но в этом случае определяющее уравнение имеет вид

$$\big(D_t + \mathrm{f}^*\big)\chi = \chi_t + u_2^2\chi_u + D_2(2u_2\chi) = 2u_4\chi + O(u_3),$$

откуда, очевидно, следует, что $\chi = 0$.

2.3 Картановы распределения

2.3.1 Модельное пространство

В алгебро-геометрическом подходе к дифференциальным уравнениям возникают гладкие многообразия, локально гомеоморфные бесконечномерному вещественному линейному пространству, топология которого задается как проективный предел счетного семейства конечномерных евклидовых пространств. Более того, в локальных системах координат используются различные индексации счетного множества. Именно, фиксируется счетное множество $\mathbb{K}$ с выделенным возрастающим исчерпывающим семейством конечных подмножеств

$$\mathbb{K}_p \subset \mathbb{K}_{p+1} \subset \mathbb{K}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad \cup_{p\in\mathbb{Z}_+} = \mathbb{K}.$$

Все такие индексации эквивалентны канонической индексации множества натуральных чисел $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N}_0 = \varnothing, \quad \mathbb{N}_p = \{1, \ldots, p\}, \quad p > 0,$$

выбор одной из них – вопрос удобства.

Для данной индексации $\mathbb{K}$ будем использовать следующие обозначения

- $\star$ $\mathbb{K}_q^p = \mathbb{K}_q \setminus \mathbb{K}_p$ при $p \leq q$,
- $\star$ пишем $|k| = p$ для всех $k \in \mathbb{K}_{p-1}^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, ($\mathbb{K}_{-1} = \varnothing$),
- $\star$ $\mathbb{K}^p = \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_p$ при $p \in \mathbb{Z}_+$,

Каждой индексации $\mathbb{K}$ ставится в соответствие *модельное пространство*

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}} = \{z = (z^k) \mid k \in \mathbb{K},\ z^k \in \mathbb{R}\},$$

наделенное естественной топологией проективного предела евклидовых пространств

$$\mathbb{V}_p = \mathbb{R}^{\mathbb{K}_p} = \{z = (z^k) \mid k \in \mathbb{K}_p\}, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

другими словами, $\mathbb{V} = \varprojlim_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{V}_p$ относительно естественных проекций $\pi_p^q : \mathbb{V}_q \to \mathbb{V}_p$, $p \leq q$,

$$z = (z^k \mid k \in \mathbb{K}_q) \mapsto \pi_p^q(z) = (z^k \in z \mid k \in \mathbb{K}_p),$$

Определены также проекции $\pi_p : \mathbb{V} \to \mathbb{V}_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$,

$$z = (z^k \mid k \in \mathbb{K}) \mapsto \pi_p(z) = (z^k \in z \mid k \in \mathbb{K}_p).$$

Дуальное (сопряженное) пространство

$$\mathbb{V}^* = \varinjlim_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{V}_p = \mathbb{R}_\circ^{\mathbb{K}}$$

есть индуктивный предел евклидовых пространств $\mathbb{V}_p^* = \mathbb{V}_p$ относительно естественных инъекций (вложений) $\iota_q^p : \mathbb{V}_p \to \mathbb{V}_q$, $p \leq q$,

$$z \mapsto \iota_q^p(z) = x, \quad \text{где} \quad \pi_p^q(x) = z, \quad x_k = 0 \text{ при } k \in \mathbb{K}_q^p.$$

Поясним, что построению, вектор $z \in \mathbb{V}^*$ тогда и только тогда, когда лишь конечное число его компонент z^k ненулевые (именно на это указывает индекс $_\circ$), так что спаривание $\langle x, y\rangle = \sum_k x_k y^k$ корректно определено для любых $x \in \mathbb{V}^*$ и $y \in \mathbb{V}$.

Обратим внимание, что все модельные пространства изоморфны друг другу, так что фактически имеется всего одно *каноническое* пространство $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, выбор конкретного пространства по сути есть выбор удобной системы координат, а переход от одного пространства к другому – замена координат.

Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$ – модельное пространство с исчерпывающим семейством $\{\mathbb{K}_p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$. Каждому подмножеству $\mathbb{K}_p$, было поставлено в соответствие его *дополнение* $\mathbb{K}^p = \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_p$, так что $\mathbb{K} = \mathbb{K}_p \cup \mathbb{K}^p$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$. Аналогичным образом, каждому евклидову пространству $\mathbb{V}_p$ поставим в соответствие его *алгебраическое дополнение* $\mathbb{V}^p = \mathbb{R}^{\mathbb{K}^p}$, так что $\mathbb{V} = \mathbb{V}_p \times \mathbb{V}^p$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$. Подмножество $S \subset \mathbb{V}$ будем называть *цилиндрическим*, если $S = S_p \times \mathbb{V}^p$ для некоторых $p \in \mathbb{Z}_+$ и $S_p \subset \mathbb{V}_p$ (в этом случае $S_p = \pi_p(S)$, $S = \pi_p^{-1}(S_p)$). По построению, каждое базисное открытое множество в $\mathbb{V}$ цилиндрическое, имеет вид $\mathcal{O} = \pi_p^{-1}(\mathcal{O}_p)$, где $p \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{O}_p$ – открытое множество в $\mathbb{V}_p$. Произвольное открытое множество в $\mathbb{V}$ есть объединение произвольного числа цилиндрических открытых множеств (заметим, что пересечение конечного числа цилиндрических множеств тоже цилиндрическое).

2.3.2 Функции

Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$ – модельное пространство, и $\mathcal{O}$ – его открытое подмножество. Для каждого $p \in \mathbb{Z}_+$ определены открытое подмножество $\mathcal{O}_p = \pi_p(\mathcal{O}) \subset \mathbb{V}_p$ и алгебра $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_p)$ всех гладких функций на $\mathcal{O}_p$. В свою очередь, для каждой пары $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $p \leq q$, определена естественная проекция

$$\pi_p^q : \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_p, \quad z = (z^k \mid k \in \mathbb{K}_q) \mapsto \pi_p^q(z) = (z^k \in z \mid k \in \mathbb{K}_p),$$

и индуцированная ею инъекция (вложение)

$$\iota_q^p = (\pi_p^q)^* : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_p) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_q), \quad f \mapsto \iota_q^p(f) = f \circ \pi_p^q.$$

Соответствующий индуктивный предел $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) = \lim_{p\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_p)$ называется *алгеброй всех гладких функций на* $\mathcal{O}$ (иногда добавляют *конечного порядка*). Проекции $\pi_p : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, индуцируют инъекции (вложения)

$$\iota^p = (\pi_p)^* : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_p) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}), \quad f \mapsto \iota^p(f) = f \circ \pi_p.$$

Всюду ниже мы отождествляем функцию f и ее образ $\iota^p(f)$ и пишем $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_p) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$.

По построению, функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ тогда и только тогда, когда существует число $p \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_p) \setminus \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{p-1})$. В этом случае число $p = p(f)$ называется *порядком* функции f. Очевидно, это эквивалентно тому, что существует индекс $l \in \mathbb{K}_p$, такой, что $\partial_{z^l} f \neq 0$, но $\partial_{z^k} f = 0$ для всех $k \in \mathbb{K}^p$, (здесь и ниже ∂_{z^k} – частная производная по переменной z^k). В частности, носитель $\mathrm{supp}\,(f)$ произвольной функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ есть цилиндрическое множество, замкнутое в $\mathcal{O}$ (т.е., дополнение $\mathcal{O} \setminus \mathrm{supp}\,(f)$ – открыто в $\mathcal{O}$, а значит и в $\mathbb{V}$).

Предложение 2.3.1. *Пусть* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$ *– модельное пространство,* $\mathcal{O}$ *– его открытое подмножество, точка* $x \in \mathcal{O}$. *Существуют открытое подмножество* $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, $x \in \mathcal{B}$, *и функция* $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{V})$ *такие, что* $\mathrm{supp}\,(\varrho) \subset \mathcal{O}$ *и* $\varrho|_{\mathcal{B}} = 1$.

Доказательство. Действительно, для данных открытого подмножества $\mathcal{O} \subset \mathbb{V}$ и точки $x \in \mathcal{O}$ существует цилиндрическое открытое подмножество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_p \times \mathbb{V}^p \subset \mathcal{O}$ такое, что $x \in \mathcal{U}$. Здесь $p \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{U}_p = \pi_p(\mathcal{U}) \subset \mathbb{V}_p$ – открыто в $\mathbb{V}_p$, $\mathcal{U} = \pi_p^{-1}(\mathcal{U}_p)$. В частности, проекция $x_p = \pi_p(x) \in \mathcal{U}_p$, так что согласно известным результатам конечномерного анализа найдутся открытый шар $\mathcal{B}_p \Subset \mathcal{U}_p$ с центром в точке x_p и функция $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{V}_p)$ такие, что $\mathrm{supp}\,(\varrho) \Subset \mathcal{U}_p$ и $\varrho|_{\mathcal{B}_p} = 1$ (напомним, что в конечномерном случае запись $A \Subset B$ означает, что множество A ограничено и его замыкание $\overline{A} \subset B^\circ$, где B° – внутренность множества B). Естественное вложение $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{V}_p) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{V})$ позволяет переписать эти свойства в требуемом виде: $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{V})$, $\mathrm{supp}\,(\varrho) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, $\varrho|_{\mathcal{B}} = 1$, где открытое подмножество $\mathcal{B} = \pi_p^{-1}(\mathcal{B}_p) = \mathcal{B}_p \times \mathbb{V}^p \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, и точка $x \in \mathcal{B}$. $\square$

Пусть даны два модельных пространства $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$ и $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$. Отображение $F : \mathcal{O} \to \mathbb{W}$, $z \mapsto w = F(z)$, $\mathcal{O}$ – открытое подмножество из $\mathbb{V}$, называется *гладким (порядка* $p = p(F) \in \mathbb{Z}_+$*)*, если для каждого $l \in \mathbb{L}$ компонента $F^l \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ (соответственно, $F^l \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{|l|+p}) \setminus \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{|l|+p-1})$), здесь $z = (z^k) \in \mathcal{O}$, $w = (w^l) \in \mathbb{W}$, $w^l = F^l(z)$.

2.3.3 Гладкие многообразия

Пусть $\mathcal{M}$ хаусдорфово топологическое пространство.

Тройка $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ называется *картой* на $\mathcal{M}$, если $\mathcal{V}$ – открытое подмножество пространства $\mathcal{M}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$ – модельное пространство, отображение $\phi : \mathcal{V} \to \mathbb{V}$ – гомеоморфизм на свой образ $\phi(\mathcal{V})$ (в частности, образ $\phi(\mathcal{V})$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{V}$). В этом случае отображение $\phi = (\phi^k \mid k \in \mathbb{K})$ называется *координатным*, его компоненты ϕ^k называются *координатными функциями*, точке $a \in \mathcal{V}$ ставится во взаимно однозначное соответствие точка $z = (z^k) = \phi(a) = (\phi^k(a)) \in \phi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{V}$, компоненты $z^k = \phi^k(a)$, $k \in \mathbb{K}$, называются *локальными координатами точки* a.

Карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ и $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{W}\}$ называются *(гладко) согласованными*, если композиции $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \to \psi(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ и $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \to \phi(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ суть гладкие отображения нулевого порядка. (Очевидно, условие согласование тривиально выполняется, если пересечение $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \varnothing$.) В этом случае определена гладкая замена координат $z = \phi(a) \longleftrightarrow w = \psi(a)$, для всех $a \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, где

$$w^l = (\psi \circ \phi^{-1})^l(z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{|l|}),\, l \in \mathbb{L},\, \mathcal{O}_{|l|} = \pi_{|l|}\big(\phi(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})\big) \subset \mathbb{V},$$

$$z^k = (\phi \circ \psi^{-1})^k(w) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{|k|}),\, k \in \mathbb{K},\, \mathcal{O}_{|k|} = \pi_{|k|}\big(\psi(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})\big) \subset \mathbb{W}.$$

Семейство карт $\{\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ называется *атласом на* $\mathcal{M}$, если $\cup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathcal{V}_\alpha = \mathcal{M}$, и все карты этого семейства попарно согласованы. Карта $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ называется *согласованной* с атласом $\{\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$, если она согласована со всеми картами этого атласа. Атлас $\{\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ называется *максимальным*, иначе *гладкой структурой* на $\mathcal{M}$, если он содержит все согласованные с ним карты. Хаусдорфово топологическое пространство $\mathcal{M}$ вместе с фиксированной гладкой структурой на нем называется *гладким многообразием*. Для задания гладкой структуры на хаусдорфовом топологическом пространстве $\mathcal{M}$ достаточно задать какой либо атлас на нем.

Атлас $\{\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ на гладком многообразии $\mathcal{M}$ будем называть *локально конечным*, если для каждой точки a из $\mathcal{M}$ пересечение $\{a\} \cap \mathcal{V}_\alpha \neq \varnothing$ лишь для конечного числа индексов $\alpha \in \mathrm{A}$.

Всюду ниже, если явно не оговорено противное, термин *гладкое многообразие* означает *бесконечномерное гладкое многообразие, обладающее локально конечным атласом*, а термин *атлас* означает *локально конечный атлас.*

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Функция $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ называется *гладкой (порядка* $\leq p \in \mathbb{Z}_+$*)* на многообразии $\mathcal{M}$, если $f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{V}))$ (соответственно, $f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{V})_p)$) для каждой карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ алгебру всех гладких функций на $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{U}$ – открытое подмножество гладкого многообразия $\mathcal{M}$ с атласом $\{\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$. Тогда на $\mathcal{U}$ индуцирована структура гладкого многообразия с атласом $\{\mathcal{W}_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}'\}$, где $\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{U}$, $\psi_\alpha = \phi_\alpha|_{\mathcal{W}_\alpha}$, множество A' состоит из всех индексов $\alpha \in \mathrm{A}$, для которых множества $\mathcal{W}_\alpha \neq \varnothing$. Отображение $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ называется *гладкой функцией на открытом подмножестве* $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, если оно является гладкой функцией на многообразии $\mathcal{U}$. Обозначим через $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ алгебру всех гладких функций на открытом множестве $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ – гладкие многообразия.

Непрерывное отображение $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *гладким (порядка* $\leq p \in \mathbb{Z}_+$*)*, если композиция $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{V}) \to \mathbb{W}$ есть гладкое отображение (соответственно, порядка $\leq p$) для любых согласованных карт $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{M}$ и $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{W}\}$ на $\mathcal{N}$, т.е. таких, что $F(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$.

Легко проверяется, что таким образом определена *категория гладких многообразий.*

Гладкое отображение $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *иммерсией*, если для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ существуют согласованные карты $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}\}$ на $\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{U}$, и $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U} \times \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{N}$, $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$, такие что $\psi \circ F \circ \phi^{-1} = \iota|_{\phi(\mathcal{U})}$, где $\iota : \mathbb{U} \to \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, $u \mapsto (u, 0)$, есть каноническая инъекция.

Гладкое отображение $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ называется *субмерсией*, если для каждой точки $b \in \mathcal{N}$ существуют согласованные карты $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U} \times \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{N}$, $b \in \mathcal{W}$, и $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}\}$ на $\mathcal{M}$, $F(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$, такие что $\phi \circ F \circ \psi^{-1} = \pi|_{\psi(\mathcal{W})}$, где $\pi : \mathbb{U} \times \mathbb{V} \to \mathbb{U}$, $(u, v) \mapsto u$, есть каноническая проекция.

