Гармонические отображения

Лектор: Армен Глебович Сергеев

Курс лекций посвящен теории гармонических отображений римановых многообразий. Иными словами, речь идет о гладких отображениях многообразий, наделенных метрикой, которые являются критическими точками функционала энергии. Такие отображения естественно возникают во многих вопросах дифференциальной геометрии и математической физики (на некоторых из приложений мы остановимся в курсе).

Особое внимание уделяется гармоническим отображениям многообразий, наделенных, помимо метрики, комплексными структурами (этот случай представляет наибольший интерес с точки зрения физических приложений). В указанной ситуации голоморфные и антиголоморфные отображения являются гармоническими, более того, такие отображения реализуют локальные минимумы функционала энергии. Основной лейтмотив курса: попытаться свести изучение произвольных гармонических отображений к исследованию голоморфных и антиголоморфных.

Курс начинается с изложения основ теории гармонических отображений римановых многообразий. Главное внимание уделяется связи между гармоническими и голоморфными отображениями компактных римановых поверхностей в комплексные многообразия. В качестве первого нетривиального примера рассматриваются гармонические отображения римановой сферы в себя, все они задаются рациональными отображениями.

Для построения гармонических отображений в общие римановы многообразия мы пользуемся твисторным методом, который является второй основной темой курса. Мы излагаем несколько конструкций твисторных пространств для общих и специальных классов римановых многообразий, начиная с известной конструкции Атьи–Хитчина–Зингера.

Пользуясь твисторным подходом, можно свести «вещественную» задачу построения гармонических отображений в римановы многообразия к «комплексной» задаче построения псевдоголоморфных отображений в твисторные пространства этих многообразий.

Применяя твисторный метод к гармоническим отображениям компактных римановых поверхностей в комплексные грассмановы многообразия, удается получить их полное описание (конструкция Вуда). Этот результат допускает обобщение на случай гармонических отображений в компактные группы Ли (конструкция Уленбек).

В заключение рассматриваются гармонические отображения компактных римановых поверхностей в некоторые бесконечномерные комплексные многообразия, а именно в пространства петель групп Ли. Интерес к таким отображениям объясняется теоремой Атьи–Дональдсона, связывающей инстантоны на 4-мерном евклидовом пространстве с голоморфными отображениями римановой сферы в пространство петель.

Программа курса

I. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Определение гармонических отображений.
2. Гармонические отображения римановой сферы в себя.
3. Гармонические отображения комплексных многообразий.
4. Теорема Черна и гауссовы отображения.

II. ТВИСТОРНЫЙ МЕТОД

5. Твисторная программа Пенроуза.
6. Твисторное расслоение Атьи–Хитчина–Зингера риманова многообразия.
7. Твисторные расслоения грассмановых многообразий.

III. ТВИСТОРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

8. Конструкция Иллса–Саламона гармонических отображений в римановы многообразия.
9. Построение гармонических отображений в грассмановы многообразия.
10. Гармонические отображения в компактные группы Ли: конструкция Уленбек.

IV. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

11. Пространства петель компактных групп Ли.
12. Голоморфные сферы в пространствах петель: теорема Атьи–Дональдсона.
13. Грассманиан гильбертова пространства.
14. Построение гармонических отображений в пространства петель.