Российская Академия наук

Математический институт им. В.А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 511.331

КОРОЛЁВ Максим Александрович

Закон Грама в теории дзета-функции Римана

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в Отделе алгебры и теории чисел ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук Сергей Александрович Гриценко, профессор кафедры алгебры, теории чисел и геометрии Белгородского государственного национального исследовательского университета;

доктор физико-математических наук профессор Антанас Лауринчикас, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета;

доктор физико-математических наук Дмитрий Александрович Попов, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института физико-химической биологии им. А.Н. Белозерского МГУ им. М.В. Ломоносова.

Ведущая организация:

Хабаровское отделение ФГБУН Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук

Защита диссертации состоится 26 декабря 2013 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова

Автореферат разослан "____" ____________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. профессор Н. П. Долбилин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В 1903 году датский математик Йорген Педерсен Грам[1)] предложил метод приближённого нахождения нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Ключевую роль в методе Грама играли свойства последовательности точек $\{t_n\}$ («точки Грама»), каждая из которых определялась как единственное решение трансцендентного уравнения

$$\vartheta(t_n) = (n-1)\pi,$$

удовлетворяющее условию $\vartheta'(t_n) > 0$ (см. рис. 1). Символ $\vartheta(t)$ обозначает здесь приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ вдоль отрезка, соединяющего точки $s = 0.5$ и $s = 0.5 + it$; с ростом t эта функция ведёт себя как

$$\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\bigl(t^{-1}\bigr).$$

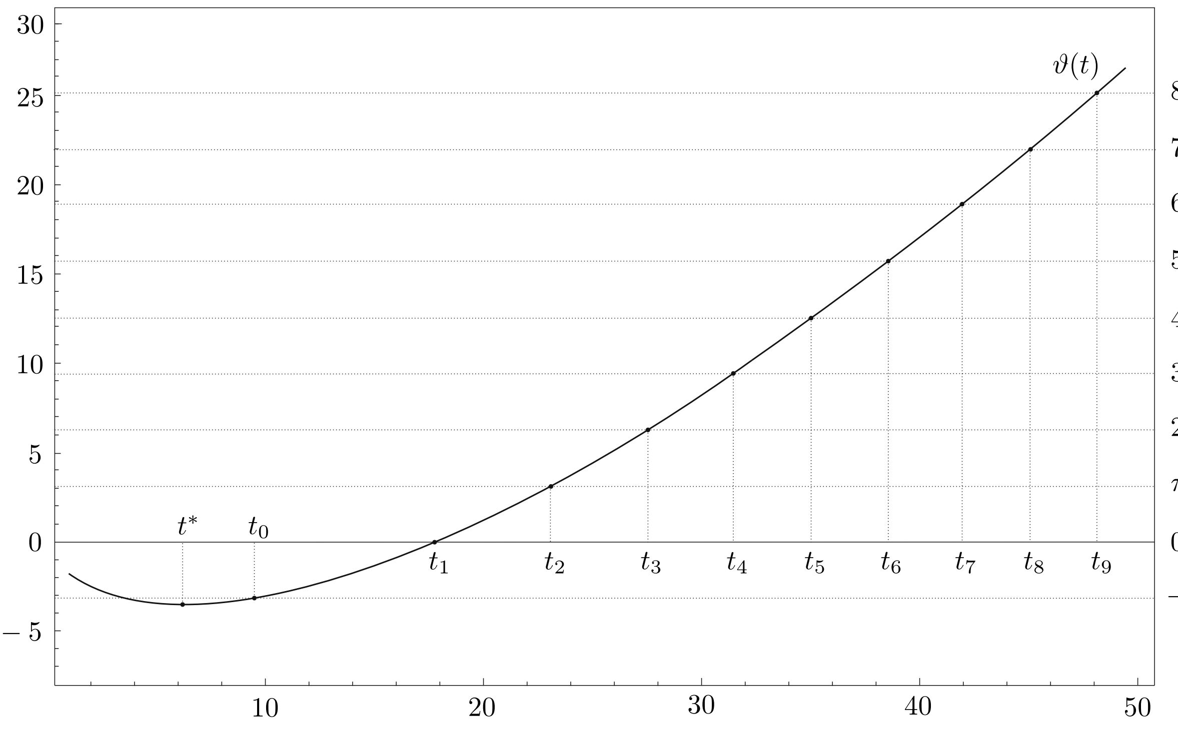

Рис. 1. Точки Грама являются абсциссами точек пересечения графика функции $y = \vartheta(t)$ с горизонтальными прямыми $y = (n-1)\pi$, $n = 0, 1, 2\ldots$. Символ t^* обозначает точку минимума $\vartheta(t)$.

Относительная простота вычисления величин t_n, с одной стороны, и близость ряда характеристик последовательности $\{\gamma_n\}$ упорядочен-

[1)] J.-P. Gram, "Sur les Zéros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann", *Acta Math.*, **27**(1903), 289-304.

ных по возрастанию положительных ординат нулей дзета-функции Римана и последовательности точек Грама, с другой стороны, привлекли к последним внимание многих исследователей, в числе которых – Дж.И. Хатчинсон[2)], Э.Ч. Титчмарш[3)], А. Сельберг[4)], Я. Мозер[5)], А.А. Лаврик[6)] и др. По сути, их работы сформировали отдельное направление в изучении свойств $\zeta(s)$, которое иногда называют дискретной теорией дзета-функции Римана. К самым последним её достижениям следует отнести работы Т. Труджиана[7)], Й. Штойдинга, Ю. Калпокаса и Т. Крайста[8)].

Вычисления, проделанные Грамом в 1902-1903 гг., позволили ему сделать следующее замечательное наблюдение: первые пятнадцать положительных ординат нулей $\zeta(s)$ отделены друг от друга точками t_n (см. рис. 2):

$$t_0 < \gamma_1 < t_1 < \gamma_2 < t_2 < \ldots < t_{14} < \gamma_{15} < t_{15}. \tag{1}$$

Осторожность в сочетании с глубокой интуицией позволили Граму предположить, что рано или поздно подмеченная им закономерность нарушится. Это предположение блестяще подтвердилось в ходе более обшир-

[2)] J. I. Hutchinson, "On the roots of the Riemann zeta-function", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27**(1925), 49-60.

[3)] E. C. Titchmarsh, "The zeros of the Riemann zeta-function", *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **151**(1935), 234-255; *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **157**(1936), 261-263.

