Предельная теория зависимых случайных процессов

А. П. Шашкин

(механико-математический ф-т МГУ)

I. Вероятностные меры и слабая сходимость.

1. Вероятностные меры на метрических пространствах.
2. Свойство сходимости последовательности мер. Равносильные условия слабой сходимости. Частные случаи для конечномерного пространства. Относительная компактность.
3. Плотность семейства мер. Теорема Ю.В.Прохорова. Простейшие приложения.
4. Пространства непрерывных функций и cadlag-функций (пространство Скорохода). Характеризация компактности.

II. Примеры исследования зависимых случайных систем.

1. Ассоциированность случайных величин. Элементарные свойства. Примеры.
2. Коэффициенты перемешивания, их свойства. Примеры.
3. Максимальные неравенства и плотность семейства случайных процессов.
4. Некоторые методы получения максимальных неравенств.
5. Доказательство и некоторые обобщения принципа инвариантности Донскера–Прохорова.

III. Сильные предельные теоремы.

1. Приближение случайных векторов векторами с независимыми компонентами (дезинтеграция случайного вектора).
2. Схема доказательства сильного принципа инвариантности. Его следствия.
3. Закон повторного логарифма для стационарных случайных процессов.

Аннотация

Одно из крупнейших достижений теории вероятностей 20 века – теория функциональных предельных теорем, которая рассматривает последовательности не собственно случайных величин, а случайных процессов, определенным образом построенных по случайным величинам и рассматриваемых как случайные точки в функциональном пространстве. Этот подход, разработанный П. Эрдешем, М. Донскером, Ю.В. Прохоровым, А.В. Скороходом, В. Варадарайном, А.А. Боровковым, В. Штрассеном, позволяет из одного результата о сходимости случайных процессов к процессу с известным распределением (скажем, гауссовскому) получить сразу много предельных теорем, в том числе невыводимых стандартными путями (например, о сходимости нормированных максимумов частичных сумм). Обычно результаты этого типа не находят себе места в стандартном курсе теории случайных процессов.

В классической теории вероятностей, как правило, рассматриваются независимые случайные величины и векторы. Однако во многих реально существующих случайных системах (возникающих в теории ферромагнетиков, теории просачивания, биологических системах с локальным взаимодействием, астрофизике, случайных мерах) это условие нельзя считать выполненным, а нужно заменять на условие "слабой зависимости", когда расположенные близко друг к другу случайные величины существенно зависят друг от друга, а с удалением друг от друга эта зависимость слабеет (но ее все же нельзя считать отсутствующей). В курсе рассматриваются два важных класса зависимых систем: ассоциированные (положительно зависимые) случайные величины и процессы с перемешиванием (альфа- и бета- видов), и приводятся примеры, показывающие, что эти понятия представляют практический интерес. Для таких процессов будут доказаны результаты о приближении семейств частичных сумм хорошо изученными гауссовскими процессами.

Предполагается знание стандартного курса теории вероятностей, а также функционального анализа.