

### Солитоны и уединенные волны в жидких и упругих средах: существование и динамическая устойчивость

Андрей Теймуразович Ильичев

Рассматриваются общие вопросы существования различных типов семейств уединенных волн в диспергирующих средах. Для плоскопараллельных движений основное внимание уделяется характерным для обратимых волновых движений типам уединенных волн: классическим и обобщенным уединенным волнам, а также уединенным волновым пакетам. Классические уединенные волны в главном приближении по малому параметру – амплитуде волны – в случае общего положения имеют форму солитонов уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ). В типичной для плоскопараллельных движений ситуации классические уединенные волны возникают как бифуркации из нулевого волнового числа спектра линейных волн. При выполнении ряда условий происходит замещение уединенной волны обобщенно-уединенной волной – бегущей волной, подобной классической уединенной волне, но имеющей периодическую асимптотику на бесконечности. Еще один тип уединенной волны – уединенный волновой пакет – возникает в диспергирующих средах в результате так называемого 1:1 резонанса, когда достигается равенство фазовой и групповой скоростей. Наряду с исследованием существования упомянутых волновых структур рассматриваются сопутствующие вопросы о характере влияния наличия этих структур в системе на специфику распада локализованных возмущений и устойчивость периодических волн. Общие результаты применяются к изучению вопросов существования уединенных волн на примере системы уравнений Эйлера, описывающей распространение плоских и пространственных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины при наличии поверхностного натяжения, а также на примере полной системы уравнений гидродинамической модели холодной бесстолкновительной квазинейтральной плазмы в магнитном поле.

Излагается теория орбитальной устойчивости семейств классических уединенных волн, описываемых трансляционно-инвариантными бесконечномерными гамильтоновыми системами уравнений. Для гидродинамических приложений теория применяется к исследованию динамической устойчивости солитонов уравнения КдВ и его обобщений. Устойчивость классических уединенных волн в упругих средах рассмотрена на примере уединенных волн в нерастяжимых стержнях (эластики Эйлера), волн сжатия в упругих стержнях и волн в композиционных материалах.

#### *Программа курса*

Обратимые среды. Понятие солитона и уединенной волны (солитоноподобной структуры). Различные типы уединенных волн. Условия их существования в системе, определяемые свойствами собственных линейных мод. Общая характеристика влияния типа уединенной волны, присутствующей в системе, на характер распада локализованного возмущения. Этапы исследования существования солитоноподобных структур в обратимых средах.

Теорема о центральном многообразии для бесконечномерных динамических систем обратимых уравнений. Типы бифуркаций. Теорема о приведении к нормальной форме для обратимых систем уравнений. Простой резонанс, резонанс длинной и короткой волн, 1:1 резонанс и соответствующие им нормальные формы. Типы солитоноподобных структур: классические уединенные волны, обобщенно-уединенные волны, уединенные волновые пакеты. Теория устойчивости граничных состояний бесконечномерных гамильтоновых систем. Линейная неустойчивость классических уединенных волн. Функция Эванса.

Система уравнений Эйлера. Плоскопараллельные движения идеальной несжимаемой жидкости. Волны на поверхности с учетом эффектов поверхностного натяжения. Длинноволновые приближения. Уравнения КдВ и Кавахары. Солитоны и классические уединенные волны, обобщенно-уединенные волны. Подсчет амплитуды периодической составляющей обобщенно-уединенной волны. Динамическая устойчивость солитонов и классических уединенных волн. Квазистационарное излучение периодической волны при распаде локализованного возмущения. Устойчивость излучения. Уединенные волновые пакеты и самофокусировка. Уравнение Шредингера. Бесконечномерная динамическая система, описывающая бегущие волны в общем случае системы уравнений Эйлера. Резольвентные оценки. Спектр и резонансы. Классические уединенные волны, обобщенно-уединенные волны, уединенные волновые пакеты. Темные солитоны.

Вывод уравнений холодной бесстолкновительной плазмы в магнитном поле в рамках гидродинамического описания (модель двух жидкостей). Линейные волновые резонансы. Динамическая система для бегущих волн. Классические уединенные волны. Быстрые и медленные магнитозвуковые обобщенно-уединенные волны. Уединенные волновые пакеты.

Пространственные волны в идеальной жидкости. Спектр и резонансы. Длинноволновый предел: обобщенное уравнение Кадомцева–Петвиашвили. Простой резонанс. Волноводы. Неустойчивость несущей волны (первичная неустойчивость). Самоканализация. Неустойчивость волновода (вторичная неустойчивость). Коллапс.

Нерастяжимые стержни. Эластика Эйлера. Уединенная волна (петля Эйлера). Запись уравнений элаستيку в гамильтоновом виде. Условия орбитальной устойчивости и неустойчивости петли Эйлера. Упругий потенциал. Волны деформации в нелинейно-упругом стержне. Уравнения Буссинеска. Классические уединенные волны сжатия, необходимые и достаточные условия их орбитальной устойчивости. Квазипоперечные волны в композите. Классические уединенные волны. Критерий орбитальной устойчивости.