Предложение 2.3.2. *Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, $\mathcal{U}$ – его открытое подмножество, точка $a \in \mathcal{U}$. Существуют открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{W}$, и функция $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ такие, что $supp(g) \subset \mathcal{U}$ и $g|_{\mathcal{W}} = 1$.*

Доказательство. Действительно, пусть даны $a \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ с указанными свойствами. Выберем карту $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{M}$ такую, что $a \in \mathcal{V}$. Положим $\mathcal{O} = \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{V}$. Согласно Предложению 2.3.1 найдутся открытое подмножество $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, $\phi(a) \in \mathcal{B}$, и функция $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{V}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ такие, что $\operatorname{supp}(\varrho) \subset \mathcal{O}$ и $\varrho|_{\mathcal{B}} = 1$. Легко проверяется, что множество $\mathcal{W} = \phi^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и функция

$$g(m) = \begin{cases} (\varrho \circ \phi)(m), & m \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \\ 0, & m \in \mathcal{M} \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}), \end{cases}$$

обладают требуемыми свойствами. □

Следствие 2.3.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Пусть функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, точка $a \in \mathcal{M} \setminus \operatorname{supp}(f)$. Существуют открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$, $a \in \mathcal{W}$, и функция $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ такие, что $h|_{\mathcal{W}} = 0$, $h \cdot f = f$.*

Доказательство. Пусть даны функция f и точка a с указанными свойствами. Положим $\mathcal{U} = \mathcal{M} \setminus \operatorname{supp}(f)$, тогда в силу Предложения 2.3.2, существуют открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{W}$, и функция $g \in \mathcal{C}^\infty\mathcal{M}$ такие, что $\operatorname{supp}(g) \subset \mathcal{U}$ и $g|_{\mathcal{W}} = 1$. Очевидно, что это подмножество $\mathcal{W}$ и функция $h = 1 - g$ обладают требуемыми свойствами. □

Следствие 2.3.2. *Пусть $\mathcal{U}$ – открытое подмножество гладкого многообразия $\mathcal{M}$. Для каждой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ и точки $a \in \mathcal{U}$ найдутся открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{W}$, и функция $f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ такие, что $f'|_{\mathcal{W}} = f|_{\mathcal{W}}$.*

Доказательство. Пусть даны функция f и точка a с указанными свойствами. В силу Предложения 2.3.2, существуют открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{W}$, и функция $g \in \mathcal{C}^\infty\mathcal{M}$ такие, что $\operatorname{supp}(g) \subset \mathcal{U}$ и $g|_{\mathcal{W}} = 1$. Легко проверяется, что это подмножество $\mathcal{W}$ и функция

$$f'(m) = \begin{cases} (g \cdot f)(m), & m \in \mathcal{U}, \\ 0, & m \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}, \end{cases}$$

обладают требуемыми свойствами. □

2.3.4 Дифференцирования и дифференциальные формы

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ – алгебра всех гладких функций на $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}))$ – алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ (см. секцию 1.3). Напомним, что на $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ определена также структура $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуля, согласованная со структурой алгебры Ли.

Пусть

$$\big\{\Omega(\mathcal{M}), d\big\} = \big\{\Omega^p(\mathcal{M}), d^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\big\}$$

– комплекс де Рама *дифференциальных форм* на $\mathcal{M}$, где

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\Omega(\mathcal{M}) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+}\Omega^p(\mathcal{M})$,
- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\Omega^0(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,
- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\Omega^p(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})}(\wedge^p\mathcal{D}(\mathcal{M}), \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}))$, при $p \in \mathbb{N}$,
- ⋆ дифференциал $d = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+} d^p \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(\Omega(\mathcal{M}))$,
- ⋆ линейные отображения $d^p \in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\Omega^p(\mathcal{M}), \Omega^{p+1}(\mathcal{M}))$ действуют по формулам Предложения 1.3.21 на стр. 30, в частности $d^{p+1} \circ d^p = 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

На гладких многообразиях стандартным образом определены и действуют все операции, приведенные в секции 1.3.

Дифференцирования и дифференциальные формы на гладком многообразии $\mathcal{M}$ обладают локальными свойствами, такими же как и в конечномерном случае (см, например, [14] и цитируемую там литературу). Полное описание этих свойств выходит за рамки данных лекций. Приведем лишь ряд утверждений, которые нам понадобятся ниже.

Предложение 2.3.3. *Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Каждое дифференцирование $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ есть локальный эндоморфизм пространства $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, т.е.*

$$\mathrm{supp}\,\big(Z(f)\big) \subset \mathrm{supp}\,(f) \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}).$$

Доказательство. Пусть дифференцирование $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ и точка $a \in \mathcal{M} \setminus \operatorname{supp}(f)$. В силу Следствия 2.3.1, существует функция $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ такая, что $h \cdot f = f$ и $h(a) = 0$. Правило Лейбница тогда дает

$$Z(f)(a) = Z(h \cdot f)(a) = Z(h)(a) \cdot f(a) + h(a) \cdot Z(f)(a) = 0,$$

что и утверждается. □

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Для каждого открытого подмножества $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ определено множество $\mathcal{D}(\mathcal{U}) = \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}))$, обладающее согласованными структурами алгебры Ли и $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$-модуля (в частности, $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуля).

Предложение 2.3.4. *Для каждой пары открытых подмножеств $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ определен морфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модулей (*сужение*)*

$$r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \to \mathcal{D}(\mathcal{U}), \quad Z \mapsto r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(Z) = Z|_{\mathcal{U}},$$

с естественными свойствами

- ⋆ $r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}(\mathcal{U})}$ *для всех* $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$,
- ⋆ $r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} \circ r^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} = r^{\mathcal{W}}_{\mathcal{U}}$ *для всех* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть даны $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ и $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Для каждой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ и точки $a \in \mathcal{U}$, в силу Следствия 2.3.2, существуют открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{W}$, и функция $f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ такие, что $f'|_{\mathcal{W}} = f|_{\mathcal{W}}$. Положим, по определению,

$$\big(Z|_{\mathcal{U}}\big)(f)(a) = Z(f')(a).$$

С помощью Предложения 2.3.3 проверяется, что число $Z(f')(a)$ справа не зависит от выбора функции f' и множества $\mathcal{W}$, что определенная таким образом функция $\big(Z|_{\mathcal{U}}\big)(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, что построенное таким образом отображение $Z|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, и что получаемое в результате отображение $r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \to \mathcal{D}(\mathcal{U})$ обладает всеми заявленными свойствами. □

Предложение 2.3.5. *Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, $\mathcal{U}$ – его открытое подмножество, дифференцирование $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Для каждой точки $a \in \mathcal{U}$ существуют открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{W}$, и дифференцирование $Z' \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ такие, что $Z'|_{\mathcal{W}} = Z|_{\mathcal{W}}$.*

Доказательство. Действительно, для данных точки a и подмножества $\mathcal{U}$ с указанными свойствами, в силу Предложения 2.3.2 существуют открытое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{W}$, и функция $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ такие, что $\operatorname{supp}(g) \subset \mathcal{U}$ и $g|_{\mathcal{W}} = 1$. Легко проверяется, что правило $Z' = g \cdot Z$ определяет дифференцирование с требуемыми свойствами. □

2.3.5 Координатное представление

Пусть $\mathcal{M}$ гладкое многообразие, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$ – модельное пространство, $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ – локальная карта на $\mathcal{M}$, $\mathcal{O} = \phi(\mathcal{V})$ – открытое подмножество из $\mathbb{V}$.

По построению определены изоморфизмы топологических пространств

- $\phi : \mathcal{V} \simeq \mathcal{O}, \quad a \mapsto z = \phi(a)$,
- $\phi^{-1} : \mathcal{O} \simeq \mathcal{V}, \quad z \mapsto a = \phi^{-1}(z)$,

и индуцированные изоморфизмы алгебр гладких функций

- $\phi^* : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}), \quad f \mapsto \phi^*(f) = f \circ \phi$,
- $(\phi^{-1})^* : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}), \quad f \mapsto (\phi^{-1})^*(f) = f \circ \phi^{-1}$.

Положим $\mathcal{D}(\mathcal{V}) = \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}))$ и $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}))$. Определены изоморфизмы алгебр Ли

- $\phi_* : \mathcal{D}(\mathcal{V}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{O}), \quad \zeta \mapsto \phi_*(\zeta) = (\phi^{-1})^* \circ \zeta \circ \phi^*$,
- $\phi_*^{-1} : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{V}), \quad \zeta \mapsto \phi_*^{-1}(\zeta) = \phi^* \circ \zeta \circ (\phi^{-1})^*$,

причем $\phi_*(f \cdot \zeta) = (\phi^{-1})^*(f) \cdot \phi_*(\zeta)$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, и $\phi_*^{-1}(f \cdot \zeta) = \phi^*(f) \cdot \phi_*^{-1}(\zeta)$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Изоморфизмы ϕ_* и ϕ_*^{-1} для всех $p \in \mathbb{N}$ индуцируют одноименные изоморфизмы

- $\phi_* : \wedge^p \mathcal{D}(\mathcal{V}) \simeq \wedge^p \mathcal{D}(\mathcal{O})$,
  $$\phi_*\big(\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \zeta_p\big) = \phi_*(\zeta_1) \wedge \ldots \wedge \phi_*(\zeta_p),$$
- $\phi_*^{-1} : \wedge^p \mathcal{D}(\mathcal{O}) \simeq \wedge^p \mathcal{D}(\mathcal{V})$,
  $$\phi_*^{-1}\big(\zeta_1 \wedge \ldots \wedge \zeta_p\big) = \phi_*^{-1}(\zeta_1) \wedge \ldots \wedge \phi_*^{-1}(\zeta_p),$$

которые, в свою очередь, приводят к изоморфизмам

* $\phi^*: \Omega^p(\mathcal{O}) \simeq \Omega^p(\mathcal{V}), \quad \omega \mapsto \phi^*(\omega) = \phi^* \circ \omega \circ \phi_*$,
* $(\phi^{-1})^*: \Omega^p(\mathcal{V}) \simeq \Omega^p(\mathcal{O}), \quad \omega \mapsto (\phi^{-1})^*(\omega) = (\phi^{-1})^* \circ \omega \circ \phi_*^{-1}$.

Более того, определен изоморфизм комплексов

$$\{\Omega^p(\mathcal{O}), d^p_{\mathcal{O}} \mid p \in \mathbb{Z}_+\} \simeq \{\Omega^p(\mathcal{V}), d^p_{\mathcal{V}} \mid p \in \mathbb{Z}_+\},$$

поскольку по построению $\phi^* \circ d^p_{\mathcal{O}} = d^p_{\mathcal{V}} \circ \phi^*$.

Приведем координатное описание дифференцирований и дифференциальных форм на на открытом подмножестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{V}$, поскольку оно имеет некоторые особенности, связанные с бесконечной размерностью модельного пространства $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$.

Прежде всего, напомним, что по построению каждая функция $f(z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ имеет конечный порядок, т.е. лишь конечное число частных производных $\partial_{z^k} f(z) \not\equiv 0$. Это позволяет при описании дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ использовать те же аргументы, что и в конечномерном случае, и приводит к представлению

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \left\{\zeta = \sum_{k\in\mathbb{K}} \zeta^k \cdot \partial_{z^k} \mid \zeta^k = \zeta(z^k) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})\right\} \simeq \times^{\mathbb{K}} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}).$$

Другими словами частные производные $\{\partial_{z^k} \mid k \in \mathbb{K}\}$ образуют (топологический) базис $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$-модуля $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. В свою очередь, для $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$-модуля $\Omega^1(\mathcal{O})$ получаем описание

$$\Omega^1(\mathcal{O}) = \left\{\omega = \sum_{k\in\mathbb{K}} \omega_k \cdot dz^k \mid \omega_k = \omega(\partial_{z^k}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})\right\} \simeq \oplus^{\mathbb{K}} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}),$$

где знак суммы $\oplus$ подчеркивает, что лишь конечное число компонент ω_k ненулевые. В общем случае,

$$\Omega^p(\mathcal{O}) = \wedge^p \Omega^1(\mathcal{O}) = \left\{\omega = \frac{1}{p!} \sum_{k_1,\dots,k_p\in\mathbb{K}} \omega_{k_1\dots k_p} \cdot dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p}\right\},$$

где компоненты $\omega_{k_1\dots k_p} = \omega(\partial_{z^{k_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{z^{k_p}}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, лишь конечное их число ненулевые.

2.3.6 Подмногообразия

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ называется *(гладким) подмногообразием* многообразия $\mathcal{M}$, если для каждой точки $a \in \mathcal{S}$ существует карта $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$, $a \in \mathcal{V}$, на $\mathcal{M}$ такая, что

* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}} = \{z = (x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}},\ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{L}}\}$,
* $\phi(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}) = \phi(\mathcal{V}) \cap \iota(\mathbb{R}^{\mathbb{K}}) = \{z = (x, 0) \in \phi(\mathcal{V})\}$,
  где $\iota : \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$, $x \mapsto z = (x, 0)$, есть каноническая инъекция.

Карты такого вида назовем *определяющими* подмногообразие $\mathcal{S}$.

Предложение 2.3.6. *Пусть $\mathcal{S}$ – гладкое подмногообразие многообразия $\mathcal{M}$. Тогда на множестве $\mathcal{S}$ существует единственная гладкая структура такая, что естественное вложение $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ есть гладкое отображение.*

Доказательство. Наделим множество $\mathcal{S}$ хаусдорфовой топологией, индуцированной из $\mathcal{M}$. Далее, пусть $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ – определяющая карта, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$, и $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$. Полагая пространство $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$ канонически вложенным в пространство $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$, т.е. отождествляя точки $(x, 0) \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$ и $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$, получаем вложения $\phi(\mathcal{W}) \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. В этом случае, множество $\mathcal{W}$ – открыто в $\mathcal{S}$, множество $\phi(\mathcal{W})$ – открыто в $\mathbb{W}$, а отображение $\psi = \phi|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \to \mathbb{W}$ – гомеоморфизм на свой образ. Другими словами, каждая карта $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на многообразии $\mathcal{M}$, определяющая для подмногообразия $\mathcal{S}$, канонически порождает карту $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{W}\}$ на хаусдорфовом пространстве $\mathcal{S}$. Пусть $\{\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha\}$ и $\{\mathcal{V}_\beta \xrightarrow{\phi_\beta} \mathbb{V}_\beta\}$ – две определяющие карты, тогда порождаемые ими карты $\{\mathcal{W}_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} \mathbb{W}_\alpha\}$ и $\{\mathcal{W}_\beta \xrightarrow{\psi_\beta} \mathbb{W}_\beta\}$ гладко согласованы. Действительно, по построению определено гладкое отображение $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ из $\phi_\alpha(\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)$ в $\phi_\beta(\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta)$, подробнее

$$\begin{aligned} x_\beta^k &= (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^k (x_\alpha, y_\alpha), \quad k \in \mathbb{K}_\beta, \\ y_\beta^l &= (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^l (x_\alpha, y_\alpha), \quad l \in \mathbb{L}_\beta. \end{aligned}$$

При $y_\alpha = 0$ имеем

$$\begin{aligned} x_\beta^k &= (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^k (x_\alpha, 0) = (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(x_\alpha), \quad k \in \mathbb{K}_\beta, \\ y_\beta^l &= (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^l (x_\alpha, 0) = 0, \quad l \in \mathbb{L}_\beta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что отображение $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ из $\psi_\alpha(\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta)$ в $\psi_\beta(\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta)$ гладкое. Аналогичным образом проверяется, что и обратное отображение $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ из $\psi_\beta(\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta)$ в $\psi_\alpha(\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta)$

