

Теория катастроф (разрушений) глобальных решений нелинейных уравнений и неравенств с частными производными

Лектор – Станислав Иванович Похожаев

Практические занятия будет проводить докторант МИАН Е.И. Галахов

Нелинейный анализ условно можно разделить на локальный и глобальный анализы. Локальный анализ развит сравнительно полно, в отличие от глобального. Что касается глобального анализа, то его основное содержание посвящено проблеме разрешимости в целом и исследованию структуры множества решений нелинейных уравнений, а также ряду других связанных вопросов. Это направление нелинейного глобального анализа приводит к проблеме нахождения достаточных условий разрешимости в целом нелинейных задач.

Что касается необходимых условий разрешимости в целом нелинейных задач, то, как ни странно, это направление стало развиваться сравнительно недавно. Теория необходимых условий разрешимости в целом нелинейных задач, очевидно, в определенной мере эквивалентна теории катастроф (разрушений, blow-up) глобальных решений нелинейных уравнений.

Дело в том, что, как правило, нелинейные уравнения допускают локальные решения при соответствующих условиях. Долгое время считалось, что большинство локальных решений допускает продолжение до глобальных решений при достаточно общих условиях, и проблема продолжения «упирается» только в технику получения соответствующих априорных оценок.

Неожиданные результаты С.И. Похожаева (1965), относящиеся к нелинейным эллиптическим задачам, Х. Фуджиты (1966), относящиеся к нелинейным параболическим уравнениям, и Ф. Джона (1979), относящиеся к нелинейным гиперболическим уравнениям, открыли существование критических показателей нелинейностей, которые определили классы нелинейных задач, для которых в принципе, т.е. при сколь угодно малых и гладких данных задачи, не существует глобальных решений.

Методы исследования таких уравнений были основаны на методе сравнения и относились к квазилинейным уравнениям второго порядка. В 1979 г. С.И. Похожаев предложил достаточно общий подход к этой blow-up-проблеме, основанный на концепции нелинейной емкости, порождаемой нелинейными операторами. В дальнейшем этот подход был развит в совместных работах с Э. Митидиери, А. Тесеи, Л. Вероном и другими математиками. В результате была составлена «таблица Менделеева» нелинейных уравнений, для которых были вычислены критические показатели.

Предлагаемый курс ставит целью ознакомить слушателей с элементами этого подхода на примерах как нелинейных уравнений с частными производными произвольного порядка, так и на примере нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, включая при этом как системы таких уравнений, так и соответствующие неравенства.

Наряду с известными результатами, полученными за последние годы, будут представлены также проблемы, остающиеся открытыми в этой области и по сей день.