[4)] A. Selberg, "The zeta-function and the Riemann hypothesis", *C.R. Dixième Congrès Math. Skandinaves* (1946), **10**, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187-200 (см. также: A. Selberg, Collected papers. Vol. I. – Berlin, Springer-Verlag, 1989, 341-355).

[5)] Я. Мозер, "Арифметический аналог одной формулы Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана", *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 37(1980), 109-120; "О порядке одной суммы Е.К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана", *Czechoslovak Math. J.*, **41**(116)(1991), 663-684.

[6)] А.А. Лаврик, "Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана", Теория чисел и анализ, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, *Тр. МИАН*, 207, Наука, М., 1994, 197–230.

[7)] T. S. Trudgian "On the success and failure of Gram's Law and the Rosser Rule", *Acta Arith.* **148**:3 (2011), 225–256.

[8)] J. Kalpokas, J. Steuding, "On the value distribution of the Riemann zeta-function on the critical line", *Moscow J. Combinatorics and Number Theory*, **1**:1(2011), 26-42; T. Christ, J. Kalpokas, "Upper bounds of discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line", *Lithuanian Math. J.*, 233-248; **52**:3(2012), J. Kalpokas, "Discrete moments of the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions". Doctoral dissertation. Vilnius university, Vilnius, 2012; T. Christ, J. Kalpokas, "Lower bounds of discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line" (готовится к публикации в Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux).

ных вычислений Хатчинсона (1925) и Титчмарша (1935), когда были обнаружены соседние ординаты, между которыми нет ни одной точки Грама, а также промежутки $\left(t_{n-1}, t_n\right]$, вовсе не содержащие ординат нулей $\zeta(s)$.

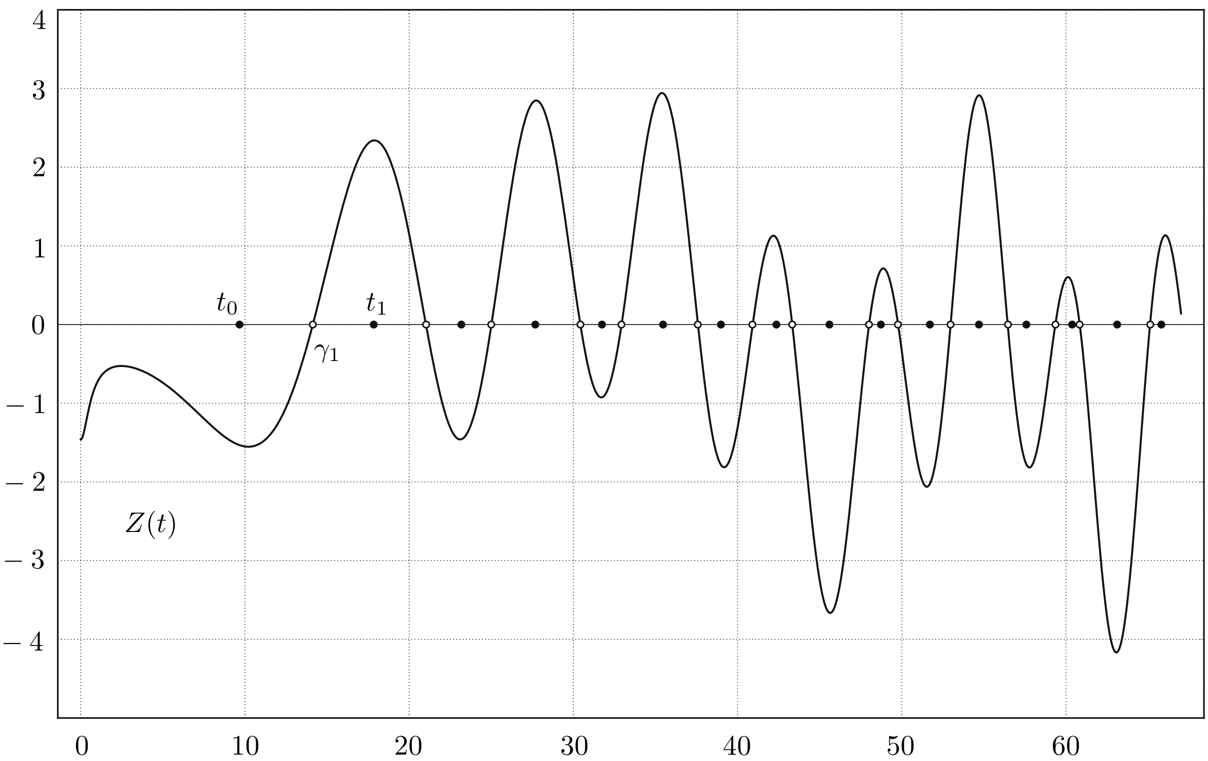

Рис. 2. Первые пятнадцать нулей функции Харди $Z(t) = e^{i\,\vartheta(t)}\zeta\big(0.5 + it\big)$. Чёрным отмечены точки Грама.

Попытки нахождения общей закономерности во взаимном расположении точек t_n и γ_n, которая учитывала бы как результаты вычислений Грама, так и обнаруженные впоследствии «исключения», привели к появлению понятия, известного как «закон Грама».

В настоящее время имеется несколько «разновидностей» закона Грама, принципиально отличающихся друг от друга. Одна из них была предложена в 1946 г. Сельбергом[9)] и состоит в следующем. Пусть γ_n - произвольная ордината нуля $\zeta(s)$. Тогда ввиду монотонности последовательности Грама можно выбрать номер $m = m(n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m.$$

[9)] A. Selberg, ук. соч.

Следуя Сельбергу, положим $\Delta_n = m-n$ и будем говорить, что ордината γ_n удовлетворяет закону Грама в том, и только том случае, когда $\Delta_n = 0$ или, что то же, когда $\gamma_n \in (t_{n-1}, t_n]$. В частности, этому закону подчиняются все ординаты, вычисленные Грамом, а также бо́льшая часть всех ординат, приближённые значения которых известны в настоящее время.

В докладе «Дзета-функция и гипотеза Римана»[10], прочитанном на 10 Скандинавском математическом конгрессе в Копенгагене (1946), Сельберг, желая продемонстрировать, сколь осторожным следует быть при высказывании теоретико-числовых гипотез, основанных на одних лишь численных данных, привёл найденные им формулы

$$\sum_{n\leqslant N} \Delta_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!}\frac{N}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k + O\bigl(N(\log\log N)^{k-0.5}\bigr), \qquad (2)$$

$$\sum_{n\leqslant N} \Delta_n^{2k-1} = O\bigl(N(\log\log N)^{k-1}\bigr), \qquad (3)$$

где $k \geqslant 1$ - любое фиксированное целое число, а $N \to +\infty$.