гладкое, что и требовалось доказать. Рассмотрим теперь семейство $\{\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbb{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ всех карт на многообразии $\mathcal{M}$, определяющих подмногообразие $\mathcal{S}$. Из приведенных выше рассуждений следует, что порождаемое им семейство $\{\mathcal{W}_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} \mathbb{W}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ карт на хаусдорфовом пространстве $\mathcal{S}$ является атласом, задающим на нем гладкую структуру (поясним, что в силу определения подмногообразия, $S = \cap_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathcal{W}_\alpha \subset \cap_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathcal{V}_\alpha$). По построению, естественное вложение $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ есть гладкое отображение. Единственность такой гладкой структуры на $\mathcal{S}$ предлагается проверить самостоятельно, в качестве упражнения. □

Предложение 2.3.7. *Пусть $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ – субмерсия, точка $a \in \mathcal{M}$, прообраз $F^{-1}(a) \neq \varnothing$. Тогда $F^{-1}(a)$ – подмногообразие гладкого многообразия $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Согласно определению подмногообразия, надо проверить наличие атласа из определяющих карт. Пусть точка $b \in F^{-1}(a) \subset \mathcal{N}$. По определению субмерсии (см. стр. 135), существуют карты $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U} \times \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{N}$, $b \in \mathcal{W}$, и $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}\}$, $F(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$, такие что $\phi \circ F \circ \psi^{-1} = \pi|_{\psi(\mathcal{W})}$. Без ограничения общности, считаем, что $\phi(a) = (0,0)$, и следовательно прообраз $F^{-1}(a)$ имеет локальное представление

$$\psi\big(\mathcal{W} \cap F^{-1}(a)\big) = \big\{(0,0,y,v) \in \mathcal{O} = \psi(\mathcal{W}) \cap \iota(\mathbb{V})\big\},$$

что и требуется. □

Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ – гладкие многообразия. Гладкое отображение $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ называется *погружением*, если локально оно является изоморфизмом на свой образ, т.е. если для каждой точки $a \in \mathcal{S}$ существует открытое подмножество $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$, $a \in \mathcal{U}$, такое что образ $\sigma(\mathcal{U})$ есть подмногообразие в $\mathcal{M}$, и сужение $\sigma\big|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \simeq \sigma(\mathcal{U})$ есть изоморфизм в категории гладких многообразий. В этом случае, глобальный образ $\sigma(\mathcal{S})$, который может и не быть подмногообразием в $\mathcal{M}$, называется *погруженным подмногообразием.*

2.3.7 Касательное и кокасательное расслоения

Будем проводить построения, следуя аналогичным построениям в конечномерном случае (см., например, [14], секция 2.3).

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Каждой точке $a \in \mathcal{M}$ ставим в соответствие семейство $\mathfrak{U}(a)$ всех ее открытых окрестностей в хаусдорфовом пространстве $\mathcal{M}$.

Для каждой пары $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}(a)$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, стандартным образом определено *сужение*

$$r_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U}), \quad f \mapsto r_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f) = f|_{\mathcal{U}},$$

с естественными свойствами

- $\star$ $r_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})}$ для всех $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$,
- $\star$ $r_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \circ r_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = r_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}$ для всех $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{M}$.

Это позволяет определить индуктивный предел

$$\mathcal{C}^{\infty}(a) = \lim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(a)} \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})$$

– *алгебру ростков гладких функций в точке a*. По построению, росток $f_a \in \mathcal{C}^{\infty}(a)$ есть *класс эквивалентности* некоторой функции $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(a)$, причем две функции $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{U})$ и $g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{V})$ называются *эквивалентными*, если $f|_{\mathcal{W}} = g|_{\mathcal{W}}$ для некоторого $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}(a)$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Замечание. В силу Предложения 2.3.2, в каждом ростке (т.е., классе эквивалентности) $f_a \in \mathcal{C}^{\infty}(a)$ имеется глобальный представитель $f \in f_a \cap \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{M})$.

В силу Предложения 2.3.4, для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ определен индуктивный предел

$$\mathcal{D}(a) = \lim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(a)} \mathcal{D}(\mathcal{U})$$

– множество *ростков дифференцирований в точке a*. По построению, росток $Z_a \in \mathcal{D}(a)$ есть *класс эквивалентности* некоторого дифференцирования $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(a)$, причем два дифференцирования $X \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ и $Y \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ называются *эквивалентными*, если $X|_{\mathcal{W}} = Y|_{\mathcal{W}}$ для некоторого $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}(a)$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Замечание. В силу Предложения 2.3.5, в каждом ростке (т.е., классе эквивалентности) $Z_a \in \mathcal{D}(a)$ существует глобальный представитель $Z \in Z_a \cap \mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Очевидно, множество $\mathcal{D}(a)$ обладает согласованными структурами алгебры Ли и $\mathcal{C}^{\infty}(a)$-модуля.

Предложение 2.3.8. Для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ имеет место вложение (инъективный морфизм $\mathcal{C}^\infty(a)$-модулей и Ли алгебр)

$$\mathcal{D}(a) \subset \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(a)), \quad Z_a \mapsto \widehat{Z}_a,$$

задаваемое правилом $\widehat{Z}_a(f_a) = Z(f)_a$ для всех $f_a \in \mathcal{C}^\infty(a)$, где Z – произвольный глобальный представитель ростка Z_a, f – произвольный глобальный представитель ростка f_a, $Z(f)_a$ – росток, порожденный функцией $Z(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Доказательство. Следует лишь проверить корректность приведенной конструкции, что предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

Касательный вектор ζ_a в точке $a \in \mathcal{M}$ есть непрерывный линейный функционал на на линейном топологическом пространстве $\mathcal{C}^\infty(a)$ (т.е., элемент сильного дуального линейного пространства $\mathcal{C}^\infty(a)^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathcal{C}^\infty(a), \mathbb{R})$), удовлетворяющий *остаточному правилу Лейбница*

$$\zeta_a(f_a \cdot g_a) = \zeta_a(f_a) \cdot g_a(a) + f_a(a) \cdot \zeta_a(g_a) \quad \text{для всех} \quad f_a, g_a \in \mathcal{C}^\infty(a),$$

где, например, $f_a(a)$ – значение ростка f_a в точке a, определяемое как общее значение в этой точке всех представителей данного ростка. Линейное пространство всех касательных векторов в точке $a \in \mathcal{M}$ обозначается через $T_a\mathcal{M}$ и называется *касательным пространством в точке a*.

Предложение 2.3.9. Для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ имеет место линейное отображение

$$\mathcal{D}(a) \to T_a\mathcal{M}, \quad Z_a \mapsto \zeta_a,$$

задаваемое правилом $\zeta_a(f_a) = Z(f)(a)$, где Z – произвольный глобальный представитель ростка Z_a, f – произвольный глобальный представитель ростка f_a, $Z(f)(a)$ – значение функции $Z(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ в точке a.

Доказательство. Опять, следует лишь убедиться в корректности приведенной конструкции. □

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, точка $a \in \mathcal{M}$. Для описания касательного пространства $T_a\mathcal{M}$ воспользуемся координатным представлением (см. подсекцию 2.3.5). Пусть $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ –

карта на $\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{V}$, $\mathcal{O} = \phi(\mathcal{V})$ – открытое подмножество из $\mathbb{V}$, так что $\phi : \mathcal{V} \simeq \mathcal{O}$, $x \mapsto z = \phi(x)$, в частности, $a \mapsto b = \phi(a)$. Изоморфизм

$$\phi^* : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}), \quad g \mapsto f = g \circ \phi,$$

индуцирует одноименный изоморфизм

$$\phi^* : \mathcal{C}^\infty(b) \simeq \mathcal{C}^\infty(a), \quad g_b \mapsto f_a = g_b \circ \phi,$$

(подробнее $f_a = (g \circ \phi)_a$, где $g \in g_b \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, $(g \circ \phi)_a$ – росток функции $g \circ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$), который в свою очередь индуцирует изоморфизм

$$\phi_* : T_a\mathcal{M} = T_a\mathcal{V} \simeq T_b\mathcal{O}, \quad \xi_a \mapsto \eta_b = \xi_a \circ \phi^*.$$

Таким образом, достаточно описать пространство $T_b\mathcal{O}$. Каждой координатной функции $z^k \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, $k \in \mathbb{K}$, поставим в соответствие ее класс эквивалентности (росток) $z_b^k \in \mathcal{C}^\infty(b)$. Обратим внимание, что росток $P(z)_b = P(z_b)$ для всякого многочлена $P(z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, где $z_b = (z_b^k \mid k \in \mathbb{K})$.

Предложение 2.3.10. *Каждый касательный вектор $\eta_b \in T_b\mathcal{O}$ имеет единственное представление вида*

$$\eta_b = \sum_{k \in \mathbb{K}} \eta^k \cdot \partial_{z_b^k},$$

где компоненты $\eta^k = \eta_b(z_b^k) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{K}$, касательные векторы $\partial_{z_b^k} \in T_b\mathcal{O}$ действуют по правилу: $\partial_{z_b^k}(f_b) = \big(\partial_{z^k} f(z)\big)_b$, для любого ростка $f_b \in \mathcal{C}^\infty(a)$ и его представителя $f(z) \in \mathcal{C}^\infty(a) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$.

Доказательство. Действительно, пусть вектор $\eta_b \in T_b\mathcal{O}$. Для всякого многочлена $P(z)$ остаточное правило Лейбница дает

$$\eta_b(P(z)_b) = \sum_{k \in \mathbb{K}} \eta_b^k \cdot \big(\partial_{z^k} P(z)\big)_b,$$

где $\eta_b^k = \eta_b(z_b^k)$. В силу плотности многочленов в алгебре $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ и непрерывности линейного функционала $\eta_b \in \mathcal{C}^\infty(b)^*$, это представление сохранятся и для всех функций $f(z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, а значит и для всех ростков $f_b \in \mathcal{C}^\infty(b)$, что по сути и утверждается. $\square$

Следствие 2.3.3. *Для каждой точки $b \in \mathcal{O}$ имеет место представление*

$$T_b\mathcal{O} = \left\{ \eta = \sum_{k\in\mathbb{K}} \eta^k \cdot \partial_{z_b^k} \;\middle|\; \eta^k = \eta_b(z_b^k) \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

в частности, семейство $\left\{ \partial_{z_b^k} \mid k \in \mathbb{K} \right\}$ есть (топологический) базис пространства $T_b\mathcal{O}$.

Следствие 2.3.4. *Для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ и каждой карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$, $a \in \mathcal{V}$, имеет место изоморфизм*

$$T_a\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \xi_a \mapsto \xi_a(\phi_a) = (\xi_a(\phi_a^k) \mid k \in \mathbb{K}),$$

где ϕ_a^k – росток координатной функции ϕ^k (напомним, что по построению $\phi = (\phi^k \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \mid k \in \mathbb{K})$).

Следствие 2.3.5. *Отображение $\mathcal{D}(a) \to T_a\mathcal{M}$ (см. Предложение 2.3.9) сюръективное для каждой точки $a \in \mathcal{M}$.*

Обозначим через $T\mathcal{M} = \cup_{a\in\mathcal{M}} T_a\mathcal{M}$ объединение всех касательных пространств и зададим *проекцию* $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ правилом: каждому касательному вектору $\zeta_a \in T\mathcal{M}$ поставим в соответствие его *начало* – точку $a \in \mathcal{M}$. По построению, для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ слой $\pi^{-1}(a) = T_a\mathcal{M}$ есть линейное пространство, изоморфное каноническому пространству $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

На множестве $T\mathcal{M}$ имеется естественная гладкая структура, индуцированная из $\mathcal{M}$, такая что тройка $T\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ есть векторное расслоение над $\mathcal{M}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, сечения которого суть дифференцирования алгебры $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Именно, каждой паре, состоящей из карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{M}$ и открытого подмножества $\mathcal{O} \subset \mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, поставим в соответствие подмножество

$$\left\{ \xi_a \in T\mathcal{M} \mid a \in \mathcal{V},\ \xi_a(\phi_a) \in \mathcal{O} \right\},$$

и наделим множество $T\mathcal{M}$ хаусдорфовой топологией, в которой указанные подмножества образуют базис открытых множеств. Далее, каждая карта $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{M}$ индуцирует соответствующую карту $\{\widehat{\mathcal{V}} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{\mathbb{V}}\}$ на хаусдорфовом пространстве $T\mathcal{M}$, где

- ⋆ $\widehat{\mathcal{V}} = \pi^{-1}(\mathcal{V})$ – открытое подмножество пространства $T\mathcal{M}$,

- ⋆ $\widehat{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \times \mathbb{V} \simeq \mathbb{V} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

- ⋆ $\widehat{\phi} : \widehat{\mathcal{V}} \to \widehat{\mathbb{V}}$ непрерывное отображение, действующее по правилу: $\xi_a \mapsto \widehat{\phi}(\xi_a) = (\phi(a), \xi_a(\phi_a)) \in \phi(\mathcal{V}) \times \mathbb{V}$ для всех $\xi_a \in \widehat{\mathcal{V}}$.

Как и в конечномерном случае проверяется, что если две карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ и $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{W}\}$ согласованы на $\mathcal{M}$, то индуцированные две карты $\{\widehat{\mathcal{V}} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{\mathbb{V}}\}$ и $\{\widehat{\mathcal{W}} \xrightarrow{\widehat{\psi}} \widehat{\mathbb{W}}\}$ согласованы на $T\mathcal{M}$. Следовательно, атлас на $\mathcal{M}$ индуцирует соответствующий атлас на $T\mathcal{M}$, задавая на нем структуру гладкого многообразия.

По построению, проекция $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ есть гладкое сюръективное отображение, карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ и $\{\widehat{\mathcal{V}} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{\mathbb{V}}\}$ осуществляют локальную тривиализацию, каждый слой $\pi^{-1}(a)$, есть линейное пространство, изоморфное каноническому пространству $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Таким образом, тройка $T\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ наделена естественной структурой векторного расслоения над $\mathcal{M}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, индуцированной из $\mathcal{M}$. Это расслоение обозначается также через $T\mathcal{M}$ и называется *касательным расслоением многообразия* $\mathcal{M}$. Его гладкие сечения называются *касательными векторными полями на* $\mathcal{M}$. $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль всех касательных полей на $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

Предложение 2.3.11. *Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Имеет место естественный изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модулей*

$$\tau : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{T}(\mathcal{M}), \quad Z \mapsto \tau(Z) = \zeta,$$

где сечение ζ определено правилом

$$\zeta_a(f_a) = Z(f)(a), \quad a \in \mathcal{M}, \quad f_a \in \mathcal{C}^\infty(a), \quad f \in f_a \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}).$$

Обратный морфизм $\zeta \mapsto \tau^{-1}(\zeta) = Z$ действует по правилу

$$Z(f)(a) = \zeta_a(f_a), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \quad a \in \mathcal{M},$$

где $f_a \in \mathcal{C}^\infty(a)$ – росток функции f в точке a.

Доказательство. Следует лишь проверить корректность приведенных конструкций, что делается элементарными (хотя и нудными) рассуждениями и предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

Замечание. $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ обладает согласованной структурой алгебры Ли. Изоморфизм τ переносит эту структуру на $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\mathcal{T}(\mathcal{M})$,

$$[\xi,\eta]=\tau\big([\tau^{-1}(\xi),\tau^{-1}(\eta)]\big)\quad \text{для всех}\quad \xi,\eta\in\mathcal{T}(\mathcal{M}).$$

Это позволяет полностью отождествить дифференцирования и касательные поля, и использовать соответствующие термины и обозначения как синонимы, в зависимости от ситуации и настроения.

