ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 151, № 1
апрель, 2007

В. В. Козлов[*], Д. В. Трещев[*†]

ТОНКАЯ И ГРУБАЯ ЭНТРОПИЯ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Рассматриваются динамические системы с фазовым пространством Γ, сохраняющие меру μ. Разбиение Γ на куски конечной μ-меры порождает грубую энтропию – функционал на пространстве вероятностных мер на Γ, обобщающий обычную (тонкую) энтропию Гиббса. Изучаются аппроксимационные свойства грубой энтропии при измельчении разбиения, а также свойства грубой энтропии как функции времени.

Ключевые слова: инвариантная мера, энтропия Гиббса, грубая энтропия.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть (Γ, dist) – метрическое пространство с мерой μ, а ν – вероятностная мера с измеримой плотностью $\rho > 0$:

$$d\nu = \rho\, d\mu, \qquad \nu(\Gamma) = \int_\Gamma \rho\, d\mu = 1.$$

В частности, $\rho \in L_1(\Gamma, \mu)$.

Пусть $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ – разбиение Γ на измеримые подмножества

$$\gamma_j = \mu(\Gamma_j), \qquad 0 < \mu(\Gamma_j) < \infty, \quad j \in J.$$

Множество J считается конечным или счетным. Величину

$$\sup_{j \in J} (\operatorname{diam} \Gamma_j) \leqslant \infty$$

(диаметр берется в метрике пространства Γ) назовем диаметром разбиения $\{\Gamma_j\}$. Положим

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{\gamma_j}, \qquad \lambda_j = \int_{\Gamma_j} \rho\, d\mu, \qquad \sum_{j \in J} \lambda_j = 1,$$

[*]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: kozlov@pran.ru

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: treschev@mi.ras.ru

и рассмотрим новую плотность $\bar\rho\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ такую, что $\bar\rho|_{\Gamma_j} = \rho_j$, $j \in J$. Будем называть $\bar\rho$ *грубой* плотностью. Соответствующая мера $\bar\nu$, $d\bar\nu = \bar\rho\, d\mu$, также является вероятностной, поскольку

$$\int_\Gamma \bar\rho\, d\mu = \sum_{j\in J}\int_{\Gamma_j} \rho_j\, d\mu = \sum_{j\in J}\rho_j\gamma_j = 1.$$

Определим функционал $\mathbf{S}$ такой, что для любой неотрицательной μ-измеримой функции $\alpha\colon \Gamma \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{S}(\alpha) = -\int_\Gamma \alpha\ln\alpha\, d\mu$$

при условии, что интеграл сходится к некоторой конечной или бесконечной величине. Как обычно, функцию $\alpha\ln\alpha$ доопределяем нулем при $\alpha = 0$.

Определим *тонкую энтропию* $s = \mathbf{S}(\rho)$, а также *грубую энтропию* $\bar s = \mathbf{S}(\bar\rho)$. Выполнено равенство

$$\bar s = -\sum_{j\in J}\gamma_j\rho_j\ln\rho_j = -\sum_{j\in J}\lambda_j\ln\lambda_j + \sum_{j\in J}\lambda_j\ln\gamma_j. \tag{1.1}$$

В частности, если все γ_j равны друг другу, имеем

$$\bar s = -\sum_{j\in J}\lambda_j\ln\lambda_j + \ln\gamma, \qquad \gamma = \gamma_j, \quad j\in J,$$

так что с точностью до аддитивной постоянной (зависящей только от γ) грубая энтропия совпадает с *информационной* энтропией $-\sum\lambda_j\ln\lambda_j$. Отметим, что формула для энтропии вида (1.1) в случае дискретного распределения вероятностей используется в теории равновесных состояний (см., например, монографию [1]).

При фиксированных γ_j максимальное значение (1.1) достигается при

$$\lambda_j = \frac{\gamma_j}{\sum_{i\in J}\gamma_i}$$

при условии $\mu(\Gamma) < \infty$. Если мера μ фазового пространства бесконечна и все γ_j ограничены, то $\sup\bar s = +\infty$.

Как установил Гиббс, справедливо неравенство

$$s \leqslant \bar s. \tag{1.2}$$

Оно является простым следствием неравенства Йенсена для выпуклой функции $\rho\ln\rho$ (см. поучительное обсуждение в монографии [2]).

2. ПРИМЕР ОТСУТСТВИЯ АППРОКСИМАЦИИ

Если $\mu(\Gamma) = \infty$, то, вообще говоря, грубая энтропия не аппроксимирует тонкую, даже если диаметр разбиения сколь угодно мал.

Пример 1. Пусть $\Gamma = \mathbb{R}$ с мерой Лебега. Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность такая, что

$$0 \leqslant a_n < 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln a_n = -\infty.$$

В качестве a_n можно взять, например, $c/(n \ln^{1+\varepsilon} n)$, $0 < \varepsilon < 1$.

Рассмотрим вероятностную меру ν с плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [n, n + a_n] \text{ для некоторого } \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{для остальных } \quad x. \end{cases}$$

Тонкая энтропия s такой меры, очевидно, равна нулю.