В том же докладе Сельберг высказал гипотезу о том, что для любой сколь угодно медленно растущей функции $\Phi(x)$, положительной и неограниченной при $x \to +\infty$, число номеров $n \leqslant N$, не удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{1}{\Phi(n)}\sqrt{\log\log n} \,<\, |\Delta_n| \,<\, \Phi(n)\sqrt{\log\log n},$$

есть $o(N)$ при неограниченном возрастании N. Это означает, в частности, что $\Delta_n \neq 0$ для «почти всех» n.

Насколько можно судить, долгое время эти результаты Сельберга оставались без должного внимания. Вероятно, этому способствовало то обстоятельство, что Сельберг так и не опубликовал доказательства формул (2) и (3)[11].

Таким образом, представляют интерес вопросы, связанные с обоснованием формул Сельберга, а также их обобщений на случай «короткого» промежутка суммирования вида $N < n \leqslant N+M$, где $M = o(N)$, на случай нецелых показателей k и т.д.

[10] A. Selberg, ук. соч.

[11] Хотя в примечании к тексту упомянутого доклада в «Избранных трудах» Сельберг отметил, что предположение о том, что $\Delta_n \neq 0$ для почти всех n следует из того факта, что величины $\Delta_n/\sqrt{\log\log n}$ имеют нормальное распределение. Последнее же «... стандартным образом выводится» из формул (2) и (3) (см.: A. Selberg, Collected papers. Vol. I. – Berlin, Springer-Verlag, 1989, p.355).

Отдельного исследования требует и задача о распределении значений величин Δ_n. Помимо теоремы Титчмарша о неограниченности Δ_n (1935) и приведённых выше результатов Сельберга ничего не было известно о том, насколько большой по абсолютной величине может быть разность Δ_n и как часто может она принимать заданное значение k. В частности, не было известно, для какого числа номеров $n \leqslant N$ равенство $\Delta_n = 0$ всё же имеет место (или, что то же, какова доля ординат γ_n, $n \leqslant N$, удовлетворяющих закону Грама).

Сопоставляя результаты вычислений Грама, Хатчинсона, Титчмарша и других исследователей с различными формулировками закона Грама, несложно заметить, что в последних строгие неравенства для ординат γ_n заменены нестрогими. Так, в рассматриваемой нами интерпретации Сельберга закона Грама ставится вопрос о попадании ординаты γ_n не в открытый интервал (t_{m-1}, t_m), а в полуинтервал $\bigl(t_{m-1}, t_m\bigr]$. Причина такой замены очевидна и состоит в скудости наших знаний в вопросе о том, может ли ордината нуля $\zeta(s)$ совпасть с какой-либо из точек Грама.

Такое совпадение кажется практически невероятным. Так возникает интересная задача обоснования или опровержения невозможности обращения в нуль величины $\zeta\bigl(0.5+it_n\bigr)$ при целом $n \geqslant 0$. Первые результаты в этом направлении были получены в 2011 г. Й. Штойдингом и Ю. Калпокасом[12], которым удалось доказать, что неравенство $\zeta\bigl(0.5+it_n\bigr) \neq 0$ имеет место по крайней мере для

$$\bigl(1 - o(1)\bigr)\,\frac{4\pi N}{\log N}$$

точек Грама t_n, $n \leqslant N$.

Цель работы состоит в всестороннем исследовании разностей Δ_n и связанных с ними величин $\zeta\bigl(0.5+it_n\bigr)$, включая доказательство формул Сельберга и решения ряд задач о распределении Δ_n.

Научная новизна. Все результаты диссертации (включая найденные автором доказательства формул Сельберга) являются новыми.

Методы исследования. В работе используется метод Сельберга приближения функций, связанных с $\zeta(s)$, специальными тригонометри-

[12] J. Kalpokas, J. Steuding, "On the value distribution of the Riemann zeta-function on the critical line", *Moscow J. Combinatorics and Number Theory*, **1**:1(2011), 26-42.

ческими полиномами и метод Гоша[13)] нахождения моментов случайных величин с нецелым показателем, наряду с некоторыми новыми приёмами, разработанными в последние годы Р.Н. Бояриновым[14)], М. Радзивиллом[15)] и автором.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для исследования распределения значений достаточно широкого класса тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{p\leqslant x} a_p \sin(t\log p), \quad \sum_{p\leqslant x} a_p \cos(t\log p), \quad \sum_{p\leqslant x} a_p\, p^{it},$$

где p пробегает простые числа, а a_p - вещественная последовательность, удовлетворяющая некоторым естественным ограничениям, а также распределения коротких сумм Клоостермана по простым числам.

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на семинарах «Аналитическая теория чисел и приложения» под руководством А.А. Карацубы (МГУ, механико-математический ф-т, 2007 г.), «Семинар по арифметической и алгебраической геометрии» под руководством А.Н. Паршина (МИАН, 2009, 2010 гг.), «Московский семинар по теории чисел» под руководством Ю.В. Нестеренко и Н.Г. Мощевитина (МГУ, механико-математический ф-т, 2009 - 2012 гг.), научный семинар Хабаровского отделения Института прикладной математики ДВО РАН под руководством В.А. Быковского (2010 г.), «Современные проблемы теории чисел» под руководством С.В. Конягина и И.Д. Шкредова (МИАН им. В.А. Стеклова, 2012 г.), Семинар отдела алгебры и теории чисел и отдела алгебраической геометрии (семинар И. Р. Шафаревича) (МИАН, 2012, 2013 гг.), а также на международных конференциях «Zeta-functions» (Москва, 04.12.2008, 24.06.2010 и 20.11.2012), «Arithmetic Days in Moscow» (Москва, 13.06.2011), «27th Journées Arithmétiques» (Вильнюс, 27.06.2011), «Диофантовы приближения. Со-

13) A. Ghosh, "On Riemann's zeta-function – sign-changes of $S(T)$", *Recent progress in analytic number theory* (Durham, 1979), 1, Academic Press, London, New York, 1981, 25-46; "On the Riemann zeta-function - mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$", *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93-102.

14) Р.Н. Бояринов, "О дробных моментах случайных величин", *Докл. РАН*, **436**:3(2011), 295-297; "Вероятностные методы в теории аргумента дзета-функции Римана", *ТВП*, **56**:2(2011), 209-223.