$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ имеет дуальный модуль

$$\mathcal{T}(\mathcal{M})^*=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})}(\mathcal{T}(\mathcal{M}),\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})),$$

а изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модулей $\tau:\mathcal{D}(\mathcal{M})\simeq\mathcal{T}(\mathcal{M})$ имеет дуальный изоморфизм

$$\tau^*:\mathcal{T}(\mathcal{M})^*\simeq\mathcal{D}(\mathcal{M})^*=\Omega^1(\mathcal{M}),\quad \chi\mapsto\omega=\chi\circ\tau.$$

Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ – гладкие многообразия и $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ – гладкое отображение. Морфизм алгебр

$$F^*:\mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})\to\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}),\quad g\mapsto f=F^*(g)=g\circ F,$$

для каждой точки $a\in\mathcal{M}$ определяет одноименный морфизм алгебр

$$F^*:\mathcal{C}^\infty(b)\to\mathcal{C}^\infty(a),\quad g_b\mapsto f_a=F^*(g_b)=g_b\circ F,$$

где точка $b=F(a)\in\mathcal{N}$ (подробнее, $F^*(g_b)=(g\circ F)_a=F^*(g)_a$, где $g\in\mathcal{C}^\infty(b)\cap\mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$). В свою очередь, это позволяет определить *касательное отображение*

$$F_*:T\mathcal{M}\to T\mathcal{N},\quad \xi_a\mapsto\eta_b=F_*(\xi_a)=\xi_a\circ F^*,\quad b=F(a).$$

В качестве упражнения, можно проверить, что *эти правила задают ковариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию векторных расслоений.*

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, $T\mathcal{M}\xrightarrow{\pi}\mathcal{M}$ – его касательное расслоение. Для каждой точки $a\in\mathcal{M}$ касательное пространство $T_a\mathcal{M}\simeq\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеет дуальное (сопряженное) пространство $T_a^*\mathcal{M}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_a\mathcal{M},\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_\circ$ – *кокасательное пространство* *в точке a*, его элементы называются *кокасательными векторами*. Для описания кокасательного пространства $T_a^*\mathcal{M}$ снова воспользуемся координатным представлением (см. подсекцию 2.3.5). Будем использовать обозначения, введенные при описании касательного пространства $T_a\mathcal{M}$ (см. стр. 145). К приведенным там изоморфизмом добавится изоморфизм

$$\phi^* : T_b^*\mathcal{O} \simeq T_a^*\mathcal{M}, \quad \chi_b \mapsto \omega_a = \chi_b \circ \phi_*,$$

дуальный к изоморфизму $\phi_* : T_a\mathcal{M} \simeq T_b\mathcal{O}$ (заметим, что обозначение однотипных отображений одинаковыми символами – обычная практика в дифференциальной геометрии, это делается ради наглядности изложения). Таким образом, достаточно описать пространство $T_b^*\mathcal{O}$, дуальное к пространству $T_b\mathcal{O}$.

Предложение 2.3.12. *Каждый кокасательный вектор $\chi_b \in T_b^*\mathcal{O}$ имеет единственное представление вида*

$$\chi_b = \sum_{k\in\mathbb{K}} \chi_k \cdot dz_b^k,$$

где лишь конечное число компонент $\chi_k = \chi_b(\partial_{z_b^k}) \in \mathbb{R}$ ненулевые, кокасательные векторы $dz_b^k \in T_b^*\mathcal{O}$ определены правилом $dz_b^k(\partial_{z_b^l}) = \delta_l^k$ для всех $k, l \in \mathbb{K}$ (δ_l^k – символ Кронекера). *Другими словами, справедливо представление*

$$T_b^*\mathcal{O} = \left\{ \chi_b = \sum_{k\in\mathbb{K}} \chi_k \cdot dz_b^k \;\middle|\; \chi_k = \chi_b(\partial_{z_b^k}) \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}_\circ^{\mathbb{N}},$$

в частности, семейство $\{dz_b^k \mid k \in \mathbb{K}\}$ есть (алгебраический и топологический) базис пространства $T_b^*\mathcal{O}$.

Доказательство. Достаточно обратить внимание на то, что это Предложение есть дуальная версия, доказанного выше Предложения 2.3.10. □

Следствие 2.3.6. *Для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ и карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$, $a \in \mathcal{V}$, имеет место изоморфизм*

$$T_a^*\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}_\circ^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}_\circ^{\mathbb{N}}, \quad \omega_a \mapsto \omega_a(\partial_a) = (\omega_a(\partial_{a,k}) \mid k \in \mathbb{K}),$$

где касательные векторы $\partial_{a,k} = \phi_*^{-1}(\partial_{z_a^k}) \in T_a\mathcal{M}$, $k \in \mathbb{K}$.

Обозначим через $T^*\mathcal{M} = \cup_{a\in\mathcal{M}} T^*_a\mathcal{M}$ объединение всех кокасательных пространств и зададим *проекцию* $\pi : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ правилом: каждому кокасательному вектору $\chi_a \in T^*\mathcal{M}$ ставим в соответствие его *начало* – точку $a \in \mathcal{M}$. По построению, для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ слой $\pi^{-1}(a) = T^*_a\mathcal{M}$ есть линейное пространство, изоморфное каноническому дуальному пространству $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\circ}$.

На множестве $T^*\mathcal{M}$ имеется естественная гладкая структура, индуцированная из $\mathcal{M}$, такая что тройка $T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ есть векторное расслоение над $\mathcal{M}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\circ}$, сечения которого суть 1-формы на $\mathcal{M}$ (т.е., элементы $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуля $\Omega^1(\mathcal{M})$). Именно, каждой паре, состоящей из карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{M}$ и открытого подмножества $\mathcal{O} \subset \mathbb{V}_{\circ} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}_{\circ} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\circ}$, поставим в соответствие подмножество

$$\big\{\omega_a \in T^*\mathcal{M} \mid a \in \mathcal{V},\ \omega_a(\partial_a) \in \mathcal{O}\big\},$$

и наделим множество $T^*\mathcal{M}$ хаусдорфовой топологией, в которой указанные подмножества образуют базис открытых множеств. Далее, каждая карта $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ на $\mathcal{M}$ индуцирует соответствующую карту $\{\widetilde{\mathcal{V}} \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \widetilde{\mathbb{V}}\}$ на хаусдорфовом пространстве $T^*\mathcal{M}$, где

- ⋆ $\widetilde{\mathcal{V}} = \pi^{-1}(\mathcal{V})$ – открытое подмножество пространства $T^*\mathcal{M}$,
- ⋆ $\widetilde{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \times \mathbb{V}_{\circ} \simeq \mathbb{V} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\circ}$,
- ⋆ $\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathcal{V}} \to \widetilde{\mathbb{V}}$ непрерывное отображение, действующее по правилу: $\omega_a \mapsto \widetilde{\phi}(\omega_a) = (\phi(a), \omega_a(\partial_a)) \in \phi(\mathcal{V}) \times \mathbb{V}_{\circ}$ для всех $\omega_a \in \widetilde{\mathcal{V}}$.

Как и в конечномерном случае проверяется, что если две карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ и $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{W}\}$ согласованы на $\mathcal{M}$, то индуцированные две карты $\{\widetilde{\mathcal{V}} \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \widetilde{\mathbb{V}}\}$ и $\{\widetilde{\mathcal{W}} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widetilde{\mathbb{W}}\}$ согласованы на $T^*\mathcal{M}$. Следовательно, атлас на $\mathcal{M}$ индуцирует соответствующий атлас на $T^*\mathcal{M}$, задавая на нем структуру гладкого многообразия.

По построению, проекция $\pi : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ есть гладкое сюръективное отображение, карты $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ и $\{\widetilde{\mathcal{V}} \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \widetilde{\mathbb{V}}\}$ осуществляют локальную тривиализацию, каждый слой $\pi^{-1}(a)$, есть линейное пространство, изоморфное каноническому пространству $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\circ}$. Таким образом, тройка $T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ наделена естественной структурой векторного расслоения над $\mathcal{M}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\circ}$, индуцированной из $\mathcal{M}$. Это расслоение обозначается также через $T^*\mathcal{M}$ и называется *кокасательным расслоением многообразия* $\mathcal{M}$. Его гладкие сечения называются *кокасательными векторными полями на* $\mathcal{M}$. $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуль всех кокасательных полей на $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$. Говорят, что $Z = 0$ на открытом подмножестве $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, если $Z|_{\mathcal{U}} = 0$ (эквивалентно, $\tau(Z)|_{\mathcal{U}} = 0$). Соответственно, *носитель дифференцирования* $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$ есть наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp}(Z) \subset \mathcal{M}$, вне которого $Z = 0$.

Предложение 2.3.13. *Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Каждая 1-форма $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ есть локальное отображение, т.е.*

$$\operatorname{supp}(\omega(Z)) \subset \operatorname{supp}(Z) \quad \text{для всех} \quad Z \in \mathcal{D}(\mathcal{M}).$$

Доказательство. Пусть дифференцирование $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$, точка $a \notin \operatorname{supp}(Z)$. В силу Следствия 2.3.1, найдется $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ такая, что $h \cdot Z = Z$, $h(a) = 0$, и следовательно

$$\omega(Z)(a) = \omega(h \cdot Z)(a) = h(a) \cdot \omega(Z)(a) = 0,$$

поскольку, по определению, ω есть морфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модулей. □

Предложение 2.3.14. *Для каждой пары открытых подмножеств $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ определен морфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модулей (*сужение*)*

$$r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \Omega^1(\mathcal{V}) \to \Omega^1(\mathcal{U}), \quad \omega \mapsto r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(\omega) = \omega|_{\mathcal{U}},$$

с естественными свойствами

- ⋆ $r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}(\mathcal{U})}$ *для всех* $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$,
- ⋆ $r^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} \circ r^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} = r^{\mathcal{W}}_{\mathcal{U}}$ *для всех* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{M}$.

Доказательство. Повторяет доказательство Предложения 2.3.4 для дифференцирований с заменой Предложения 2.3.3 на Предложение 2.3.13. □

Пусть дифференцирование $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$. Говорят, что $Z = 0$ в точке $a \in \mathcal{M}$, если $Z(f)(a) = 0$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(cM)$. Очевидно, $Z = 0$ в точке a тогда и только тогда, когда его образ – касательное поле $\tau(Z) = 0$ в точке a, т.е. касательный вектор $\xi_a = \tau(Z)(a) = 0$.

Предложение 2.3.15. *Пусть $\mathcal{O}$ – открытое подмножество модельного пространства $\mathbb{V}$,*

$$\zeta = \sum_{k\in\mathbb{K}} \zeta^k \cdot \partial_{z^k} \in \mathfrak{D}(\mathcal{O}) \quad (\text{см. стр. } 140).$$

Дифференцирование $\zeta = 0$ в точке $b \in \mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда все компоненты $\zeta^k(b) = 0$.

Доказательство. Очевидно. □

Следствие 2.3.7. *Пусть* 1*-форма*

$$\omega = \sum_{k\in\mathbb{K}} \omega_k \cdot dz^k \in \Omega^1(\mathcal{O}) \quad (\text{см. стр. } 140).$$

Тогда для любого дифференцирования $\zeta \in \mathfrak{D}(\mathcal{O})$, $\zeta = 0$ в точке $b \in \mathcal{O}$, имеет место равенство $\omega(\zeta)(b) = 0$.

Доказательство. Следует воспользоваться координатным представлением $\omega(\zeta)(b) = \sum_k \omega_k(b) \cdot \zeta^k(b)$ и предыдущим Предложением. □

Предложение 2.3.16. *Пусть дифференцирование $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$, причем $Z = 0$ в точке $a \in \mathcal{M}$. Тогда $\omega(Z)(a) = 0$ для любой* 1*-формы $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$.*

Доказательство. В силу Предложений 2.3.3 и 2.3.13 утверждение имеет локальный характер, так что достаточно воспользоваться предыдущим Следствием. □

Предложение 2.3.17. *Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие. Имеет место естественный изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модулей*

$$\kappa : \mathcal{T}^*(\mathcal{M}) \simeq \Omega^1(\mathcal{M}), \quad \chi \mapsto \kappa(\chi) = \omega,$$

задаваемый правилом $\omega(Z)(a) = \chi_a(\xi_a)$ для всех $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ и $a \in \mathcal{M}$, где $\xi_a = \tau(Z)_a$ – значение касательного поля $\tau(Z)$ в точке a. Обратный морфизм $\omega \mapsto \kappa^{-1}(\omega) = \chi$ действует по правилу $\chi_a(\xi_a) = \omega(Z)(a)$, где дифференцирование $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ любое такое, что $\tau(Z)_a = \xi_a$.

Доказательство. Единственный нетривиальный момент доказательства, тот факт что величина $\omega(Z)(a)$ не зависит от выбора дифференцирования Z, следует из Предложения 2.3.16. Остальное проверяется стандартными рассуждениями. □

Замечание. Таким образом, как и в случае с дифференцированиями и касательными полями, можно отождествлять $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модули 1-форм и кокасательных векторных полей. Исходя из этого, ниже, как правило, мы не будем делать особого различия между дифференцированиями и касательными полями, между 1-формами и кокасательными полями, между дифференциальными формами и внешними произведениями кокасательных полей. Кроме того мы будем широко использовать термин *локальный объект*, подразумевая под этим, что данный объект определен в некоторой открытой окрестности данной точки, без явного указания этой окрестности (например, локальная карта, локальное сечение).

Пусть $\mathcal{S}$ – подмногообразие гладкого многообразия $\mathcal{M}$, $T\mathcal{S}$ и $T\mathcal{M}$ – соответствующие касательные расслоения, а $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ и $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ – соответствующие алгебры Ли касательных полей. Для каждого поля $\zeta \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ (по стандартным правилам сужения области определения отображения) определено его сужение $\zeta\big|_{\mathcal{S}}$ на подмногообразие $\mathcal{S}$. В общем случае, векторное поле $\zeta\big|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})$, где $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})$ есть $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$-модуль всех гладких сечений векторного расслоения $T_{\mathcal{S}}\mathcal{M} = \cup_{a\in\mathcal{S}} T_a\mathcal{M}$, однако далеко не всегда $\zeta\big|_{\mathcal{S}}$ есть касательное поле на $\mathcal{S}$ (т.е. чаще $\zeta\big|_{\mathcal{S}} \notin \mathcal{T}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})$).