Для любого целого $K > 0$ рассмотрим разбиение

$$\Gamma_j = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \frac{j}{K} \leqslant x < \frac{(j+1)}{K} \right\}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Диаметр разбиения $\{\Gamma_j\}$ равен $1/K$.

Предложение. *Для любого целого $K > 0$ грубая энтропия $\bar{s}$ равна $+\infty$.*

Доказательство. Имеем равенство

$$\bar{s} = -\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{K} \rho_j \ln \rho_j, \qquad \rho_j = K \int_{j/K}^{(j+1)/K} \rho(x)\, dx \leqslant 1.$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $a_n < 1/K$. Тогда для $n > N$ получаем $\rho_{Kn} = K a_n$.

Так как $\rho_j \ln \rho_j < 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$, имеем оценку

$$\bar{s} \geqslant -\sum_{n>N} \frac{1}{K} \rho_{Kn} \ln \rho_{Kn} = -\sum_{n>N} a_n \ln(K a_n) = +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Это утверждение опровергает расхожее представление о приближении грубой энтропии к тонкой при измельчении разбиения (ср. с [3], [4]). Стоит еще отметить, что в случае $\mu(\Gamma) = \infty$ грубая плотность, вообще говоря, не стремится к тонкой (в норме $L_1 = L_1(\Gamma, \mu)$) при неограниченном уменьшении диаметра разбиения. Более того, грубая плотность не стремится к тонкой даже в слабом смысле. Слабая сходимость последовательности функций ρ_n из L_1 к функции $\rho \in L_1$ означает, что

$$\int_\Gamma \rho_n \varphi \, d\mu \to \int_\Gamma \rho \varphi \, d\mu$$

для любой пробной функции $\varphi \in L_\infty(\Gamma, \mu)$.

3. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

3.1. Компактный случай. В компактном случае грубая энтропия (плотность), как правило, приближает тонкую. Основным требованием здесь является согласованность на Γ структур метрического и измеримого пространств. А именно, мы предполагаем, что пространство $C^0(\Gamma)$ непрерывных функций на Γ плотно в $L_1(\Gamma,\mu)$.

Теорема 1. *Предположим, что пространство Γ компактно, $\mu(\Gamma)=1$, $C^0(\Gamma)$ плотно в $L_1(\Gamma,\mu)$. Тогда при неограниченном уменьшении диаметра разбиения $\{\Gamma_j\}$ плотность $\bar\rho$ с любой наперед заданной точностью аппроксимирует ρ в метрике $L_1(\Gamma,\mu)$.*

Иначе говоря, при неограниченном уменьшении диаметра разбиения грубая плотность слабо сходится к тонкой плотности. Последнее свойство представляется существенным при переходе от микро- к макроописанию (к исследованию эволюции средних значений динамических величин).

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении (см. п. П.1).

Теорема 2. *Предположим, что пространство Γ компактно, $\mu(\Gamma)=1$, $C^0(\Gamma)$ плотно в $L_1(\Gamma,\mu)$ и $|s|<\infty$. Тогда при неограниченном уменьшении диаметра разбиения $\{\Gamma_j\}$ энтропия $\bar s$ с любой наперед заданной точностью аппроксимирует s.*

Доказательство теоремы 2 опирается на две леммы.

Лемма 1. *Теорема 2 верна при дополнительном предположении $\rho<\Delta$ для некоторого $\Delta>1$.*

Пусть, как обычно, e – основание натурального логарифма.

Лемма 2. *Теорема 2 верна при дополнительном предположении $\delta<\rho<\Delta$ для некоторых $\delta\in(0,1/e)$ и $\Delta>1$.*

Для доказательства теоремы 2 докажем
импликацию лемма 1 $\Longrightarrow$ теорема 2 (см. приложение, п. П.2),
импликацию лемма 2 $\Longrightarrow$ лемма 1 (см. приложение, п. П.3) и
лемму 2 (см. приложение, п. П.4).

Отметим, что в теоремах 1 и 2 условие $\sup_{j\in J}\operatorname{diam}(\Gamma_j)\to 0$ нельзя заменить более слабым условием $\sup_{j\in J}\mu(\Gamma_j)\to 0$. Приведем простой пример. Пусть Γ – квадрат

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

μ – стандартная мера Лебега на Γ, $\rho(x,y)=y$, а измеримые куски Γ_j разбиения Γ – полоски

$$\left\{\frac{j-1}{N}\leqslant x\leqslant\frac{j}{N},\quad 0\leqslant y\leqslant 1\right\},\qquad j=1,\dots,N.$$

Тогда $\lim_{N\to\infty}\mu(\Gamma_j)=0$, однако диаметр Γ_j к нулю не стремится. Легко показать, что для типичной (в любом разумном смысле) плотности $\rho(x,y)$

$$\lim_{N\to\infty}\bar\rho\neq\rho,\qquad \lim_{N\to\infty}\bar s\neq s.$$

3.2. Некомпактный случай. Если плотность ρ достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности, грубая энтропия аппроксимирует тонкую и в некомпактном случае. Чтобы сформулировать точный результат, нам потребуются некоторые определения.

