Программа вступительных экзаменов в аспирантуру МИАН

специальность 1.1.1 – *Вещественный, комплексный и функциональный анализ*

Раздел 1. «Вещественный и функциональный анализ»

1. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
2. Абсолютно непрерывные и сингулярные функции, их связь с интегралом Лебега.
3. Банаховы пространства. Три принципа линейного анализа (теоремы Хана–Банаха, Банаха–Штейнгауза, Банаха об обратном операторе).
4. Слабая сходимость. Теорема о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве.
5. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Компактные операторы.
6. Спектр оператора. Простейшие свойства спектра. Теорема Гильберта–Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
7. Преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. Теорема Планшереля.
8. Обобщенные функции и действия над ними. Преобразование Фурье в S'.

Список литературы

[1] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М: Высшая школа, 2000.

[2] Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.

[3] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

[4] Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002.

[5] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. В 2-х ч. Изд. 2-е. М.: Изд-во МГУ, 1985, 1987.

[6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч.М.: Наука, Физматлит. Ч. 1. 1982; Ч. 2. 1980.

[7] Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

[8] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.

[9] Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

[10] Ульянов П.Л. и др., Действительный анализ в задачах, М., Физматлит, 2005.

[11] Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005.

[12] Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.

Раздел 2. «Комплексный анализ»

1. Дифференцирование функций комплексного переменного: Частные и формальные производные, производная по направлению. Комплексная дифференцируемость, условия Коши–Римана. Голоморфность элементарных функций.

2. Степенные ряды: Лемма Абеля. Формула Коши–Адамара. Почленная дифференцируемость и интегрируемость.

3. Дифференциальные формы: Интегрирование по пути, кривой. Лемма Гурса. Первообразная в звездной области.

4. Интеграл типа Коши: Свойства. Интегральная формула Коши в круге. Ряд Тейлора. Теорема единственности. Принцип максимума. Лемма Шварца. Теорема Лиувилля.

5. Последовательности голоморфных функций: Теорема Вейерштрасса. Теорема Гурвица. Теорема Монтеля (принцип компактности).

6. Ряды Лорана: Свойства. Изолированные особые точки. Теорема Сохоцкого. Мероморфные формы. Вычеты. Теорема о сумме вычетов.

7. Мероморфные и рациональные функции. Теорема Миттаг–Леффлера.

8. Дробно-линейные отображения: Свойства. Автоморфизмы круга и полуплоскости. Метрика Пуанкаре. Сферическая метрика.

9. Голоморфные функции как отображения: Локальная структура. Открытость. Конформность. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип симметрии.

10. Гармонические функции. Связь с голоморфными. Теорема о среднем. Задача Дирихле в круге.

Список литературы

[1] В.В.Горяйнов, Е.С.Половинкин. Лекции по теории функций комплексного переменного, МФТИ, М., 2017

[2] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973

[3] М.А.Евграфов. Аналитические функции, Наука, М., 1991

[4] Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ, ч.1, Наука, М., 1985