Предложение 2.3.18. *Пусть $\mathcal{S}$ – подмногообразие гладкого многообразия $\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \;\middle|\; f\big|_{\mathcal{S}} = 0 \right\}$$

его определяющий идеал (см. Пример 1.3.4). Касательное поле $\zeta \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ касается подмногообразия $\mathcal{S}$, т.е. $\zeta\big|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$, тогда и только тогда, когда $\zeta\big(\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})\big) \subset \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})$, т.е. условие $f\big|_{\mathcal{S}} = 0$ влечет $\zeta(f)\big|_{\mathcal{S}} = 0$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Доказательство. Поскольку утверждение носит локальный характер, его можно доказывать в координатах. Пусть $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ – определяющая карта подмногообразия $\mathcal{S}$ (см. Подсекцию 2.3.6), $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, поле

$$\zeta = \sum_{k\in\mathbb{K}} \xi^k \cdot \partial_{x^k} + \sum_{l\in\mathbb{L}} \eta^l \cdot \partial_{y^l} \in \mathcal{T}(\phi(\mathcal{V})), \quad \xi^k, \eta^l \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{V})).$$

С одной стороны, сужение $\zeta|_{\phi(\mathcal{S})} \in \mathcal{T}(\phi(\mathcal{S}))$ тогда и только тогда, когда сужения $\eta^l|_{\phi(\mathcal{S})} = 0$ для всех $l \in \mathbb{L}$. С другой стороны, для всякой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\phi(cV))$ имеем

$$\zeta(f)\big|_{\phi(\mathcal{S})} = \sum_{k\in\mathbb{K}} \xi^k\big|_{\phi(\mathcal{S})} \cdot \partial_{x^k}\big(f\big|_{\phi(\mathcal{S})}\big) + \sum_{l\in\mathbb{L}} \eta^l\big|_{\phi(\mathcal{S})} \cdot \big(\partial_{y^l} f\big)\big|_{\phi(\mathcal{S})}.$$

Сравнивая эти выражения, убеждаемся в справедливости нашего утверждения. □

2.3.8 Картановы распределения

Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, $T\mathcal{M}$ – его касательное расслоение. *Картаново распределение* $CT\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$ есть инволютивное (см., например, [14], подсекция 2.5.2) векторное подрасслоение с типичным слоем $\mathbb{R}^m$ касательного расслоения $T\mathcal{M}$ (см., например,[14], подсекция 2.2.2). Здесь число $m \in \mathbb{Z}_+$ есть *картанова размерность* распределения $CT\mathcal{M}$, причем случай $m = 0$, когда $CT\mathcal{M} = 0$, является тривиальным, включается для удобства, в нетривиальных ситуациях $m \in \mathbb{N}$. Подробнее, в этом случае

- ⋆ каждой точке $a \in \mathcal{M}$ поставлено в соответствие подпространство $CT_a\mathcal{M}$ векторного пространства $T_a\mathcal{M}$ размерности $\dim CT_a\mathcal{M} = m$,

- ⋆ для каждого открытого $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ множество $\mathcal{CT}(\mathcal{U})$ гладких сечений подрасслоения $CT\mathcal{U}$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ гладких сечений касательного расслоения $T\mathcal{U}$ (коротко, локальные сечения подрасслоения $CT\mathcal{M}$ образуют подалгебры соответствующих алгебр Ли локальных касательных полей на $\mathcal{M}$).

Для локального описания картановых распределений воспользуемся координатным представлением (см. стр. 144 и введенные там обозначения). Именно, пусть $\mathcal{M}$ – гладкое многообразие, точка $a \in \mathcal{M}$, $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ – карта на $\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{V}$, $\mathcal{O} = \phi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{V}$, $\phi_* : T\mathcal{V} \simeq T\mathcal{O}$, в частности $\phi_* : T_a\mathcal{V} \simeq T_b\mathcal{O}$, $b = \phi(a)$. Одноименный изоморфизм $\phi_* : \mathcal{T}(\mathcal{V}) \simeq \mathcal{T}(\mathcal{O})$, $\xi \mapsto \eta$, где $\eta = \phi_* \circ \xi \circ \phi^{-1}$, так что следующая диаграмма коммутативная

$$\begin{tikzcd} T\mathcal{V} \arrow[r, "\phi_*"] & T\mathcal{O} \\ \mathcal{V} \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{O} \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

Пусть теперь на многообразии $\mathcal{M}$ задано картаново распределение $CT\mathcal{M}$. Образ $CT\mathcal{O} = \phi_*(CT\mathcal{V})$ есть картаново распределение на $\mathcal{O}$, и наша задача – дать его описание, которое и будет координатным представлением сужения картанова распределения $CT\mathcal{M}$ на $\mathcal{V}$ (иначе, локальным описанием распределения $CT\mathcal{M}$).

Стандартная карта на картановом распределении $CT\mathcal{M}$ есть пара $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}, \partial\}$, где $\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}$ – карта на многообразии $\mathcal{M}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{U}$, $m = \dim CT\mathcal{M} \in \mathbb{N}$ (так что, $z = (x, u)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{U} = \mathbb{R}^{\mathbb{I}}$), $\partial = \{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ – базис $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$-модуля $\mathcal{CT}(\mathcal{O})$, причем скобка Ли $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ для всех $1 \le \mu, \nu \le m$. Подробнее,

$$\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{i \in \mathbb{I}} A^i_\mu \cdot \partial_{u^i}, \quad 1 \le \mu \le m,$$

где $\partial_{x^\mu}, \partial_{u^i}$ – частные производные, компоненты $A^i_\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, условие коммутирования имеет вид

$$\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu = 0, \quad i \in \mathbb{I}, \quad 1 \le \mu, \nu \le m.$$

Замечание. Поля ∂_μ обычно называются *базисными картановыми полями.*

Предложение 2.3.19. *На каждом картановом распределении имеется атлас из стандартных карт.*

Доказательство. Действительно, пусть $CT\mathcal{M}$ – картаново распределение. Без ограничения общности считаем, что размерность $m = \dim CT\mathcal{M} \in \mathbb{N}$. Пусть точка $a \in \mathcal{M}$ и $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}\}$ – карта на многообразии $\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{V}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{K}}$. Будем использовать введенные выше обозначения. По определению гладкого подрасслоения, найдутся касательные поля

$$\zeta_\mu = \sum_{k \in \mathbb{K}} \zeta^k_\mu(z) \cdot \partial_{z^k} \in \mathcal{CT}(\mathcal{O}), \quad 1 \le \mu \le m, \quad \zeta^k_\mu(z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}),$$

такие что система касательных полей $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ имеет ранг m в точке $b = \phi(a) \in \mathcal{O}$, так что найдутся индексы $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{K}$ и открытое подмножество $\mathcal{O}'$, $b \in \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, такие что детерминант

$$\det \left\| \zeta_\mu^{k_\nu}(z) \right\| \neq 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{O}'.$$

В частности, система $\{\zeta, \dots, \zeta_m\}$ является базисом $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}')$-модуля $\mathcal{CT}(\mathcal{O}')$, а матрица $Z(z) = \left\| \zeta_\mu^{k_\nu}(z) \right\|$ имеет обратную матрицу $S(z) = \left\| \sigma_\nu^\mu(z) \right\|$ для всех $z \in \mathcal{O}'$. Переименуем координаты. Именно, положим $\mathbb{I} = \mathbb{K} \setminus \{k_1, \dots, k_m\}$, $x^\mu = z^{k_\mu}$, $1 \leq \mu \leq m$, $u^i = z^i$, $i \in \mathbb{I}$, так что $z = (x, u) \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{U}$, где $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, $u = (u^i \mid i \in \mathbb{I}) \in \mathbb{U} = \mathbb{R}^{\mathbb{I}}$. Далее, от базиса $\{\zeta, \dots, \zeta_m\}$ перейдем к базису $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$, где

$$\begin{aligned}
\partial_\mu &= \sum_{1 \leq \nu \leq m} \sigma_\mu^\nu(z) \zeta_\nu = \sum_{k \in \mathbb{K}} \left(\sum_{1 \leq \nu \leq m} \sigma_\mu^\nu(z) \zeta_\nu^k(z) \right) \cdot \partial_{z^k} \\
&= \sum_{1 \leq \lambda, \nu \leq m} \sigma_\mu^\nu(z) \zeta_\nu^{k_\lambda}(z) \cdot \partial_{z^{k_\lambda}} + \sum_{i \in \mathbb{I}} \left(\sum_{1 \leq \nu \leq m} \sigma_\mu^\nu(z) \zeta_\nu^i(z) \right) \cdot \partial_{z^i} \\
&= \partial_{x^\mu} + \sum_{i \in \mathbb{I}} A_\mu^i \cdot \partial_{u^i}, \quad A_\mu^i(x, u) = \sum_{1 \leq \nu \leq m} \sigma_\mu^\nu(z) \zeta_\nu^i(z).
\end{aligned}$$

В свою очередь, условие инволютивности ($\mathcal{CT}(\mathcal{O}')$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathcal{T}(\mathcal{O}')$) дает

$$\begin{aligned}
[\partial_\mu, \partial_\nu] &= \sum_{i \in \mathbb{I}} \left(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i \right) \cdot \partial_{u^i} = \sum_{1 \leq \lambda \leq m} c_{\mu\nu}^\lambda(z) \cdot \partial_\lambda \\
&= \sum_{1 \leq \lambda \leq m} c_{\mu\nu}^\lambda(z) \left(\partial_{x^\lambda} + \sum_{i \in \mathbb{I}} A_\lambda^i(z) \cdot \partial_{u^i} \right).
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при ∂_{x^λ} слева и справа, получаем необходимое и достаточное условие инволютивности $0 = c_{\mu\nu}^\lambda(z)$ для всех $1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq m$, что по существу и завершает доказательство. $\square$

Пусть $CT\mathcal{M}$ – картаново распределение, $\dim CT\mathcal{M} = m \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}, \partial\}$ – стандартная карта на $CT\mathcal{M}$, $\mathcal{O} = \phi(\mathcal{V})$. Легко проверяется, что каждое касательное поле $\zeta \in \mathcal{T}(\mathcal{O})$ имеет единственное представление вида

$$\zeta = \sum_{1 \leq \mu \leq m} \xi^\mu \cdot \partial_\mu + \sum_{i \in \mathbb{I}} \eta^i \cdot \partial_{u^i}, \quad \xi^\mu, \eta^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}).$$

Далее, введем кокасательные поля

$$\delta u^i = du^i - \sum_{1\le\mu\le m} A^i_\mu \cdot dx^\mu \in \mathcal{T}^*(\mathcal{O}), \quad i \in \mathbb{I}.$$

Легко проверяется, что $\delta u^i(\partial_\mu) = 0$ для всех $1 \le \mu \le m$, и что каждое кокасательное поле $\omega \in \mathcal{T}^*(\mathcal{O})$ имеет единственное представление вида

$$\omega = \sum_{1\le\mu\le m} \phi_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{i\in\mathbb{I}} \psi_i \cdot \delta u^i,$$

где лишь конечное число компонент $\phi_\mu, \psi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ ненулевые. В частности, $\omega(\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in \mathcal{CT}(\mathcal{O})$ тогда и только тогда, когда $\omega = \sum_i \psi_i \cdot \delta u^i$.

Замечание. Элементы $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуля $\mathcal{CT}(\mathcal{M})$ называются *картановыми касательными полями* (эквивалентно, *дифференцированиями*). Соответственно, элементы $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$-модуля

$$\mathcal{CT}^*(\mathcal{M}) = \big\{\omega \in \mathcal{T}^*(\mathcal{M}) \mid \omega|_{\mathcal{CT}(\mathcal{M})} = 0\big\}$$

называются *картановыми кокасательными полями* (эквивалентно, 1-*формами*).

Пусть $CT\mathcal{M}$ – картаново распределение. Гладкое подмногообразие $\mathcal{S}$ гладкого многообразия $\mathcal{M}$ называется *интегральным подмногообразием* (полной размерности) распределения $CT\mathcal{M}$, если $T\mathcal{S} = CT_\mathcal{S}\mathcal{M}$, где сужение $CT_\mathcal{S}\mathcal{M} = \cup_{a\in\mathcal{S}} CT_a\mathcal{M}$ (другими словами, $T_a\mathcal{S} = CT_a\mathcal{M}$ для всех $a \in \mathcal{S}$). Обратим внимание, что в этом случае $\dim\mathcal{S} = \dim CT\mathcal{M}$. Иногда гладкое подмногообразие $\mathcal{S}$ гладкого многообразия $\mathcal{M}$ называется *интегральным подмногообразием неполной размерности* распределения $CT\mathcal{M}$, если $T\mathcal{S} \subsetneq CT_\mathcal{S}\mathcal{M}$ (очевидно, в этом случае $\dim\mathcal{S} < \dim CT\mathcal{M}$).

Предложение 2.3.20. *Пусть* $CT\mathcal{M}$ *– картаново распределение. Подмногообразие* $\mathcal{S}$ *гладкого многообразия* $\mathcal{M}$ *является интегральным подмногообразием распределения* $CT\mathcal{M}$ *тогда и только тогда, когда* $\dim\mathcal{S} = \dim CT\mathcal{M}$ *и определяющий идеал*

$$\mathcal{C}^\infty_\mathcal{S}(\mathcal{M}) = \big\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \;\big|\; f\big|_\mathcal{S} = 0\big\}$$

картаново замкнутый, *т.е.* $\zeta\big(\mathcal{C}^\infty_\mathcal{S}(\mathcal{M})\big) \subset \mathcal{C}^\infty_\mathcal{S}(\mathcal{M})$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться определением интегрального подмногообразия и Предложением 2.3.18. $\square$

Предложение 2.3.21. *Пусть $C\mathcal{TM}$ – картаново распределение, $\dim C\mathcal{TM} = m \in \mathbb{N}$, $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}, \partial\}$ – стандартная карта. Гладкое m-мерное подмногообразие $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ является интегральным подмногообразием распределения $C\mathcal{TM}$ тогда и только тогда, когда оно имеет локальную параметризацию*

$$\phi(\mathcal{S}) = \big\{x, u = s(x) \;\big|\; x \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m\big\},$$

где гладкие функции $s^i(x)$, $i \in \mathbb{I}$, удовлетворяют определяющим уравнениям

$$\partial_{x^\mu} s^i = A^i_\mu(x, s), \quad 1 \le \mu \le m, \quad i \in \mathbb{I}.$$

Доказательство. Прежде всего, отметим что к конечномерному подмногообразию $\mathcal{S}$ применимы все обычные правила координатных вычислений, несмотря на то, что объемлющее многообразие $\mathcal{M}$ бесконечномерное. В частности, $\mathcal{S}$ имеет локальную параметризацию

$$\begin{aligned}\phi(\mathcal{S}) &= \big\{z = Z(t) \mid t \in \mathcal{B}\big\}\\ &= \big\{x^\mu = X^\mu(t), u^i = U^i(t) \mid 1 \le \mu \le m,\ i \in \mathbb{I},\ t \in \mathcal{B}\big\},\end{aligned}$$

где $\mathcal{B}$ – область в $\mathbb{R}^m$, $X^\mu(t)$, $U^i(t)$ – гладкие функции такие, что матрица Якоби $\big\|\partial_{t^\mu} X^\nu, \partial_{t^\mu} U^i\big\|$ имеет ранг m в области $\mathcal{B}$. Далее, условие касания $T\mathcal{S} = \mathcal{CTM}|_{\mathcal{S}}$ здесь имеет вид

$$Z_*(\partial_{t^\mu}) = \sum_{1 \le \nu \le m} \partial_{t^\mu} X^\nu \cdot \partial_{x^\nu} + \sum_{i \in \mathbb{I}} \partial_{t^\mu} U^i \cdot \partial_{u^i} = \sum_{1 \le \nu \le m} R^\nu_\mu \cdot \partial_\nu$$

на подмногообразии $\mathcal{S}$ для всех $1 \le \mu \le m$, где квадратная матрица $R(t) = \big\|R^\nu_\mu(t)\big\|$ невырожденная. Приравнивая коэффициенты при ∂_{x^ν} слева и справа, находим $\partial_{t^\mu} X^\nu = R^\nu_\mu$. Таким образом, матрица Якоби $\big\|\partial_{t^\mu} X^\nu(t)\big\|$ невырожденная, и согласно теореме об обратной функции конечномерного анализа, можно взять в качестве нового локального параметра переменную $x = (x^1, \ldots, x^m)$. В этом случае,

$$\phi(\mathcal{S}) = \big\{u^i = s^i(x) \mid i \in \mathbb{I},\ x \in \mathcal{B}\big\},$$

где $\mathcal{B}$ – область в $\mathbb{R}^m$, конечно другая, $s(x) = (s^i(x) \mid i \in \mathbb{I})$ – гладкая функция. Условие касания теперь имеет вид (новая матрица $R(x)$ единичная)

$$s_*(\partial_{x^\mu}) = \partial_{x^\mu} + \sum_{i \in \mathbb{I}} \partial_{x^\mu} s^i(x) \cdot \partial_{u^i} = \partial_{x^\mu} + \sum_{i \in \mathbb{I}} A^i_\mu(x, s(x)) \cdot \partial_{u^i}.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при ∂_{u^i} слева и справа, завершаем доказательство. □

Замечание. При $m > 1$ система уравнений в частных производных $\partial_{x^\mu} s^i = A^i_\mu$ переопределена, условие ее формальной разрешимости $\partial_\mu A^i_\nu = \partial_\nu A^i_\mu$ в точности совпадает с условием инволютивности распределения $CT\mathcal{M}$.