15) M. Radziwiłł, "Large deviations in Selberg's central limit theorem", `arXiv:math 1108.5092v1 [math.NT]`.

временное состояние и приложения» (Минск, 05.07.2011), «Global Fields» (Москва, 25.10.2011), «Elementare und Analytische Zahlentheorie» (Лихтенфельс, 17.08.2012), «Международная китайско-российская конференция по теории чисел» (Москва, 08.10.2012), «Conference on Number Theory» (Гонконг, 29.11.2012), «28th Journées Arithmétiques» (Гренобль, 02.07.2013), «Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory» (Паланга, 05.09.2013).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен к конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 294 страницах и состоит из введения, 6 глав и 3 приложений. Библиография содержит 66 наименований.

Содержание работы

В диссертации рассмотрены следующие вопросы:

1) моменты тригонометрических полиномов специального вида (глава 1);

2) поведение аргумента дзета-функции Римана в точках Грама (глава 2);

3) формулы Сельберга для моментов величин Δ_n и их обобщения; распределение значений Δ_n (глава 3);

4) порядок роста величин Δ_n при $n \to +\infty$; множество значений, которые принимает Δ_n (глава 4);

5) распределение пар, троек, четвёрок и т.д. соседних ординат γ_n, для которых величина $\Delta_n \neq 0$ (глава 5);

6) малые значения функции $\zeta\bigl(0.5 + it\bigr)$ в точках Грама t_n (глава 6).

Поясним каждую из этих задач подробнее.

1) Величины Δ_n тесно связаны со значениями аргумента дзета-функции Римана на критической прямой, т.е. величины $S(t) = \pi^{-1}\arg\zeta\bigl(0.5+it\bigr)$, в точках Грама t_n. В свою очередь, функция $S(t)$ приближается (в метрике пространств $L_a[T;T+H]$, $a>0$) тригонометрическими полиномами вида

$$V_x(t) = V(t) = \sum_{p\leqslant x}\frac{\sin\left(t\log p\right)}{\sqrt{p}},$$

где $x = x(t)$, а p пробегает простые числа. По этой причине особый интерес приобретает задача нахождения асимптотических формул для «дискретных» моментов $V(t)$, т.е. величин

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} \bigl|V(t_n)\bigr|^{2a},$$

где a - произвольное (в т.ч. нецелое) положительное число, а длина M промежутка суммирования имеет вид $\bigl[N^{\alpha+\varepsilon}\bigr]$, $\alpha = \frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246}$, $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ - произвольное фиксированное число. Именно эта задача и рассматривается в главе 1.

Основными результатами этой главы являются новые формулы, дающие для таких моментов асимптотические разложения по степеням параметра

$$\mathfrak{S} = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} \sim \log\log x.$$

В случае целого a такое разложение будет содержать лишь конечное число слагаемых, в то время как для нецелого a главный член разложения представляется бесконечным рядом. Именно, справедливы следующие утверждения[16)]:

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 1$ - целое число, $x_0 < x \leqslant M^{1/(2k)}$. Тогда*

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} V^{2k}(t_n) = \frac{M}{2^{2k}} \sum_{n=0}^{k} \frac{(2k)!}{(k-n)!}\, \Phi_n\, \mathfrak{S}^{k-n} + \theta\, x^{2k} \log N,$$

где $|\theta| \leqslant 1$, а каждый из коэффициентов Φ_n представляет собой полином от величин

$$\mathfrak{S}_r = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p^r}, \quad r = 2, 3, \ldots, n.$$

В частности,

$$\Phi_0 \equiv 1, \quad \Phi_1 \equiv 0, \quad \Phi_2 = -\frac{1}{2^2}\,\mathfrak{S}_2, \quad \Phi_3 = \frac{1}{3^2}\,\mathfrak{S}_3,$$

$$\Phi_4 = -\frac{11}{2^6\cdot 3}\,\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2^5}\,\mathfrak{S}_2^2, \quad \Phi_5 = \frac{19}{2^3\cdot 3\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_5 - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3,$$

$$\Phi_6 = -\frac{11\cdot 43}{2^6\cdot 3^4\cdot 5}\,\mathfrak{S}_6 + \frac{11}{2^8\cdot 3}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2\cdot 3^4}\,\mathfrak{S}_3^2 - \frac{1}{2^7\cdot 3}\,\mathfrak{S}_2^3,$$

$$\Phi_7 = \frac{229}{2^4\cdot 3^3\cdot 7^2}\,\mathfrak{S}_7 - \frac{19}{2^5\cdot 3\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5 - \frac{11}{2^6\cdot 3^3}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2^5\cdot 3^2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3.$$

[16)] Нумерация теорем в автореферате отличаются от нумерации в диссертации.

Теорема 2. *Пусть $x_0 < x \leqslant N^{0.0001}$, a - произвольное вещественное число, отличное от целого и удовлетворяющее условиям*

$$0 \,<\, a \,<\, \frac{1}{6e}\biggl(\frac{\log N}{\log x}\biggr)^{0.5}.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\sum_{n\,=\,N+1}^{N+M}|V(t_n)|^{2a} \,=\, \frac{M}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\bigl(a+0.5\bigr)\,\biggl\{\,\sum_{n\,=\,0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Gamma\bigl(n\,-\,a\bigr)}{\Gamma\bigl(-a\bigr)}\,\Phi_n\mathfrak{S}^{a-n}\,+$$

$$+\,O\biggl(\biggl(\frac{\log x}{\log N}\cdot\frac{\max\,(a,1)}{\mathfrak{S}}\biggr)^{a}\,\biggr)\biggr\}.$$

При этом ряд, стоящий в правой части, является асимптотическим (по $\mathfrak{S}$), а постоянная в знаке O - абсолютной.

