

## Геометрические методы в математической физике

Лектор: Михаил Орионович Катанаев

В лекциях излагаются основы дифференциальной геометрии, необходимые для понимания и исследования моделей современной математической физики. Строгие определения сопровождаются явными формулами в локальной системе координат, которые нужны в приложениях при проведении вычислений. В качестве приложений рассматривается общая теория относительности и двумерные модели гравитации.

### Примерный план лекций

1. Топологические пространства. Евклидово пространство. Многообразия. Отображения. Преобразования координат. Многообразия с краем. Примеры.
2. Скалярные поля и плотности. Векторные поля и 1-формы. Векторные поля и интегральные кривые. 1-формы и гиперповерхности. Алгебра Ли векторных полей. Касательное и кокасательное расслоения.
3. Тензорные поля. Полностью антисимметричные тензоры. Отображения многообразий и подмногообразия. Накрытия. Теоремы вложения. Теорема Фробениуса. Производная Ли.
4. Метрика. Сигнатура метрики и ориентация векторных полей. Гиперповерхности и интегральные кривые. Выбор системы координат. Векторные поля Киллинга.
5. Ковариантная производная и аффинная связность. Ковариантная производная тензорных полей. Кручение и неметричность. Параллельный перенос. Ковариантная производная тензорных плотностей. Геометрический смысл кручения.
6. Кривизна. Свойства тензора кривизны. Геометрический смысл кривизны. Пространства абсолютного параллелизма. Пространства постоянной кривизны.
7. Внешняя алгебра. Дифференциальные формы. Внешнее дифференцирование. Ранг и класс дифференциальных форм. Теорема Дарбу. Интегрирование дифференциальных форм.
8. Геодезические. Экстремали. Интегрирование уравнений для экстремалей и геодезических. Уравнение Гамильтона-Якоби для экстремалей. Геодезические или римановы (нормальные) координаты. Полнота многообразий.
9. Группы Ли. Группы Ли как римановы пространства. Группы Ли как пространства Римана-Картана. Экспоненциальное отображение для групп Ли. Однородные пространства.

10. Главное расслоение. Связность на главном расслоении. Переменные Картана.
11. Основы общей теории относительности. Уравнения Эйнштейна. Действие Гильберта–Эйнштейна. Постановка задачи в общей теории относительности.
12. Двумерные модели гравитации. Интегрирование уравнений движения.
13. Построение глобальных решений в двумерных моделях гравитации. Диаграммы Картера–Пенроуза.
14. Классификация «сплетенных» (warped) решений в общей теории относительности. Решение Шварцшильда и черные дыры.