Замечание. В конечномерной ситуации ($\dim \mathcal{M} < \infty$), согласно теореме Фробениуса (см., например, [14], Предложение 2.5.1), локальные координаты можно выбрать так, чтобы все коэффициенты $A^i_\mu = 0$. Условия касания в этом случае имеют вид $\partial_{x^\mu} s^i = 0$, так что здесь $s^i(x) = \mathrm{const}$, т.е. распределение $CT\mathcal{M}$ задает на многообразии $\mathcal{M}$ m-мерное слоение. В бесконечномерном случае это далеко не так (см., например, стр. 58).

Предложение 2.3.22. *Пусть* $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\phi} \mathbb{V}, \partial\}$ *– стандартная карта на картановом распределении* $CT\mathcal{M}$, $\dim CT\mathcal{M} = m$. *Гладкое* m*-мерное подмногообразие* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ *с параметризацией*

$$\phi(\mathcal{S}) = \big\{x, u = s(x) \bigm| x \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m\big\}$$

есть интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{M}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\partial_{x^\mu}\big(F(x,u)\big|_{u=s(x)}\big) = \big(\partial_\mu F(x,u)\big)\big|_{u=s(x)}, \quad 1 \le \mu \le m,$$

для всех $F \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{V}))$.

Доказательство. Опирается на известное правило дифференцирования сложной функции (см., например, Предложения 2.1.2, 2.1.5, 2.2.4). Предлагается провести его самостоятельно, в качестве упражнения. □

Более общее понятие, чем интегральное подмногообразие, есть интеграл. Именно, пусть $CT\mathcal{M}$ – картаново распределение. Гладкое отображение $I : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{S}$ – конечномерное гладкое многообразие, называется *интегралом распределения* $CT\mathcal{M}$, если образ касательного отображения $I_* : T\mathcal{S} \to T\mathcal{M}$ лежит в $CT\mathcal{M}$, т.е. $I_*(T_a\mathcal{S}) \subset CT_b\mathcal{M}$ для всех $a \in \mathcal{S}$, $b = I(a) \in \mathcal{M}$. Очевидно, естественное вложение $\iota : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ есть интеграл распределения $CT\mathcal{M}$ для всякого интегрального подмногообразия $\mathcal{S}$ этого распределения.

2.3.9 Отображения Ли-Беклунда

Пусть $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения, $\dim CT\mathcal{M} = m$, $\dim CT\mathcal{N} = n$. Гладкое отображение $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *отображением Ли-Беклунда*, если оно согласовано с картановыми распределениями $CT\mathcal{M}$ и $CT\mathcal{N}$, т.е. $F_*(CT_a\mathcal{M}) \subset CT_b\mathcal{N}$ для всех $a \in \mathcal{M}$, $b = \phi(a) \in \mathcal{N}$.

Таким образом, определена *категория картановых распределений*, объекты которой – картановы распределения, а морфизмы – отображения Ли-Беклунда.

При изучении локальных свойств отображений Ли-Беклунда будем пользоваться следующими обозначениями:

- $\star$ $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{K}}, \partial\}$, $\{\mathcal{V} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}}, \nabla\}$ – стандартные карты на распределениях $CT\mathcal{M}$ и $CT\mathcal{N}$, соответственно,
- $\star$ координаты $(x, u) \in \phi(\mathcal{U})$, $(y, v) \in \psi(\mathcal{V})$,
- $\star$ базисные поля
$$\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{k\in\mathbb{K}} A^k_\mu(x, u) \cdot \partial_{u^k}, \quad 1 \le \mu \le m,$$
$$\nabla_\nu = \partial_{y^\nu} + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_\nu(y, v) \cdot \partial_{v^l}, \quad 1 \le \nu \le n,$$
- $\star$ отображение $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, причем $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$,
- $\star$ в координатах, $(y, v) = (\psi \circ F \circ \phi^{-1})(x, u)$, подробнее, $y^\nu = Y^\nu(x, u)$, $v^l = V^l(x, u)$, $1 \le \nu \le n$, $l \in \mathbb{L}$.

Предложение 2.3.23. *Гладкое отображение $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ есть отображение Ли-Беклунда тогда и только тогда, когда гладкие функции $Y^\nu(x, u)$, $V^l(x, u)$, $1 \le \nu \le n$, $l \in \mathbb{L}$, удовлетворяют* определяющим уравнениям

$$\partial_\mu V^l - \sum_{1\le\nu\le n} B^l_\nu(Y, V) \cdot \partial_\mu Y^\nu = 0, \quad \textit{для всех} \quad 1 \le \mu \le m,\ l \in \mathbb{L}.$$

Доказательство. Действительно, согласно определению касательного отображения,

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_*(\partial_\mu) &= \sum_{1 \le \nu \le n} (\partial_\mu Y^\nu) \cdot \partial_{y^\nu} + \sum_{l \in \mathbb{L}} (\partial_\mu V^l) \cdot \partial_{v^l} \\
&= \sum_\nu (\partial_\mu Y^\nu) \cdot \nabla_\nu + \sum_l \left(\partial_\mu V^l - \sum_\nu B^l_\nu \cdot \partial_\mu Y^\nu \right) \cdot \partial_{v^l} \\
&= \sum_\nu R^\nu_\mu \cdot \nabla_\nu \quad \text{на} \quad \phi(\mathcal{U}),
\end{aligned}
$$

откуда $R^\nu_\mu = \partial_\mu Y^\nu$ и $\partial_\mu V^l - \sum_\nu B^l_\nu(Y, V) \cdot \partial_\mu Y^\nu = 0$, на $\phi(\mathcal{U})$ для всех $1 \le \mu \le m$, $l \in \mathbb{L}$. □

Предложение 2.3.24. *Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ – конечномерные гладкие многообразия, $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – отображение Ли-Беклунда. Пусть $\mathcal{S}$ – интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{M}$. Тогда для каждой точки $a \in \mathcal{S}$ найдутся открытое $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$, $a \in \mathcal{U}$, и интегральное подмногообразие $\mathcal{T}$ распределения $CT\mathcal{N}$ такие, что $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{T}$ (коротко, локально интегральное подмногообразие отображается в интегральное подмногообразие).*

Доказательство. Прежде всего заметим, что утверждение носит локальный характер, его можно доказывать в координатах. Далее, в конечномерном случае, согласно теореме Фробениуса существует атлас из расслаивающих карт (см. замечание на стр. 159), так что в введенных выше обозначениях считаем $A^k_\mu = 0$, $B^l_\nu = 0$. В этом случае определяющие уравнения (см. Предложение 2.3.21) для подмногообразия $\mathcal{S}$ имеют вид $\partial_{x^\mu} s^k = 0$, т.е. $s = \text{const}$ (в расслаивающей карте интегральные подмногообразия – горизонтальные слои). В свою очередь, уравнения для функций $Y^\nu(x, u)$, $V^l(x, u)$ (см. Предложение 2.3.23) имеют вид $\partial_{x^\mu} V^l = 0$, так что здесь $V^l = V^l(u)$ для всех $l \in \mathbb{L}$, и значит образ

$$
\psi\big(F(\mathcal{S})\big) = \big\{ y^\nu = Y^\nu(x, s), v^l = V^l(s) \mid 1 \le \nu \le n,\ l \in \mathbb{L} \big\} \subset \psi(\mathcal{T}),
$$

где $\mathcal{T}$ – интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{N}$ с локальной параметризацией $\psi(\mathcal{T}) = \big\{ v^l = V^l(s) = \text{const} \mid l \in \mathbb{L} \big\}$ □

В общем случае справедливо следующее

Предложение 2.3.25. *Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ – произвольные гладкие многообразия, $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения на них, и пусть $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – отображение Ли-Беклунда. Тогда для каждого интегрального подмногообразия $\mathcal{S}$ распределения $CT\mathcal{M}$ гладкое отображение $I = F|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{N}$ есть интеграл распределения $CT\mathcal{N}$.*

Доказательство. Следует лишь внимательно прочитать соответствующие определения. □

Очевидно, если $F : \mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ – изоморфизм Ли-Беклунда, то образ $F(\mathcal{S})$ всякого интегрального подмногообразия $\mathcal{S}$ распределения $CT\mathcal{M}$ есть интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{N}$. Приведем более интересный и важный в приложениях случай, когда это свойство сохраняется, по крайней мере, локально.

Пусть $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения. Гладкое отображение $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *накрытием*, если для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ имеет место изоморфизм $F_* : CT_a\mathcal{M} \simeq CT_b\mathcal{N}$, где $b = F(a) \in \mathcal{N}$. Очевидно, в этом случае F есть отображение Ли-Беклунда, причем $\dim CT\mathcal{M} = \dim CT\mathcal{N}$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\dim CT\mathcal{M} = \dim CT\mathcal{N} = m$. Отображение Ли-Беклунда $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ является накрытием тогда и только тогда, когда локально $m \times m$-матрица $\big\|\partial_{x^\mu} Y^\nu(x,u)\big\|$ невырожденная для всех $(x,u) \in \phi(\mathcal{U})$.*

Доказательство. Действительно (см. доказательство Предложения 2.3.23), здесь $\big\|\partial_\mu Y^\nu(x,u)\big\| = \big\|R^\nu_\mu(x,u)\big\|$ – невырожденная матрица, согласно определению накрытия. □

Предложение 2.3.26. *Пусть $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – накрытие. Тогда локально образ $F(\mathcal{S})$ всякого интегрального подмногообразия $\mathcal{S}$ распределения $CT\mathcal{M}$ есть интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{N}$ (другими словами, образ всякого интегрального подмногообразия есть погруженное интегральное подмногообразие).*

Доказательство. Поскольку утверждение носит локальный характер (см. определение накрытия), его можно доказывать в координатах. Пусть интегральное подмногообразие $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ имеет локальную параметризацию $\phi(\mathcal{S}) = \big\{x, u = s(x) \mid x \in \mathcal{O}\big\}$, тогда его образ $F(\mathcal{S})$ будет иметь локальную параметризацию

$$\psi\big(F(\mathcal{S})\big) = \big\{y^\nu = Y^\nu(x,s(x)), v^l = V^l(x,s(x)) \;\big|\; 1 \le \nu \le m,\ l \in \mathbb{L}\big\}.$$

Матрица $\|\partial_{x^\mu} Y^\nu(x, s(x))\| = \|\partial_\mu Y^\nu(x,u)\|_{u=s(x)}$ невырожденная, в силу Леммы 2.3.1, и следовательно, согласно теореме об обратной функции конечномерного анализа, имеется локальное обращение $x^\mu = X^\mu(y)$, $1 \le \mu \le m$. После подстановки, получаем локальную параметризацию $\psi\big(F(\mathcal{S})\big) = \big\{v^l = \sigma^l(y) \mid l \in \mathbb{L}\big\}$, где $\sigma^l(y) = V^l(x, s(x))\big|_{x=X(y)}$, $l \in \mathbb{L}$. Проверку выполнения определяющих уравнений из Предложения 2.3.21 предлагается проделать самостоятельно, в качестве полезного упражнения по правилам дифференцирования сложной и обратной функций. □

В приложениях важную роль играют следующие два вида отображений Ли-Беклунда.

Пусть $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения. Иммерсия $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (см. стр. 135) называется *иммерсией Ли-Беклунда*, если она согласована с распределениями $CT\mathcal{M}$ и $CT\mathcal{N}$, т.е. если $F_*(CT_a\mathcal{M}) = CT_b\mathcal{N} \cap F_*(T_a\mathcal{M})$ для всех $a \in \mathcal{M}$, $b = F(a) \in \mathcal{N}$.

Предложение 2.3.27. *Пусть $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения, $\dim CT\mathcal{M} = m$, $\dim CT\mathcal{N} = m+n$, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – иммерсия Ли-Беклунда. Тогда для каждой точки $a \in \mathcal{M}$ существуют стандартные карты $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}, \partial\}$ на $CT\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{U}$, и $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U} \times \mathbb{V}, \nabla\}$ на $CT\mathcal{N}$, $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$, такие что*

- ⋆ $\psi \circ F \circ \phi^{-1} = \iota\big|_{\phi(\mathcal{U})}$,
- ⋆ $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{K}} = \{(x,u) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}}\}$,
- ⋆ $\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{k\in\mathbb{K}} a^k_\mu \cdot \partial_{u^k}, \quad 1 \le \mu \le m$,
- ⋆ $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}} = \{(y,v) \mid y \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^{\mathbb{L}}\}$,
- ⋆ $\nabla_\mu = \partial_\mu + \sum_{k\in\mathbb{K}} A^k_\mu \cdot \partial_{u^k} + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_\mu \cdot \partial_{v^l}$, $1 \le \mu \le m$,
- ⋆ $\nabla_{m+\nu} = \partial_{y^\nu} + \sum_{k\in\mathbb{K}} A^k_{m+\nu} \cdot \partial_{u^k} + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_{m+\nu} \cdot \partial_{v^l}$, $1 \le \nu \le n$,
- ⋆ $a^k_\mu \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{U}))$, $A^k_\lambda, B^l_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\psi(\mathcal{W}))$,
- ⋆ $A^k_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = B^l_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = 0$, $\nabla_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = \partial_\mu$, $1 \le \mu \le m$,
- ⋆ *функции $a^k_\mu, A^k_\lambda, B^l_\lambda$ удовлетворяют определяющим уравнениям* (см., определение стандартной карты на стр. 155).

Доказательство. Пусть точка $a \in \mathcal{M}$. По определению иммерсии, существуют карты $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}\}$ на $\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{U}$, и $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U}\times\mathbb{V}\}$ на $\mathcal{N}$, $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$, такие что $\psi \circ F \circ \phi^{-1} = \iota\big|_{\phi(\mathcal{U})}$. Повторив доказательство Предложения 2.3.19, приведем карту $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}\}$ к требуемому стандартному виду $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}, \partial\}$ на $CT\mathcal{M}$,

- ⋆ $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{K}} = \{(x,u) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}}\}$,
- ⋆ $\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{k\in\mathbb{K}} a^k_\mu \cdot \partial_{u^k}, \quad 1 \le \mu \le m,\ a^k_\mu \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{U}))$.

Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{I}} = \{z = (z^i) \mid i \in \mathbb{I}\}$, и картаново распределение $CT\mathcal{N}$ на $\psi(\mathcal{W})$ задается базисными полями

$$\zeta_\lambda = \sum_{1\le\mu\le m} \chi^\mu_\lambda \cdot \partial_\mu + \sum_{k\in\mathbb{K}} \xi^k_\lambda \cdot \partial_{u^k} + \sum_{i\in\mathbb{I}} \eta^i_\lambda \cdot \partial_{z^i}, \quad 1 \le \lambda \le m+n,$$

где компоненты $\chi^\mu_\lambda, \xi^k_\lambda, \eta^i_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\psi(\mathcal{W}))$. Модифицировав должным образом доказательство Предложения 2.3.19, можно показать, что здесь $(m+n)\times m$-матрица $\left\|\chi^\mu_\lambda\right\|$ имеет левую обратную $m \times (m+n)$-матрицу $\left\|s^\lambda_\mu\right\|$ (возможно, при этом придется уменьшить области определения карт). Это позволяет изменить базис, введя новые базисные поля

$$\widetilde{\zeta}_\mu = \sum_{1\le\lambda\le m+n} s^\lambda_\mu \cdot \zeta_\lambda = \partial_\mu + \sum_{k\in\mathbb{K}} \widetilde{\xi}^k_\mu \cdot \partial_{u^k} + \sum_{i\in\mathbb{I}} \widetilde{\eta}^i_\mu \cdot \partial_{z^i}, \quad 1 \le \mu \le m,$$

вместо $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ (возможно, после перенумерации). Условие согласования $F_*(CT_a\mathcal{M}) = CT_b\mathcal{N} \cap F_*(T_a\mathcal{M})$ для всех $a \in \mathcal{M}$ дает $\widetilde{\zeta}_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = \partial_\mu$, так что $\widetilde{\xi}^k_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = 0$, $\widetilde{\eta}^i_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = 0$. В свою очередь, вместо оставшихся полей $\zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_{m+n}$, введем поля

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta}_{m+\nu} &= \zeta_{m+\nu} - \sum_{1\le\mu\le m} \chi^\mu_{m+\nu} \cdot \widetilde{\zeta}_\mu \\ &= \sum_{k\in\mathbb{K}} \widetilde{\xi}^k_{m+\nu} \cdot \partial_{u^k} + \sum_{i\in\mathbb{I}} \widetilde{\eta}^i_{m+\nu} \cdot \partial_{z^i}, \quad 1 \le \nu \le n.\end{aligned}$$

Из условия согласования $F_*(CT_a\mathcal{M}) = CT_b\mathcal{N} \cap F_*(T_a\mathcal{M})$ для всех $a \in \mathcal{M}$ следует, что $\operatorname{rank}\left\|\widetilde{\eta}^i_{m+\nu}\right\| = n$ на $\psi(\mathcal{W})$, и значит найдутся индексы $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ такие, что $n \times n$-матрица $\left\|\widetilde{\eta}^{i_\nu}_\lambda\right\|$ имеет обратную матрицу $\left\|r_\nu^\lambda\right\|$ (здесь $1 \le \nu \le n$, $m < \lambda \le m+n$, возможно придется снова уменьшить области определения карт). Опять вводим новые базисные поля

$$\begin{aligned}\nabla_{m+\nu} &= \sum_{m<\lambda\le m+n} r_\nu^\lambda \cdot \widetilde{\zeta}_\lambda \\ &= \sum_{k\in\mathbb{K}} A^k_{m+\nu}\cdot\partial_{u^k} + \partial_{y^\nu} + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_{m+\nu}\cdot\partial_{v^l}, \quad 1\le\nu\le n,\end{aligned}$$

где $y^\nu = z^{i_\nu}$, $1 \le \nu \le n$, $v^l = z^l$, $l \in \mathbb{L} = \mathbb{I}\backslash\{i_1,\ldots,i_n\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$, $A^k_{m+\nu}, B^l_{n+\nu} \in \mathcal{C}^\infty(\psi(\mathcal{W}))$. Положив,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu &= \widetilde{\zeta}_\mu - \sum_{1\le\nu\le n} \widetilde{\eta}_\mu^{i_\nu}\cdot\nabla_{m+\nu} \\ &= \partial_\mu + \sum_{k\in\mathbb{K}} A^k_\mu\cdot\partial_{u^k} + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_\mu\cdot\partial_{v^l}, \quad 1\le\mu\le m,\end{aligned}$$

где $A^k_\mu, B^l_\mu \in \mathcal{C}^\infty(\psi(\mathcal{W}))$, $A^k_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = B^l_\mu\big|_{\psi(F(\mathcal{U}))} = 0$, $1 \le \mu \le m$, завершим доказательство. □

Предложение 2.3.28. *Пусть $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения,* $\dim CT\mathcal{M} = m$, $\dim CT\mathcal{N} = m+n$, *$F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – иммерсия Ли-Беклунда. Тогда локально образ $F(\mathcal{S})$ каждого интегрального подмногообразия $\mathcal{S}$ распределения $CT\mathcal{M}$ есть m-мерное подмногообразие многообразия $\mathcal{N}$, причем $T_bF(\mathcal{S}) \subset CT_b\mathcal{N}$ для всех $b = F(a)$, $a \in \mathcal{S}$. Другими словами, $F(\mathcal{S})$ есть* погруженное интегральное подмногообразие (неполной размерности при $n > 0$) *распределения $CT\mathcal{N}$.*

Доказательство. В силу локальности утверждения, его можно доказывать в координатах. Пусть, в введенных выше обозначениях, интегральное подмногообразие $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ имеет локальную параметризацию

$$\phi(\mathcal{S}) = \big\{x, u = s(x) \;\big|\; x \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m\big\},$$

где гладкие функции $s(x)$ удовлетворяют определяющим уравнениям $\partial_{x^\mu} s^k = a^k_\mu(x,s)$, $1 \le \mu \le m$, $k \in \mathbb{K}$ (см. Предложение 2.3.21). Тогда локальный образ $F(\mathcal{S})$ имеет параметризацию

$$\psi(F(\mathcal{S})) = \iota(\phi(\mathcal{S})) = \big\{x, u = s(x), y = 0, v = 0 \;\big|\; x \in \mathcal{O}\big\}.$$

По построению, для каждой точки $a \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}$, $\phi(a) = (x, s(x))$, касательное пространство $T_a\mathcal{S}$ задается базисными векторами $\partial_\mu|_{\phi(a)}$, $1 \le \mu \le m$, а касательное пространство $T_bF(\mathcal{S})$, $b = F(a) \in F(\mathcal{S})$, $\psi(b) = \iota(\phi(a))$, задается базисными векторами

$$\iota_*\big(\partial_\mu\big|_{\phi(a)}\big) = \nabla_\mu\big|_{\psi(b)}, \quad 1 \le \mu \le m.$$

В частности, $T_bF(\mathcal{S}) \subset CT_b\mathcal{M}$ для всех $b \in F(\mathcal{S})$, что и утверждается. $\square$

Пусть $CT\mathcal{M}$, $CT\mathcal{N}$ – картановы распределения. Субмерсия $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ (см. стр. 135) называется *субмерсией Ли-Беклунда*, если она согласована с распределениями $CT\mathcal{M}$ и $CT\mathcal{N}$, т.е. если $F_*(CT_b\mathcal{N}) = CT_a\mathcal{M}$ для всех $b \in \mathcal{N}$, $a = F(b) \in \mathcal{M}$.

Предложение 2.3.29. *Пусть $CT\mathcal{N}$, $CT\mathcal{M}$ – картановы распределения,* $\dim CT\mathcal{N} = m + n$, $\dim CT\mathcal{M} = m$, $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *– субмерсия Ли-Беклунда. Тогда для каждой точки $b \in \mathcal{N}$ имеются стандартные карты $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U} \times \mathbb{V}, \nabla\}$ на $CT\mathcal{N}$, $b \in \mathcal{W}$, и $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}, \partial\}$ на $CT\mathcal{M}$, $F(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$, такие что*

- $\star$ $\phi \circ F \circ \psi^{-1} = \pi\big|_{\psi(\mathcal{W})}$,
- $\star$ $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{K}} = \{(x, u) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}}\}$,
- $\star$ $\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{k\in\mathbb{K}} a^k_\mu \cdot \partial_{u^k}, \quad 1 \le \mu \le m$,
- $\star$ $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}} = \{(y, v) \mid y \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^{\mathbb{L}}\}$,
- $\star$ $\nabla_\mu = \partial_\mu + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_\mu \cdot \partial_{v^l}, \quad 1 \le \mu \le m$,
- $\star$ $\nabla_{m+\nu} = \partial_{y^\nu} + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_{m+\nu} \cdot \partial_{v^l}, \quad 1 \le \nu \le n$,
- $\star$ $a^k_\mu \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{U}))$, $B^l_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\psi(\mathcal{W}))$,
- $\star$ *функции a^k_μ, B^l_λ удовлетворяют определяющим уравнениям* (см., определение стандартной карты на стр. 155).

Доказательство. Пусть точка $b \in \mathcal{N}$. По определению субмерсии, существуют карты $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U}\times\mathbb{V}\}$ на $\mathcal{N}$, $b \in \mathcal{W}$, и $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}\}$ на $\mathcal{M}$, $F(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$, такие что $\phi \circ F \circ \psi^{-1} = \pi\big|_{\psi(\mathcal{W})}$. Повторив доказательство Предложения 2.3.19, приведем карту $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}\}$ к требуемому стандартному виду $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}, \partial\}$ на $CT\mathcal{M}$,

* $\star$ $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{K}} = \{(x, u) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{K}}\}$,
* $\star$ $\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{k \in \mathbb{K}} a^k_\mu \cdot \partial_{u^k}, \quad 1 \le \mu \le m,\ a^k_\mu \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{U}))$.

Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{I}} = \{z = (z^i) \mid i \in \mathbb{I}\}$, и картаново распределение $CT\mathcal{N}$ на $\psi(\mathcal{W})$ задается базисными полями

$$\zeta_\lambda = \sum_{1 \le \mu \le m} \chi^\mu_\lambda \cdot \partial_\mu + \sum_{k \in \mathbb{K}} \xi^k_\lambda \cdot \partial_{u^k} + \sum_{i \in \mathbb{I}} \eta^i_\lambda \cdot \partial_{z^i}, \quad 1 \le \lambda \le m + n,$$

где компоненты $\chi^\mu_\lambda, \xi^k_\lambda, \eta^i_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\psi(\mathcal{W}))$. Согласно определению отображения Ли-Беклунда,

$$\begin{aligned} \pi_*(\zeta_\lambda) &= \sum_{1 \le \mu \le m} \chi^\mu_\lambda \cdot \partial_\mu + \sum_{k \in \mathbb{K}} \xi^k_\lambda \cdot \partial_{u^k} \\ &= \sum_{1 \le \mu \le m} \chi^\mu_\lambda \cdot \partial_\mu, \quad 1 \le \lambda \le m + n, \end{aligned}$$

в частности, $\xi^k_\lambda = 0$ для всех $k \in \mathbb{K}$, $1 \le \lambda \le m + n$. Более того, из условия согласования $F_*(CT_b\mathcal{N}) = CT_a\mathcal{M}$ для всех $b \in \mathcal{N}$, $a = F(b) \in \mathcal{M}$, следует, что найдутся индексы $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (после перенумерации, $1 \le \lambda \le m$) такие, что $m \times m$-матрица $\left\|\chi^\mu_\lambda\right\|$, $1 \le \lambda, \mu \le m$, имеет обратную $\left\|s^\lambda_\mu\right\|$ (возможно, после уменьшения области $\mathcal{W}$). Это позволяет ввести поля

$$\widetilde{\zeta}_\mu = \sum_{1 \le \lambda \le m} s^\lambda_\mu \cdot \zeta_\lambda = \partial_\mu + \sum_{i \in \mathbb{I}} \widetilde{\eta}^i_\mu \cdot \partial_{z^i}, \quad 1 \le \mu \le m,$$

и получить новый базис $\widetilde{\zeta}_1, \dots, \widetilde{\zeta}_m, \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_{m+n}$. Далее, поля

$$\zeta_{m+\nu} = \sum_{1 \le \mu \le m} \chi^\mu_{m+\nu} \cdot \partial_\mu + \sum_{i \in \mathbb{I}} \eta^i_{m+\nu} \cdot \partial_{z^i}, \quad 1 \le \nu \le n,$$

заменим на поля

$$\widetilde{\zeta}_{m+\nu} = \zeta_{m+\nu} - \sum_{1 \le \mu \le m} \chi^\mu_{m+\nu} \cdot \widetilde{\zeta}_\mu = \sum_{i \in \mathbb{I}} \widetilde{\eta}^i_{m+\nu} \cdot \partial_{z^i}, \quad 1 \le \nu \le n.$$

Теперь, повторив доказательство Предложения 2.3.19, приведем поля $\widetilde{\zeta}_{m+\nu}$ к требуемому стандартному виду

$$\nabla_{m+\nu} = \partial_{y^\nu} + \sum_{l \in \mathbb{L}} B^l_{m+\nu} \cdot \partial_{v^l}, \quad 1 \le \nu \le n.$$

Для завершения доказательства осталось положить

$$\nabla_\mu = \widetilde{\zeta}_\mu - \sum_{1\le\nu\le n} \widetilde{\eta}_\mu^{i_\nu} \cdot \nabla_{m+\nu} = \partial_\mu + \sum_{l\in\mathbb{L}} B_\mu^l \cdot \partial_{v^l}, \quad 1 \le \mu \le m,$$

и проверить, что построенные таким образом карты обладают всеми заявленными свойствами. $\square$

Предложение 2.3.30. *Пусть $CT\mathcal{N}$, $CT\mathcal{M}$ – картановы распределения, $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ – субмерсия Ли-Беклунда, S – интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{N}$. Тогда, локально, образ $F(S)$ – интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{M}$ (другими словами, образ $F(S)$ – погруженное интегральное подмногообразие).*

Доказательство. Ввиду локальности утверждения, его можно доказывать в координатах. Именно, пусть $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U}\times\mathbb{V}, \nabla\}$ и $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}, \partial\}$ – карты на $CT\mathcal{N}$ и $CT\mathcal{M}$, соответственно, из Предложения 2.3.29, причем $S \subset \mathcal{W}$. Согласно Предложению 2.3.21, подмногообразие S имеет локальную параметризацию

$$\psi(S) = \big\{x, y, u^k = s^k(x,y), v^l = t^l(x,y) \mid k \in \mathbb{K},\ l \in \mathbb{L}\big\},$$

где гладкие функции s^k, t^l удовлетворяют определяющим уравнениям

$$\begin{cases} \partial_{x^\mu} s^k(x,y) = a_\mu^k(x,s), \\ \partial_{y^\nu} s^k(x,y) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_{x^\mu} t^l(x,y) = B_\mu^l(x,y,s,t), \\ \partial_{y^\nu} t^l(x,y) = B_{m+\nu}^l(x,y,s,t), \end{cases}$$

для всех $k \in \mathbb{K}$, $l \in \mathbb{L}$, $1 \le \mu \le m$, $1 \le \nu \le n$. В частности, $s^k = s^k(x)$. Более того, образ

$$\phi(F(S)) = \pi(\psi(S)) = \big\{x, u^k = s^k(x) \mid k \in \mathbb{K}\big\},$$

причем гладкие функции s^k удовлетворяют определяющим уравнениям $\partial_{x^\mu} s^k(x) = a_\mu^k(x,s)$ для всех $k \in \mathbb{K}$, $1 \le \mu \le m$, что и требуется доказать. $\square$

2.3.10 Картановы подраспределения

Картаново распределение $CT\mathcal{R}$ называется *(картановым) подраспределением* картанова распределения $CT\mathcal{M}$, если $\mathcal{R}$ – подмногообразие гладкого многообразия $\mathcal{M}$, а естественное вложение $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ – иммерсия Ли-Беклунда, т.е. $CT_a\mathcal{R} = CT_a\mathcal{M} \cap T_a\mathcal{R}$

для всех $a \in \mathcal{R}$ (короче, $CT\mathcal{R} = CT_{\mathcal{R}}\mathcal{M} \cap T\mathcal{R}$). В этом случае каждое интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{R}$ одновременно является интегральным подмногообразием (неполной размерности при $\dim CT\mathcal{R} < \dim CT\mathcal{M}$) распределения $CT\mathcal{M}$ (см. Предложение 2.3.28).