Метод, применяемый в главе 1, позволяет получать формулы для «интегральных» моментов полинома $V(t)$ вида

$$\int_{T}^{T+H}\bigl|V(t)\bigr|^{2a}dt,\quad T\geqslant T_0(\varepsilon),\quad H = T^{\,\alpha+\varepsilon},$$

подобные формулам теорем 1 и 2. В качестве примера укажем следующее асимптотическое разложение первого момента $V(t)$:

$$\int_{T}^{T+H}\bigl|V(t)\bigr|\,dt \,=\, \int_{T}^{T+H}\biggl|\,\sum_{p\,\leqslant\,x}\frac{\sin\,(t\log p)}{\sqrt{p}}\biggr|\,dt \,=$$

$$=\,\frac{H}{\sqrt{\pi}}\biggl\{\mathfrak{S}^{\,0.5}+\sum_{n\,=\,1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}}\,\Phi_{n+1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\,\mathfrak{S}^{-\,0.5-n}+O\biggl(\biggl(\frac{\log x}{\log T}\biggr)^{0.5}\,\biggr)\biggr\}.$$

2) Приводимое в работе доказательство формул Сельберга (2),(3) построено на сведении вычисления моментов величин Δ_n к аналогичной задаче для чисел

$$\Delta(n) \,=\, S(t_n+0),$$

более удобных для изучения. Исследованию свойств последовательности $\Delta(n)$ и посвящена глава 2 диссертации.

Прежде всего, теоремы главы 1 позволяют значительно уточнить имеющиеся формулы для дискретных моментов аргумента дзета-функции Римана на критической прямой, т.е. для сумм вида

$$\sum_{n\,=\,N+1}^{N+M}|\Delta(n)|^{2a},\quad a>0.$$

Так, имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть* k – *целое число,* $1 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{\log\log N}$*, где* $c_1 = 8 \cdot 10^{-4}\,\varepsilon$*. Тогда*

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} \Delta^{2k}(n) = \frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k \left(1 + \frac{\theta(c_1 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\log\log N}}\right)$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+M} \Delta^{2k-1}(n)\right| < \frac{c_1^{\frac{3}{2}}}{5}\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k-2}}(\log\log N)^{k-1}$$

Теорема 4. *Пусть* a - *произвольное вещественное число с условием* $0 < a \leqslant c_1 \sqrt[3]{\log\log N}$*, отличное от чётного натурального числа. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} |\Delta(n)|^{2a} \;=\; \frac{M}{\pi^{2a}\sqrt{\pi}}\,\Gamma\bigl(a + 0.5\bigr)\,(\log\log N)^a\,\bigl(1 \,+\, O\bigl(r(a)\bigr)\bigr),$$

где

$$r(a) \;=\; \begin{cases} \left(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{a}, & \text{если } 0 < a \leqslant 0.5; \\ \dfrac{a}{\sqrt{\log\log N}}\Bigl(\sqrt{\log\log\log N} \,+\, \varepsilon^{-1.5}\,a^{0.5}\Bigr), & \text{если } a > 0.5, \end{cases}$$

причём постоянная в знаке O - *абсолютная.*

Отметим, что ранее[17)] в качестве верхней границы остаточного члена формулы чётного момента чисел $\Delta(n)$ указывалась величина вида

$$\frac{c^k}{\sqrt{\log\log N}}, \quad c \,>\, 1.$$

Наилучшая из оценок остатка $r(a)$ в формуле для момента степени $2a$, $a \notin \mathbb{N}$, приводила в отдельных случаях к неравенству вида

$$r(a) \,\ll\, e^{-c\sqrt{\log\log\log N}}, \quad c > 0.$$

[17)] См., например, ук. выше работы Р.Н. Бояринова. Также см. статью А. Гоша (1983) и обзор А.А. Карацубы и М.А. Королёва, “Поведение аргумента дзета-функции на критической прямой”, *УМН* **61**:3 (2006), 3-92, в которых доказаны формулы для интегральных моментов $S(t)$ с соответствующими оценками остаточных членов.

Кроме того, формулы теорем 1 и 2 существенно расширяют диапазон, в которых могут меняться параметры k и a: $0 < k, a \ll \sqrt[3]{\log\log N}$ вместо прежнего $0 < k, a \ll \log\log\log N$.

Применение стандартных вероятностных методов работы с характеристическими функциями случайных величин наряду с новыми результатами Х.К. Хванга[18] о вероятностях «больших уклонений» от среднего значения для распределений, близких к гауссовскому, и теоремой 3 позволяет доказать следующий результат о распределении величин $\Delta(n)$.

Теорема 5. *Пусть*

$$\Phi(u) \,=\, \frac{1}{M}\,\#\biggl\{n\,|\,N < n \leqslant N+M,\ \Delta(n) \leqslant \frac{u}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}\biggr\},$$

$$G(u) \,=\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv.$$

Тогда при любом u справедлива формула

$$\Phi(u) \,=\, G(u) \,+\, \frac{1.78\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}.$$

Если, сверх того, $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$, то справедливы равенства

$$\frac{\Phi(-u)}{G(-u)} \,=\, 1 \,+\, O(R), \qquad \frac{1-\Phi(u)}{1-G(u)} \,=\, 1 \,+\, O(R),$$

в которых

$$R \,=\, \frac{u(u^2+\log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O зависят от ε.

Теорема 5 даёт асимптотику числа номеров n из промежутка $N < n \leqslant N + M$, для которых величина $\Delta(n)$ имеет порядок $u\sqrt{\log\log N}$, при условии, что «отклонение» u от «среднего значения» не слишком велико: $u = o\bigl(\sqrt[6]{\log\log N}\bigr)$. Случай бóльших u охватывается следующей теоремой, которая позволяет оценить искомое количество снизу для всех u с условиями $u \gg 1$, $u = o\bigl(\sqrt{\log\log N}\bigr)$.

Теорема 6. *Пусть $F(x)$ - произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x \to +\infty$ функция, такая, что $1 \ll F(x) \ll$*

[18] H.-K. Hwang, “Large deviations for combinatoril distributions. I: central limit theorems”, *Ann. Appl. Prob.*, **6**:1(1996), 297-319.

$\sqrt{\log\log x}$ *при* $N \leqslant x \leqslant N+M$. *Пусть, далее,*

$$F = F(N), \quad \delta = \exp\left\{-(ec_0)^2\,\frac{\log\log N}{F}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N < n \leqslant N+M$ *найдётся не менее* $M\delta$ *номеров* n, *удовлетворяющих условию* $\Delta(n) \leqslant -(\pi F)^{-1}\log\log N$, *и не менее* $M\delta$ *номеров, удовлетворяющих условию* $\Delta(n) > (\pi F)^{-1}\log\log N$.

3) Некоторые характеристики последовательностей Δ_n и $\Delta(n) = S(t_n+0)$ оказываются во многом схожи, и это обстоятельство оказывается ключевым в доказательстве формул Сельберга.

