Разрушение решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств с частными производными (часть 2)

Лектор: Евгений Иванович Галахов

Классическая теория глобальной разрешимости нелинейных уравнений посвящена в основном достаточным условиям, обеспечивающим разрешимость соответствующих начальных и краевых задач. Эта теория имеет достаточно большую историю и содержит много интересных и важных результатов.

К сожалению, многие важные с точки зрения приложений уравнения не укладываются в рамки этой классической теории. Причина этого заключается не в технических моментах, а в существе дела, а именно в том, что для широкого класса уравнений в принципе не существует глобальных решений соответствующих задач. Это новое явление в нелинейном глобальном анализе было открыто сравнительно недавно (начиная с классической работы Х. Фуджиты, 1966), и получило название разрушения решений (blow-up). Основные методы исследования этого явления основаны на принципах сравнения, но широкий класс задач, в частности, гиперболические, не допускают этих принципов и поэтому в общем и целом остаются за рамками теории blow-up.

В предлагаемом курсе, который является продолжением предыдущего, мы излагаем новый подход к теории разрушения решений и демонстрируем его на широком классе уравнений и неравенств. Отметим практическую важность этой теории, поскольку отсутствие глобального решения нелинейной математической модели влечет катастрофу процессов, описываемых такими моделями. Таким образом, теория blow-up по существу является теорией катастроф нелинейных явлений. Именно поэтому эта теория важна и интересна с точки зрения не только математики, но и возможных приложений.

В частности, тематика курса охватывает гиперболические уравнения и неравенства, задачи с нелокальной нелинейностью, задачи в неограниченных областях с негладкой границей (в частности, в конусах), а также системы дифференциальных уравнений и неравенств с частными производными различных типов. Устанавливается зависимость критического показателя, при котором решение перестает существовать, от порядка уравнения, роста коэффициентов, геометрии области, начальных данных и от выбора функционального пространства решений.

Излагаемая теория применяется к изучению законов сохранения и к другим прикладным задачам.

Программа курса

1. Отсутствие решений полулинейного стационарного неравенства в конусе. Зависимость критического показателя от раствора конуса.
2. Системы эллиптических дифференциальных неравенств в $\R^N$ и в ограниченных областях. Зависимость критического показателя от порядка системы и роста коэффициентов. Примеры слабо и сильно связанных систем.

3. Полулинейные эволюционные неравенства в конусе. Зависимость критического показателя от начальных данных.
4. Системы полулинейных уравнений и неравенств второго порядка с субкритическим и критическим вырождением.
5. Примеры вырожденных и сингулярных гиперболических задач. Полное мгновенное разрушение решения. Зависимость критического показателя от выбора функционального пространства.
6. Примеры дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и неравенств с нелокальными нелинейностями.
7. Применение теории разрушения решений к исследованию законов сохранения.