Картаново подраспределение $CT\mathcal{R}$ называется *редукцией* картанова распределения $CT\mathcal{M}$, если $\dim CT\mathcal{R} = \dim CT\mathcal{M}$, т.е. $CT_a\mathcal{R} = CT_a\mathcal{M}$ для всех $a \in \mathcal{R}$ (короче, $CT\mathcal{R} = CT_{\mathcal{R}}\mathcal{M}$). В этом случае каждое интегральное подмногообразие S распределения $CT\mathcal{R}$ есть также интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{M}$, и обратно, если S – интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{M}$ и $S \subset \mathcal{R}$, то S – также интегральное подмногообразие распределения $CT\mathcal{R}$.

Пусть $CT\mathcal{M}$ – картаново распределение, и $\mathcal{R}$ – подмногообразие гладкого многообразия $\mathcal{M}$. Положим $CT\mathcal{R} = \cup_{a\in\mathcal{R}} CT_a\mathcal{R}$, где $CT_a\mathcal{R} = CT_a\mathcal{M} \cap T_a\mathcal{R} \subset T_a\mathcal{M}$. Очевидно, множество $CT\mathcal{R}$ будет картановым распределением на $\mathcal{R}$ и картановым подраспределением картанова распределения $CT\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $\dim CT_a\mathcal{R} = m = \dim CT\mathcal{R}$ для всех $a \in \mathcal{R}$ (число $m \in \mathbb{Z}_+$ не зависит от точки a), и подрасслоение $CT\mathcal{R} \subset T\mathcal{R}$ инволютивное (т.е. $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{R})$-модуль $\mathcal{CT}(\mathcal{R})$ всех гладких сечений подрасслоения $CT\mathcal{R}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ всех касательных полей на многообразии $\mathcal{R}$).

Предложение 2.3.31. *Пусть $CT\mathcal{M}$ – картаново распределение, $\mathcal{R}$ – подмногообразие многообразия $\mathcal{M}$. Сужение $CT\mathcal{R} = CT_{\mathcal{R}}\mathcal{M}$ будет редукцией картанова распределения $CT\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда определяющий идеал*

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \;\middle|\; f\big|_{\mathcal{R}} = 0 \right\}$$

картаново замкнутый, *т.е.* $\zeta\big(\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})\big) \subset \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ *для каждого картанова поля* $\zeta \in \mathcal{CT}(\mathcal{M})$.

Доказательство. Следует воспользоваться Предложением 2.3.18 и внимательно прочитать соответствующие определения. □

Предложение 2.3.32. *Пусть $CT\mathcal{R}$ – подраспределение картанова распределения $CT\mathcal{M}$, $\dim CT\mathcal{R} = m$, $\dim CT\mathcal{M} = m + n$. Тогда для каждой точки $a \in \mathcal{R}$ существует стандартная карта $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U} \times \mathbb{V}, \nabla\}$ на $CT\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{U} = \mathcal{R} \cap \mathcal{W}$, такая что*

* $\mathbb{U} = \{(x, u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{K}}\}$, $\mathbb{V} = \{(y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\mathbb{L}}\}$,

* $\nabla_\mu = \partial_\mu + \sum_{k \in \mathbb{K}} A^k_\mu \cdot \partial_{u^k} + \sum_{l \in \mathbb{L}} B^l_\mu \cdot \partial_{v^l}$, $1 \le \mu \le m$, *где* $\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{k \in \mathbb{K}} a^k_\mu \cdot \partial_{u^k}$,

* $\nabla_{m+\nu} = \partial_{y^\nu} + \sum_{k \in \mathbb{K}} A^k_{m+\nu} \cdot \partial_{u^k} + \sum_{l \in \mathbb{L}} B^l_{m+\nu} \cdot \partial_{v^l}$, $1 \le \nu \le n$,

* *функции* $a^k_\mu(x, u)$, $A^k_\lambda(x, u, y, v)$, $B^l_\lambda(x, u, y, v)$ *удовлетворяют определяющим уравнениям* (см., определение стандартной карты на стр. 155), *где* $A^k_\mu\big|_{\psi(\mathcal{U})}(x, u) = A^k_\mu(x, u, 0, 0) = 0$, $B^l_\mu\big|_{\psi(\mathcal{U})}(x, u) = B^l_\mu(x, u, 0, 0) = 0$, *так что* $\partial_\mu = \nabla_\mu\big|_{\psi(\mathcal{U})}$, *для всех* $1 \le \mu \le m$,

* *пара* $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}, \partial\}$ *есть стандартная карта на распределении* $CT\mathcal{R}$, *где* $\phi = \pi \circ \psi\big|_{\mathcal{U}}$, $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_m)$.

Доказательство. Следует из Предложения 2.3.27, где F – естественное вложение $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$. Напомним, что $\iota : \mathbb{U} \to \mathbb{U} \times \mathbb{V}$ – каноническая инъекция, а $\pi : \mathbb{U} \times \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ – каноническая проекция. $\square$

Следствие 2.3.8. *Пусть* $CT\mathcal{R}$ *– редукция картанова распределения* $CT\mathcal{M}$, $\dim CT\mathcal{R} = \dim CT\mathcal{M} = m$. *Тогда для каждой точки* $a \in \mathcal{R}$ *существует стандартная карта* $\{\mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{U} \times \mathbb{V}, \nabla\}$ *на* $CT\mathcal{M}$, $a \in \mathcal{U} = \mathcal{R} \cap \mathcal{W}$, *такая что*

* $\mathbb{U} = \{(x, u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{K}}\}$, $\mathbb{V} = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{L}}\}$,

* $\nabla_\mu = \partial_\mu + \sum_{k \in \mathbb{K}} A^k_\mu \cdot \partial_{u^k} + \sum_{l \in \mathbb{L}} B^l_\mu \cdot \partial_{v^l}$, $1 \le \mu \le m$, *где* $\partial_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{k \in \mathbb{K}} a^k_\mu \cdot \partial_{u^k}$,

* *гладкие функции* $a^k_\mu(x, u)$, $A^k_\mu(x, u, v)$, $B^l_\mu(x, u, v)$ *удовлетворяют определяющим уравнениям* (см., определение стандартной карты на стр. 155), $A^k_\mu\big|_{\psi(\mathcal{U})}(x, u) = A^k_\mu(x, u, 0) = 0$, $B^l_\mu\big|_{\psi(\mathcal{U})}(x, u) = B^l_\mu(x, u, 0) = 0$, *так что* $\partial_\mu = \nabla_\mu\big|_{\psi(\mathcal{U})}$, *для всех* $1 \le \mu \le m$,

* *пара* $\{\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathbb{U}, \partial\}$ *есть стандартная карта на распределении* $CT\mathcal{R}$, *где* $\phi = \pi \circ \psi\big|_{\mathcal{U}}$, $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_m)$.

Предложение 2.3.33. *Пусть $CT\mathcal{R}$ – подраспределение, а $\mathcal{S}$ – интегральное подмногообразие картанова распределения $CT\mathcal{M}$. Тогда пересечение $\mathcal{S}\cap\mathcal{R}$ (если оно не пусто) есть интегральное подмногообразие картанова распределения $CT\mathcal{R}$.*

Доказательство. Ввиду локальности утверждения его можно доказывать в координатах. В обозначениях Предложения 2.3.32 подмногообразие $\mathcal{S}$ имеет локальную параметризацию

$$\psi\big(\mathcal{S}\cap\mathcal{W}\big)=\big\{x,u=s(x,y),y,v=t(x,y)\;\big|\;(x,y)\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\big\},$$

где гладкие функции $s^k(x,y)$, $t^l(x,y)$ удовлетворяют определяющим уравнениям (см. Предложение 2.3.21)

$$\begin{cases}\partial_{x^\mu}s^k=a^k_\mu(x,s)+A^k_\mu(x,s,y,t),\\ \partial_{y^\nu}s^k=A^k_{m+\nu}(x,s,y,t),\end{cases}\qquad\begin{cases}\partial_{x^\mu}t^l=B^l_\mu(x,s,y,t),\\ \partial_{y^\nu}t^l=B^l_{m+\nu}(x,s,y,t).\end{cases}$$

Пересечение $\mathcal{S}\cap\mathcal{R}$ имеет, соответственно, локальную параметризацию

$$\psi\big(\mathcal{S}\cap\mathcal{R}\big)=\big\{x,u=s(x,0),0,v=0)\;\big|\;x\in\widetilde{\mathcal{O}}\subset\mathbb{R}^m\big\},$$

необходимая нам часть сужений на $\mathcal{R}$ определяющих уравнений есть

$$\partial_{x^\mu}\widetilde{s}^k=a^k_\mu(x,\widetilde{s}),\quad \partial_{x^\mu}t^l(x,0)=0,$$

где $\widetilde{s}^k(x)=s^k(x,0)$. В частности, $t(x,0)=c=\mathrm{const}$, причем условие $\mathcal{S}\cap\mathcal{R}\neq\varnothing$ означает, что $c=0$. Итак, $\mathcal{S}\cap\mathcal{R}$ имеет нужную локальную параметризацию $\phi(\mathcal{S}\cap\mathcal{R})=\{x,u=\widetilde{s}(x)\mid x\in\widetilde{\mathcal{O}}\}$, где гладкие функции $\widetilde{s}^k(x)$ удовлетворяют соответствующим определяющим уравнениям (см. Предложение 2.3.21), что и требуется доказать. □

Предложение 2.3.34. *Пусть $CT\mathcal{N}$, $CT\mathcal{M}$ – картановы распределения, $F:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ – субмерсия Ли-Беклунда, точка $a\in\mathcal{M}$, прообраз $\mathcal{R}=F^{-1}(a)\neq\varnothing$. Тогда,*

- ⋆ *$\mathcal{R}$ – подмногообразие гладкого многообразия $\mathcal{N}$,*
- ⋆ *на $\mathcal{R}$ определена структура картанова распределения $CT\mathcal{R}=T\mathcal{R}\cap CT_{\mathcal{R}}\mathcal{N}$, $\dim CT\mathcal{R}=\dim CT\mathcal{N}-\dim CT\mathcal{M}$,*
- ⋆ *$CT\mathcal{R}$ – подраспределение картанова распределения $CT\mathcal{N}$.*

Доказательство. Первое утверждение доказано выше (см. Предложение 2.3.7). Для каждой точки $b \in \mathcal{R}$, по определению, имеем $F_*|_{T_b\mathcal{N}} : T_b\mathcal{N} \to T_a\mathcal{M}$, и как легко проверить (например, в локальных координатах),

$$T_b\mathcal{R} = \ker\left(F_*|_{T_b\mathcal{N}}\right) = \left\{\zeta \in T_b\mathcal{N} \;\middle|\; F_*(\zeta) = 0\right\},$$

другими словами, $T\mathcal{R} = \ker\left(F_*|_{T_\mathcal{R}\mathcal{N}}\right)$ – послойное ядро суженного касательного отображения $F_*|_{T_\mathcal{R}\mathcal{N}}$. Для каждой точки $b \in \mathcal{R}$ положим

$$CT_b\mathcal{R} = T_b\mathcal{R} \cap CT_b\mathcal{N} = \left\{\zeta \in CT_b\mathcal{N} \;\middle|\; F_*(\zeta) = 0\right\},$$

где $\dim CT_b\mathcal{R} = \dim CT_b\mathcal{N} - \dim CT_a\mathcal{M} = n$, согласно определению субмерсии Ли-Беклунда. Следовательно, определено n-мерное подрасслоение $CT\mathcal{R} = \cup_{b\in\mathcal{R}} CT_b\mathcal{R}$ касательного расслоения $T\mathcal{R}$. Легко проверяется (например, в локальных координатах), что это подрасслоение инволютивное. Более того, в стандартных картах из Предложения 2.3.29 локальный базис подрасслоения $\mathcal{W} \cap CT\mathcal{R}$ образуют суженные картановы поля

$$\overline{\nabla}_\nu = \nabla_{m+\nu}\big|_{\psi(\mathcal{R}\cap\mathcal{W})} = \partial_{y^\nu} + \sum_{l\in\mathbb{L}} B^l_{m+\nu}\big|_{\psi(\mathcal{R}\cap\mathcal{W})} \cdot \partial_{v^l}, \quad 1 \le \nu \le n.$$

Таким образом, $CT\mathcal{R}$ – картаново распределение. По построению, оно является подраспределением картанова распределения $CT\mathcal{N}$. $\square$

Предложение 2.3.35. *Пусть $CT\mathcal{N}$, $CT\mathcal{M}$ – картановы распределения, $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ – субмерсия Ли-Беклунда, $\mathcal{S}$ – интегральное подмногообразие картанова распределения $CT\mathcal{M}$, прообраз $\mathcal{R} = F^{-1}(\mathcal{S}) \neq \varnothing$. Тогда,*

- ⋆ *$\mathcal{R}$ – подмногообразие гладкого многообразия $\mathcal{N}$,*
- ⋆ *на $\mathcal{R}$ определена структура картанова распределения $CT\mathcal{R} = CT_\mathcal{R}\mathcal{N}$, $\dim CT\mathcal{R} = \dim CT\mathcal{N}$,*
- ⋆ *$CT\mathcal{R}$ – редукция картанова распределения $CT\mathcal{N}$.*

Литература

[1] I.M. Anderson, The variational bicomplex, Dept. Math., Utah State University: Logan, Utah, November 2004, 318 pages; http://www.math.usu.edu/ fg_mp/Publications/VB/vb.pdf.

[2] Isham C.J., Modern Differential Geometry for Physicists. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, World Scientific, 1999.

[3] Madore J., An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications. Cambridge, University Press, 1995.

[4] Tsujishita T., On variation bicomplexes associated tj differential equations, Osaka J. Math.(1982), vol. 19, pp. 311-363.

[5] Vermani L.R., An elementary approach to homological algebra. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[6] Zharinov V.V., Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, World Scientific, 1992.

[7] Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. Москва, Мир, 1975.

[8] Виноградов А.М. и Красильщик И.С. (редакторы), Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Москва, Факториал, 1997.

[9] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков. Москва, ИЛ, 1961.

[10] Дубровин В.А., Новиков С.П. и Фоменко А.Т., Современная геометрия. Методы и приложения. Том I. Москва, Эдиториал УРСС, 1998.

[11] Дубровин В.А., Новиков С.П. и Фоменко А.Т., Современная геометрия. Методы и приложения. Том II. Москва, Эдиториал УРСС, 1998.

[12] Дубровин В.А., Новиков С.П. и Фоменко А.Т., Современная геометрия. Методы теории гомологий. Москва, Наука, 1984.

[13] Жаринов В.В., Законы сохранения эволюционных систем, ТМФ(1986), т. 68, n. 2, стр. 163-171.

[14] Жаринов В.В., Алгебро-геометрические основы математической физики. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск 9. Москва, МИРАН, 2008.

[15] Зуланке Р. и Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения. Москва, Мир, 1975.

[16] Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике. Москва, Наука, 1983.

[17] Кобаяси Ш. и Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Том I. Москва, Наука, 1981.

[18] Кобаяси Ш. и Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Том II. Москва, Наука, 1981.

[19] Ленг С., Алгебра. Москва, Мир, 1968.

[20] Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Москва, Мир, 1989.

[21] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии. Москва, Мир, 1970.

[22] Федорюк М.В., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, Наука, 1985.

[23] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. Москва, Факториал Пресс, 2005.

Предметный указатель