Эта «схожесть» находит отражение в следующих леммах главы 3.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{e}(a,b)$ *и* $\mathfrak{f}(a,b)$ *обозначают, соответственно, числа решений неравенств* $a < \Delta_n \leqslant b$ *и* $a < \Delta(n) \leqslant b$ *с условием* $N < n \leqslant N+M$. *Тогда для любых целых чисел* a *и* b, $a < b$, *справедливо соотношение*

$$\mathfrak{e}(a,b) \,=\, \mathfrak{f}(-(b+1),-(a+1)) \,+\, \theta(|a|+|b|),$$

в котором $|\theta| \leqslant 1$.

Лемма 2. *При любом целом* $k \geqslant 1$ *справедливо тождество*

$$\sum_{t_N<\gamma_m\leqslant t_{N+M}} \Delta_m^k \,=\, (-1)^k \sum_{n=N+1}^{N+M} \Delta^k(n) \,+\, P_k(\alpha) - P_k(\beta),$$

в котором $\alpha = -\Delta(N)$, $\beta = -\Delta(N+M)$,

$$P_k(u) \,=\, u^k \,+\, \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k+1}{\nu}B_\nu\, u^{k+1-\nu},$$

а B_ν – *числа Бернулли.*

Леммы 1 и 2 независимо друг от друга позволяют вывести формулы Сельберга из теоремы 3. Кроме того, лемма 1 позволяет перенести утверждения теорем 4 - 6 на случай последовательности Δ_n. Основным результатом главы 3 является следующая

Теорема 7. *Все утверждения теорем* 3 - 6 *остаются справедливыми при замене в них величин* $\Delta(n)$ *членами последовательности* Δ_n. *В частности, аналоги формул* (2) *и* (3) *Сельберга справедливы и в случае «короткого» промежутка* $N < n \leqslant N+M$ *изменения* n.

Также оказывается, что величины Δ_n хорошо приближаются значениями $S(t)$ в точках разрыва, т.е. числами $S(\gamma_n \pm 0)$, а также величинами

$$(\gamma_n - t_n)\frac{\log n}{2\pi}.$$

Поэтому прямым следствием формул Сельберга оказываются асимптотические выражения для сумм

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} |S(\gamma_n \pm 0)|^{2a}, \qquad \sum_{n=N+1}^{N+M} |\gamma_n - t_n|^{2a}, \quad a > 0.$$

Кроме того, методы, использованные при доказательстве теорем 5 и 6, позволяют исследовать распределение величин $S(\gamma_n \pm 0)$, $\gamma_n - t_n$. Доказательства соответствующих утверждений также содержатся в главе 3.

4) Из формул Сельберга (2), (3) несложно заключить, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \Delta_n = -\infty, \qquad \limsup_{n\to+\infty} \Delta_n = +\infty. \tag{4}$$

Связь величин Δ_n с аргументом дзета-функции Римана $\zeta(s)$ позволяет воспользоваться наиболее точными на сегодняшний день результатами о порядке роста функции $S(t)$ и значительно уточнить соотношения (4). На этом пути получается

Теорема 8. *Существует положительная постоянная c, зависящая лишь от ε и такая, что*

$$\max_{N<n\leqslant N+M}\{\pm\Delta_n\} \geqslant c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}.$$

Если верна гипотеза Римана, то при любом μ с условием

$$\frac{1}{2\pi}(\log N)^2(\log\log N)^{-3/2} < \mu \leqslant \frac{N}{4}$$

справедливы неравенства:

$$\max_{N-3\mu<n\leqslant N+2\mu}\{\pm\Delta_n\} \geqslant \frac{1}{400}\left(\frac{\log \mu}{\log\log \mu}\right)^{1/2}.$$

Непосредственным её следствием является

Теорема 9. *При $n \to +\infty$ справедливы следующие соотношения:*

$$\gamma_n - t_n \;=\; \Omega_{\pm}\big((\log n)^{-\,2/3}(\log\log n)^{-\,1/3}\big),$$
$$S(\gamma_n + 0) = \Omega_{+}\Bigg(\Big(\frac{\log n}{\log\log n}\Big)^{1/3}\Bigg), \quad S(\gamma_n - 0) = \Omega_{-}\Bigg(\Big(\frac{\log n}{\log\log n}\Big)^{1/3}\Bigg).$$

Если гипотеза Римана верна, то

$$\gamma_n - t_n \;=\; \Omega_{\pm}\big((\log n)^{-\,1/2}(\log\log n)^{-\,1/2}\big),$$
$$S(\gamma_n + 0) = \Omega_{+}\Bigg(\Big(\frac{\log n}{\log\log n}\Big)^{1/2}\Bigg), \quad S(\gamma_n - 0) = \Omega_{-}\Bigg(\Big(\frac{\log n}{\log\log n}\Big)^{1/2}\Bigg)$$

при неограниченном возрастании n.

Верхняя оценка величин $|\Delta_n|$ оказывается теснейшим образом связана с верхней оценкой функции $|S(t)|$:

Теорема 10. *Пусть $f(t)$ - положительная функция, неограниченно возрастающая при $t \to +\infty$ и такая, что при всех $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство $|S(t)| \leqslant f(t)$. Тогда при всех $n \geqslant n_0$ имеет место оценка: $|\Delta_n| \leqslant f(n) + 0.01$. В частности, при сколь угодно малом $\delta > 0$ справедливы неравенства*

$$|\Delta_n| \;<\; (0.138 + \delta)\log n, \quad \text{и} \quad |\Delta_n| \;<\; (0.5 + \delta)\,\frac{\log n}{\log\log n},$$

если верна гипотеза Римана.

Ряд дополнительных соображений, в основе которых лежит метод Сельберга оценки числа перемен знака вещественной функции на заданном отрезке, даёт возможность доказать, что всякое целочисленное значение k, лежащее между максимумом и минимумом Δ_n, $N < n \leqslant N+M$, принимается величиной Δ_n на указанном промежутке, и притом достаточно часто. Так, имеет место

Теорема 11. *Пусть целое число k удовлетворяет условию*

$$|k| \leqslant \frac{1}{12\pi\sqrt{\pi}}\,\sqrt{\log\log N}. \tag{5}$$

Тогда для числа $\mathfrak{F}_k$ номеров n с условиями $N < n \leqslant N + M$, $\Delta_n = k$, выполнено неравенство

$$\mathfrak{F}_k \geqslant M\exp\big\{-\,6\pi\sqrt{\pi}(|k| + c)\sqrt{\log\log N}\big\},$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$ - некоторая постоянная.

