Дополнительные главы анализа

Лектор: Дмитрий Викторович Аносов

I. Дифференциальное исчисление.

0. Банаховы пространства.

1. Производная:

а) Скорость. (В случае одной независимой переменной ничего больше, в сущности, не надо.)

б) Главная линейная часть приращения. (Этот подход работает не только в случае нескольких независимых переменных, но и для функций на банаховом пространстве. В этом случае главную линейную часть называют производной Фреше.)

в) О производной в ТФКП. ∂ и $\overline{\partial}$.

Информация о чуде: существование таковой во всех точках области определения влечёт существование всех производных и сходимость ряда Тейлора. Чудо на то и чудо, чтобы чудесный элемент присутствовал не только в формулировке, но и в доказательстве. Последний элемент состоит в том, что эти, казалось бы, чисто дифференциальные факты доказываются с использованием интегралов.

г) Производная Гато (производная по направлению).

Элементарный вопрос: Когда её существование производной Гато (что легче проверить) влечёт существование производной Фреше?

д) В конечномерном случае надо постараться, чтобы построить нигде не дифференцируемую функцию. В бесконечномерном случае так бывает в самых простых случаях.

е) Уравнения Эйлера-Лагранжа в вариационном исчислении. Почему оно не сводится к общим (и довольно тривиальным) бесконечномерным фактам?

ж) Пфаффовы формы как линейные функционалы на векторах.

2. Теорема о неявных функциях (банахова).

а) Сама теорема.

б) Пример приложения: существование и единственность для ОДЕ плюс гладкая зависимость от начальных данных и параметров.

в) Пример приложения: локальные инвариантные многообрразия для ОДЕ.

3. Внешние дифф. формы.

а) Алгебраическая часть (специально о кососимм. формах и немного о тензорах).

б) Операция d.

в) Векторный анализ с точки зрения ВДФ.

Дифференциал и градиент - близнецы-братцы. Легко ли в этом нам разобраться? Кто для анализа ценнее стал?

Мы говорим - дифференциал, подразумеваем градиент. Мы говорим - градиент, подразумеваем дифференциал. А верно ли всё это или нет?

(Подражание лучшему, талантливейшему поэту нашей (теперь уже к счастью, б. нашей) эпохи.)

г) Скобка Пуассона векторных полей. Немного о производной Ли.

д) Теорема Фробениуса.

4. Старшие производные. Струи. Формула Тейлора.

II. Мера и категория.

У луч., тал. поэта (б.) наш. эп. есть стихи "Что такое хорошо и что такое плохо".
Я буду говорить на тему "Что такое много и что такое мало".
1. Мера Лебега на прямой.
Примечание: ещё до отчётливой формулировки б. основного вопроса философии (что первично - материя или сознание?) обсуждался вопрос, что первично - курица или яйцо? Его разновидность применительно к нашим интересам гласит:
что первично - мера или интеграл? Я думаю, что мера. (Данное мнение является единственно правильным, поскольку противоположное мнение ошибочно.)
2. Категория (массивность). Категория versus мера.
3. Об общей теории меры.
4. Мера на компакте K. Теорема Рисса and company об общем виде линейного функционала в $C(K)$.

III. Об обобщённых функциях (немного).

Основные применения теории обобщённых функций относятся к задачам о функциях нескольких переменных (напр., к УрЧП, но не только к ним - есть ещё квантовая теория поля). Это уже тема для спецкурсов. В одномерном случае обобщённые функции позволяют по-новому интерпретировать некоторые давным-давно известные вещи вроде функции Грина краевой задачи, что небесполезно для общего развития, но не даёт ничего принципиально нового. Всё же в одномерном случае есть нечто с более оригинальным содержанием – свёрточная алгебра, автоматически дающая обоснование операционного исчисления.

Об этом я и надеюсь рассказать.

Примечание: "Каждый да колет яйцо с того конца, как удобнее". Это веротерпимое высказывание священной книги лиллипутов не предотвратило религиозных войн, которые, с полным уважением к ней, велись не по поводу того, с какого конца следует колоть яйца, а того, с какого конца удобнее.
Обосновывать же операционное исчисление можно не с двух, а с пяти концов: элементарный метод (см. учебник матфизики Джефриса и Свирлс); преобразование Лапласа (наиболее распространённый "конец"); контурный интеграл, более или менее обратный к преобразованию Лапласа (применялся ещё до того, как возникла потребность в обосновании операционного исчисления, которого тогда и не было); свёрточная алгебра (приложение теории обобщённых функций Шварца); исчисление Микусинского (другая и притом более общая теория обобщённых функций). К счастью, поклонники одного "конца" зачастую не знают о существовании других "концов", что пока предохраняет от слишком острых конфликтов.