

Математические основания квантовой теории

Лектор: Александр Семенович Холево

Лекции посвящены современному изложению математических оснований нерелятивистской квантовой теории, опирающемуся на методы функционального анализа. Особое внимание уделено фундаментальным аспектам статистической структуры, не получающим достаточного освещения в стандартных руководствах по квантовой механике.

Гл. 1. Гильбертово пространство

1. Теорема Рисса и формализм Дирака.
2. Ограниченные операторы, виды сходимости.
3. Спектральная теорема.
4. Операторы проекционные, эрмитовы, унитарные, (частично) изометрические.
5. Положительность. Полярное разложение оператора.
6. След и двойственность между ядерными и ограниченными операторами.

Гл. 2. Состояния и наблюдаемые

1. Постулаты статистического описания. Классические и квантовые системы.
2. Правила суперотбора. Алгебры наблюдаемых.
3. Теорема Глисона. Операторы плотности.
4. Квантовые состояния. Пример: кубит.
5. Квантовые наблюдаемые и разложения единицы.
6. Спектральная теорема и функциональное исчисление для коммутирующих самосопряженных операторов.
7. Совместимость, дополнительность и соотношение неопределенностей.
8. Переполненные системы. Теорема Наймарка.
9. Составные квантовые системы и тензорное произведение гильбертовых пространств.
10. Сцепленные состояния (entangled states).
11. Корреляции Эйнштейна-Подольского-Розена. Неравенство Белла.

Гл. 3. Симметрии, кинематика, динамика

1. Теорема Вигнера. Группы симметрий. Проективные представления.
2. Однопараметрические группы унитарных операторов. Теорема Стоуна.
3. Канонические коммутационные соотношения в формах Вейля и Гейзенберга.
4. Теорема единственности Стоуна-фон Неймана. Представления Шредингера и импульсное.
5. Галилеева ковариантность и уравнение Шредингера.
6. Наблюдаемая времени. Соотношение неопределенностей «время-энергия».
7. Обобщенные системы импримитивности. Каноническая сопряженность в квантовой механике.
8. Группа вращений и спин.

Гл. 4. Квантование Вейля и линейные бозонные системы

1. Квантовый осциллятор. Оператор и представление «числа квантов».
2. Оператор фазы и соотношение неопределенностей «фаза-число квантов».
3. Состояния минимальной неопределенности, когерентные и сжатые.
4. Представление по когерентным состояниям. P-представление оператора плотности.
5. Канонические коммутационные соотношения для многих степеней свободы в форме Вейля–Сигала.
6. Симплектическое пространство. Квадратичные гамильтонианы и комплексные структуры.
7. Преобразование Вейля. Характеристическая функция состояния. Моменты.
8. Гауссовские состояния, их характеристическое свойство.

Гл. 5. Открытые квантовые системы

1. Эволюции открытой системы и вполне положительные отображения.
2. Представления Стайнспринга и Крауса.
3. Ковариантные эволюции.
4. Квантовые динамические полугруппы. Уравнение Линдблада.
5. Структура генератора и когомологии операторных алгебр.
6. Эргодические свойства.
7. Расширения динамических полугрупп в пространстве Фока.
8. Квантовый «парадокс Зенона». Непрерывные квантовые измерения как некоммутативное обобщение процессов с независимыми приращениями. Предельная теорема и квантовая формула Леви–Хинчина.

Гл. 6. Энтропийные характеристики квантовых систем

1. Энтропия фон Неймана. Относительная энтропия.
2. Квантовая H-теорема. Сильная субаддитивность энтропии.
3. Разложение Шмидта и очищение состояния.
4. Условная энтропия и обменная энтропия.
5. Информационные количества. Когерентная информация и обратимость.

Гл. 7. Элементы квантовой теории информации

1. Невозможность копирования квантовой информации.
2. Сцепленность состояний (entanglement) как информационный ресурс. Телепортация квантовых состояний.
3. Теорема кодирования квантового источника. Сжатие квантовой информации.
4. Квантовый канал связи и его классическая пропускная способность. Проблема аддитивности.
5. Квантовая и секретная классическая пропускные способности. Квантовые криптографические протоколы.
6. Сверхплотное кодирование. Передача классической информации с помощью сцепленного состояния через канал с шумом.
7. Код Шора. Необходимые и достаточные условия исправления ошибок.
8. Симплектические коды.
9. Квантовые вычисления, устойчивые к ошибкам.
10. Алгоритмы Саймона, Шора и Гровера.

Список литературы

1. Дж. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, Москва: Наука 1964.
2. М. Рид, Б. Саймон, Методы современной математической физики, т. 1, Москва: Наука.
3. Л. Д. Фаддеев, О. Я. Якубовский, Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Москва-Ижевск: РХД 2001.
4. А. С. Холево, Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. 2-е изд. Москва-Ижевск: ИКИ 2004.
5. А. С. Холево, Статистическая структура квантовой теории. Москва-Ижевск: ИКИ 2003.