В частном случае $k = 0$ оценку теоремы 11 можно заменить более точной, если воспользоваться результатами А. Сельберга[19)] и К.-М. Тсанга[20)] о числе точек перемены знака $S(t)$:

Теорема 12. *Для числа $\mathfrak{F}_0$ ординат γ_n промежутка $N < n \leqslant N+M$, удовлетворяющих закону Грама (т.е. таких, для которых $\Delta_n = 0$) справедлива оценка*

$$\mathfrak{F}_0 > Me^{-c(\log\log\log N)^2}, \quad c = c(\varepsilon) > 0.$$

Если гипотеза Римана верна, то

$$\mathfrak{F}_0 > Me^{-c\log\log\log N} = M(\log\log N)^{-c}.$$

Отметим, что существует гипотеза, согласно которой величина $\mathfrak{F}_0$ должна иметь порядок $M(\log\log N)^{-0.5}$.

Ограничение (5) на параметр k, которое содержится в условии теоремы 11, в ряде случаев оказывается обременительным. За счёт некоторого ослабления точности оценок область изменения k можно несколько расширить. Так, имеет место

Теорема 13. *Пусть $\lambda > 0$ - сколь угодно большое фиксированное число, $N \geqslant N_0(\varepsilon, \lambda)$. Тогда при любом целом k с условием $|k| \leqslant \lambda\sqrt{\log\log N}$ справедлива оценка:*

$$\mathfrak{F}_k \geqslant \frac{\kappa M}{\log N}(\log\log\log\log N)^{-1}, \quad \kappa = \frac{\exp\{-(2\pi\lambda)^2\}}{100\lambda}.$$

Кроме того, существует постоянная $c = c(\varepsilon) > 0$ такая, что для любого целого k, удовлетворяющего неравенствам

$$|k| \leqslant c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}$$

имеет место оценка: $\mathfrak{F}_k \geqslant N^{\varepsilon}$.

[19)] A. Selberg, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Archiv Math. Naturvid.*, **48**:5(1946), 89-155 (см. также: A. Selberg, Collected papers. Vol. I. – Berlin, Springer-Verlag, 1989, 214-280).

[20)] K.-M. Tsang, The distribution of the values of the Riemann zeta-function. A dissertation presented to the faculty of Princeton University in candidacy for the degree of Doctor of Philosophy. Princeton, 1984.

5) Закон Грама (в интерпретации Сельберга) выполняется редко: как следует из результатов главы 3, равенство $\Delta_n = 0$ имеет место не более чем для $O\bigl(N(\log\log\log N)^{-0.5}\bigr) = o(N)$ номеров $n \leqslant N$. Отсюда несложно заключить, что и неравенство

$$\Delta_n \Delta_{n+1} \neq 0 \tag{6}$$

выполняется для всех $n \leqslant N$, за исключением $o(N)$ номеров.

Далее, из теорем главы 3 о распределении значений Δ_n следует, что как число положительных, так и число отрицательных среди первых n членов последовательности Δ_n при $N \to +\infty$ асимптотически эквивалентно $0.5N$. Естественно поставить следующий вопрос: как распределены знаки величин Δ_n, Δ_{n+1}, отвечающих условию (6)? Эта задача обобщается на случай трёх, четырёх и вообще любого фиксированного числа s подряд идущих величин $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$.

Оказывается, что среди всех возможных 2^s наборов длины s, составленных из «$+1$» и «-1», имеется два «особых» набора $\mathbf{e}_s^+ = (1, 1, \ldots, 1)$ и $\mathbf{e}_s^- = (-1, -1, \ldots, -1)$, каждому из которых отвечает $0.5N + o(N)$ наборов $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$, $n \leqslant N$, с соответствующим распределением знаков. Все же остальные комбинации знаков или вовсе не реализуются, или же встречаются не более чем в $o(N)$ случаях. Это означает, грубо говоря, что перемены знака в последовательности Δ_n встречаются очень редко. Все эти результаты находят отражение в следующей теореме главы 5:

Теорема 14. *Пусть $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ - произвольный набор с условиями $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \ldots, s$, $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_s$, и пусть $E = E_s(\mathbf{e})$ - множество тех n, для которых выполнены равенства*

$$\operatorname{sign}(\Delta_{n+j-1}) = \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Тогда для числа $\mu = \mu(E; N, M)$ номеров n промежутка $N < n \leqslant N + M$, принадлежащих E, справедлива формула

$$\mu = \kappa \cdot \frac{M}{2} + O\bigl(R\bigr), \quad R = \frac{s^2 M \log\log\log\log N}{\varepsilon\sqrt{\log\log\log N}},$$

где

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{e} = \mathbf{e}^+ \text{ или } \mathbf{e} = \mathbf{e}^-; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а постоянная в знаке O - абсолютная.

Кроме того, оказывается возможным исследовать поведение произведений $|\Delta_n \ldots \Delta_{n+s-1}|$ с условием $n \leqslant N$, отвечающих наборам чисел одного знака. Эти произведения, должным образом нормированные, имеют распределение, сходящееся при $N \to +\infty$ к т.н. гамма-распределению с плотностью

$$g(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}, \quad u > 0.$$

Теорема 15. *Пусть $s \geqslant 2$ - фиксированное целое число, E - любое из множеств $E_s(\mathbf{e}^+), E_s(\mathbf{e}^-)$. Тогда при любом $x > 0$ число $\nu(x)$ номеров n, $N < n \leqslant N + M$, принадлежащих E и отвечающих условию*

$$0 < \bigl|\Delta_n \ldots \Delta_{n+s-1}\bigr| \leqslant \bigl(\pi^{-1}\sqrt{x \log\log N}\,\bigr)^s,$$

выражается формулой

$$\nu(x) = \frac{M}{2}\biggl(\int_0^x g(u)\,du + \frac{2.15\theta}{\sqrt{\log\log\log\log N}}\biggr), \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Теорема 15 позволяют доказать существование сколь угодно большого числа подряд идущих аномально больших или аномально малых значений величины Δ_n. Именно, при любом $s \geqslant 2$ можно указать функции $h(x)$ и $H(x)$ с условиями

$$\frac{h(x)}{\sqrt{\log\log x}} \to 0, \quad \frac{H(x)}{\sqrt{\log\log x}} \to +\infty, \quad x \to +\infty,$$

такие, что каждое из неравенств

$$0 < \Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} \leqslant h(n), \quad \Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} > H(n)$$

имеет бесконечно много решений.

