Научно-образовательный центр при МИАН

Осенний семестр 2007/2008

Функциональные методы в нелинейных задачах математической физики

Лектор: Олег Эдуардович Зубелевич

Курс посвящен изучению нелинейных задач математической физики с точки зрения современного функционального анализа. Наряду с классической техникой (метод априорных оценок, вариационные методы, методы монотонности и компактности, тождество Похожаева и его обобщения), излагаются современные результаты, основанные на методах общей топологии: теоремы о неподвижных точках в локально выпуклых линейных топологических пространствах, критерии компактности множеств отображений в л.т.п., методы бесконечномерной КАМ теории, методы функционального анализа в шкалах банаховых пространств. Кроме классических уравнений нелинейного анализа рассматриваются абстрактные дифференциальные уравнения и функционально-дифференциальные уравнения, возникшие в последние годы в различных приложениях.

Программа курса

Лекция 1. Введение: Метрические пространства, банаховы пространства, топологические пространства, сопряженные пространства, теорема о множителях Лагранжа, локально-выпуклые топологические пространства, полунормированные пространства, шкалы банаховых пространств, индуктивный и проективный пределы. Различные типы сходимостей. Теоремы о неподвижных точках: принцип сжатых отображений, теорема Массера.

Лекция 2. Степень отображения в пространстве R^m, степень отображения и вычеты.

Лекция 3. Конечномерные пространства: теорема о неподвижной точке Брауэра и конечномерная версия теоремы о неподвижной точке Браудера, монотонные и коэрцитивные отображения. Степень отображения в банаховом пространстве. Теорема о неподвижной точке Шаудера.

Лекция 4. Банаховы пространства: монотонные и коэрцитивные отображения. Монотонность операторов в гильбертовом пространстве. Теорема о неподвижной точке отображения единичного шара в себя.

Лекция 5. Неподвижные точки в локально-выпуклых топологических пространствах: Теорема Браудера.

Лекция 6. Шкалы банаховых пространств. Малые параметры, Абстрактная схема теории возмущений. Экспоненциально точные решения: быстро-медленные задачи, малые знаменатели.

Лекции 7, 8. Теорема Нэша–Мозера, КАМ-теория.

Лекции 9, 10. Абстрактные теоремы типа Коши–Ковалевской: Теорема Ниренберга–Нишиды, теорема типа Пеано. Мажорантный метод.

Лекция 11. Элементы L^p-теории пространств Соболева: определения, интерполяция, теоремы вложения, след функции. Различные типы сходимостей. Элементы спектральной L^p-теории для оператора Лапласа. H^1-принцип максимума.

Лекция 12. Слабо нелинейные эллиптические уравнения. Принцип сравнения. Пример: появление решения с ростом размерности области. Существование решения в задаче с монотонной правой частью.

Лекции 13, 14. Вариационный методы: Мазура, Браудера, исследование нелинейных эллиптических уравнений: доказательство теоремы существования. Вариационный принцип и монотонность. Тождество Похожаева. Пример: функционально-дифференциальное уравнение с растяжениями и сжатиями – условный минимум.

Лекция 15. Параболические уравнения: полугруппы, Элементы L^p-теории полугруппы $e^{t\Delta}$, параболический H^1-принцип максимума. Принцип сравнения.

Лекция 16. Уравнение Навье–Стокса, теорема Лере.

Лекции 17, 18. Абстрактное параболическое уравнение в шкале банаховых пространств – по материалам статей Каравальхо. Теорема типа Пеано для квазилинейного параболического уравнения.