

Программа вступительных экзаменов в аспирантуру МИАН

специальность 1.1.4 – *Теория вероятностей и
математическая статистика*

Раздел 1. «Теория вероятностей»

1. Аксиоматика Колмогорова теории вероятностей. Понятие независимости. Условные вероятности событий. Формула Байеса.
2. Случайные величины: распределения вероятностей, математические ожидания, моменты, характеристические функции. Неравенство Чебышева.
3. Характеристические функции и их свойства. Формула обращения. Сходимость по распределению и теорема непрерывности.
4. Сходимость по вероятности, почти наверное и в среднеквадратичном, их соотношения.
5. Закон больших чисел. Усиленный закон больших чисел.
6. Схема Бернулли. Пуассоновское и нормальное приближения (локальная предельная теорема).
7. Центральная предельная теорема (в форме Ляпунова, Линдеберга–Феллера).
8. Лемма Бореля–Кантелли. Закон нуля или единицы Колмогорова.
9. Условные вероятности и условное математическое ожидание относительно под-сигма-алгебры. Регулярные условные вероятности.

Раздел 2. «Случайные процессы»

1. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданной системой конечномерных распределений.
2. Марковские процессы и полугрупповое свойство. Уравнение Колмогорова–Чепмена.

3. Цепи Маркова. Возвратность и невозвратность состояний. Эргодическая теорема.
4. Марковские процессы со счетным множеством состояний. Прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова.
5. Диффузионные процессы. Прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова.
6. Пуассоновский процесс и винеровский процесс, определение и основные свойства.
7. Процессы с независимыми приращениями. Безгранично-делимые распределения и формула Леви–Хинчина.
8. Стационарные в узком смысле процессы с дискретным временем. Эргодическая теорема Биркгофа–Хинчина.
9. Стационарные в широком смысле процессы с дискретным и непрерывным временем. Корреляционная функция, спектральная функция, спектральная плотность. Теорема Бохнера–Хинчина.
10. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Спектральное представление стационарного случайного процесса (случай дискретного и непрерывного времени).
11. Мартингалы. Теоремы о сходимости мартингалов с дискретным параметром.
12. Стохастический интеграл Ито. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения, теорема о существовании и единственности сильного решения.

Раздел 3. «Математическая статистика»

1. Эмпирическая функция распределения вероятностей. Теорема Гливленко–Кантелли. Критерий Колмогорова.
2. Доверительные интервалы при статистическом оценивании параметров. Многомерное нормальное распределение. Оценивание параметров нормального распределения.

3. Достаточные статистики. Теорема факторизации. Теорема Блэкуэлла–Колмогорова–Рао.
4. Неравенство Рао–Крамера. Эффективные оценки.
5. Оценки максимального правдоподобия и их асимптотические свойства.
6. Проверка статистических гипотез. Лемма Неймана–Пирсона. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения по выборке. Критерий согласия хи-квадрат.
7. Модель линейной регрессии. Оценивание коэффициентов регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса–Маркова.

Список литературы

- [1] Боровков А.А. Теория вероятностей. Изд.4-е. М.: УРСС, 2003
- [2] Боровков А.А. Математическая статистика. Изд.3-е. М.: Физматлит, 2007
- [3] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.:Физматлит, 2005
- [4] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. Изд.2-е. М.: Наука, 1996
- [5] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Изд. 6-е. М.: Наука, 1988
- [6] Крамер Г. Математические методы статистики. Изд.2-е. М.: Мир, 1976
- [7] Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004
- [8] Ширяев А.Н. Вероятность, статистика, случайные процессы - I, II. М.: МГУ, 1980.
- [9] Ширяев А.Н. Вероятность - I, II. Изд.4-е. М.: МЦНМО, 2011.