6) Как отмечалось выше, попытка придать формулировке закона Грама вид, наиболее полно отвечающий подмеченной Грамом закономерности, приводит к вопросу о том, могут ли точки Грама совпадать с ординатами нулей $\zeta(s)$ или, что то же, возможно ли при каком-нибудь n равенство $\zeta\bigl(0.5 + it_n\bigr) = 0$.

Методы, используемые в главах 1 - 5 диссертации, позволяют, с одной стороны, показать, что $\zeta\bigl(0.5 + it_n\bigr) \neq 0$ для достаточно большого числа номеров n (и усилить упомянутый ранее результат Й. Штойдинга и

Ю. Калпокаса), и, с другой стороны, показать, что значения $\zeta\bigl(0.5+it_n\bigr)$ могут неограниченно приближаться к нулю.

Основными результатами главы 6 являются следующие утверждения.

Теорема 16. *Пусть Q обозначает количество номеров n с условием $N < n \leqslant N + M$, удовлетворяющих условию $\zeta\bigl(0.5 + it_n\bigr) \neq 0$. Тогда существуют положительные постоянные a_1, a_2, зависящие лишь от ε и такие, что выполняются неравенства:*

$$Q \geqslant Me^{-\,a_1(\log\log\log N)^2},$$

и, если гипотеза Римана верна,

$$Q \geqslant Me^{-\,a_2\log\log\log N} \;=\; M(\log\log N)^{-\,a_2}.$$

Теорема 17. *Пусть $F(u)$ - произвольная монотонная функция, неограниченно возрастающая при $u \to +\infty$ и удовлетворяющая на промежутке $N \leqslant u \leqslant N + M$ неравенствам $1 \ll F(u) \ll \sqrt{\log\log u}$, и пусть $F = F(N)$. Тогда на указанном промежутке найдётся по крайней мере*

$$\frac{MF}{13\sqrt{\log\log N}}\,\exp\bigl(-\,(3/F^2)\log\log N\bigr)$$

номеров n, для которых выполнены неравенства

$$\bigl|\zeta\bigl(0.5 + it_n\bigr)\bigr| \;<\; \exp\bigl(-\,(1/F)\log\log N\bigr).$$

Прямым следствием теоремы 17 является следующая нижняя оценка дискретного момента степени (-1) дзета-функции Римана на критической прямой.

Теорема 18. *При любом фиксированном $\delta > 0$ и $N \geqslant N_0(\varepsilon, \delta)$ имеет место неравенство*

$$\sum_{n=N+1}^{N+M}\bigl|\zeta\bigl(0.5 + it_n\bigr)\bigr|^{-1} \;>\; M\exp\left(\frac{\log\log N}{(\log\log\log N)^{\delta}}\right).$$

Работы автора по теме диссертации

1. М.А. Королёв, О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 115 - 124.

2. М.А. Королёв, Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 75 - 88.

3. М.А. Королёв, О кратных нулях дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 3 - 22.

4. М.А. Королёв, О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:2 (2008), 91 - 104.

5. М.А. Королёв, Гипотеза Сельберга о распределении мнимых частей нулей дзета-функции Римана, *Докл. РАН*, **421**:3 (2008), 308 - 311.

6. М.А. Королёв, Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83 - 118.

7. М.А. Королёв, О формулах Сельберга, связанных с законом Грама, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 129 - 136.

8. М.А. Королёв, О новых результатах, связанных с законом Грама, *Докл. РАН*, **446**:4 (2012), 378 - 379.

9. M.A. Korolev, Gram's Law and the Argument of the Riemann Zeta Function, *Publications de l'Institut Mathëmatique. Nouvelle série* (Beograde), **92**(106) (2012), 53 - 78.

10. М.А. Королёв, О задаче Карацубы, связанной с законом Грама, Теория чисел, алгебра и анализ, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, *Тр. МИАН*, **276**, МАИК, М., 2012, 162 - 172.

11. М.А. Королёв, О законе Грама в теории дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:2 (2012), 67 - 102.

12. М.А. Королёв, О новых результатах, связанных с законом Грама, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:5 (2013), 71 - 94.

Тезисы докладов по теме диссертации опубликованы в следующих сборниках:

1. M.A. Korolev, Gram's law in the theory of Riemann's zeta function, 27$^{\text{th}}$ *Journées Arithmétique* (2011/06/27–07/01, Vilnius, Lithuania). Programme and Abstract book. Vilnius University, Vilnius, Lithuania, 2011, p. 34.

2. M. Korolev, On Gram's law in the theory of Riemann zeta function, *Международная конференция «Диофантовы приближения. Современное состояние и приложения»* (3–8 июля 2011 г., Минск, Беларусь). Тезисы докладов. Институт математики НАН Беларуси, Минск, 2011, 37 - 38.

3. M.A. Korolev, On the small values of the Riemann zeta-function on the critical line, *Elementare und Analytische Zahlentheorie* (*Elementary and Analytic Number Theory*) (Germany, Schloßchney, August 13–18, 2012), eds. T. Christ, N. Oswald, R. Steuding, J. Steuding, Universität Würzburg, Würzburg, 2012, s. 21 - 22.

4. M.A. Korolev, On the moments of some trigonometric sums, 28$^{\text{th}}$ *Journées Arithmétiques* (July 1 - 5, 2013, Grenoble, France). Programme and Abstract book. Institut Fourier – University Joseph Fourier, Grenoble, France, 2013, pp. 58 - 59.

5. M.A. Korolev, On L_p-norms of certain trigonometric polynomials, *Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory* (Palanga, Lithuania, September 01 - September 07, 2013). Programme and Abstract book. Vilnius University, Vilnius, Lithuania, 2013, pp. 24 -26.

Автор искренне благодарит В.А. Быковского, С.А. Гриценко, А. Ивича, С.В. Конягина, А.П. Лауринчикаса, Н.Г. Мощевитина, Ю.В. Нестеренко, А.Н. Паршина, Д.А. Попова, И.С. Резвякову, К.-М.Тсанга и И.Д. Шкредова за интерес к работе и всестороннюю поддержку. Автор весьма признателен М. Балазару за помощь в переводе с французского статьи Грама, Е.И. Иванниковой за неоценимую помощь в оформлении иллюстраций, Р.Н. Бояринову за многочисленные дискуссии по затронутым в диссертации вопросам, а также всем своим родным, без поддержки которых эта работа не была бы написана. Кроме того, в ходе работы автор пользовался поддержкой РФФИ (грант № 12-01-31165 «мол-а»).

Подписано в печать 19.09.2013
тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8