Определение 1. Пространство $(\Gamma, \mu, \mathrm{dist})$ имеет тип n, если существует последовательность компактов $K_0, K_1, \dots$ таких, что

а) $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset \Gamma$;

б) $\Gamma = \bigcup_{l=0}^{\infty} K_l$;

в) $\mu(K_0) < \infty$, $\mu(K_{l+1} \setminus K_l) \leqslant Cl^{n-1}$ для некоторой постоянной $C > 0$;

г) для любых точек $x \in K_l, y \in K_s$ неравенство $\mathrm{dist}(x, y) < 1$ возможно лишь в случае $|l - s| \leqslant 1$.

Простейшим примером пространства типа n является $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега и евклидовой метрикой. В качестве компактов K_j здесь можно взять шары радиусов j с общим центром.

Теорема 3. *Предположим, что*

1) *пространство* $(\Gamma, \mu, \mathrm{dist})$ *имеет тип* n;

2) $C^0(K_l)$ *плотно в* $L_1(K_l, \mu)$ *для всех* $l = 0, 1, \dots$;

3) $\rho|_{K_l} < c_\rho l^{-n-\delta}$, $l = 0, 1, \dots$, *где* c_ρ *и* δ *– положительные постоянные*;

4) $|s| < \infty$.

Тогда при неограниченном уменьшении диаметра разбиения $\{\Gamma_j\}$ *энтропия* $\bar{s}$ *с любой наперед заданной точностью аппроксимирует* s.

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении (п. П.5).

4. ПРОБЛЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ ПЛОТНОСТИ

Пусть теперь Γ – фазовое пространство динамической системы, задаваемой потоком (однопараметрической группой преобразований) g^t, $t \in \mathbb{R}$, сохраняющим меру μ. Рассмотрим вероятностную меру $\nu = \nu^t$ с μ-измеримой плотностью $\rho = \rho^t \geqslant 0$; $d\nu^t = \rho^t \, d\mu$. По определению для любого $t \in \mathbb{R}$ и любого измеримого множества $D \subset \Gamma$

$$\nu^t(D) = \nu^0(g^{-t}(D)).$$

Тогда $\rho^t = \rho^0 \circ g^t$. Если Γ – гладкое многообразие, а g^t – поток, задаваемый векторным полем v, то в локальных координатах ρ^t удовлетворяет уравнению Лиувилля[1)]

$$\frac{\partial \rho^t}{\partial t} - \mathrm{div}(\rho^t v) = 0.$$

Грубая плотность $\bar{\rho}^t$ определяется следующим образом:

$$\bar{\rho}^t|_{\Gamma_j} = \rho_j(t) = \frac{1}{\gamma_j} \int_{\Gamma_j} \rho^t \, d\mu.$$

[1)] Традиционно в уравнении Лиувилля перед вторым слагаемым стоит знак плюс. Уравнение, используемое здесь, получается из стандартного уравнения Лиувилля в результате замены $t \mapsto -t$.

В первую очередь нас будут интересовать гамильтоновы системы, хотя многие результаты справедливы и для систем более общего вида. В гамильтоновом случае μ – инвариантная мера Лиувилля – элемент объема фазового пространства. Для натуральных систем, конечно, $\mu(\Gamma) = \infty$, но ограничение μ на уровень энергии может оказаться конечной мерой.

В конструкциях, связанных с энтропией Гиббса, важную роль играет существование пределов

$$\lim_{t\to+\infty} \rho^t, \qquad \lim_{t\to-\infty} \rho^t. \tag{4.1}$$

Указанные пределы следует понимать в смысле слабой сходимости в одном из функциональных пространств, важнейшими из которых в данном контексте являются пространства $L_1(\Gamma, \mu)$ и $L_2(\Gamma, \mu)$. Существование аналогичных пределов для грубых плотностей $\bar{\rho}^t$ также представляет значительный интерес.

Хорошо известно, что плотность ρ^t, вообще говоря, не имеет предела при $t \to \infty$. Это обстоятельство является основным препятствием к обоснованию "нулевого" начала термодинамики в теории ансамблей Гиббса. Одна из попыток преодоления этой трудности состоит во введении грубой плотности $\bar{\rho}^t$, порожденной разбиением $\{\Gamma_j\}$ фазового пространства. Гиббс пытался доказать (см. монографию [5], гл. XII), что в типичном случае грубая плотность $\bar{\rho}^t$ сходится при $t \to \infty$ к некоторой функции, зависящей лишь от полной энергии гамильтоновой системы. "Пытаться доказать это утверждение почти безнадежно; оно является более сильным, чем эргодическая теорема. Известные доводы самого Гиббса (основанные на аналогиях с перемешиванием жидкостей), даже если отбросить содержащиеся в них существенные ошибки, служат в лучшем случае указанием на правдоподобность этой "теоремы"" (см. монографию [2], гл. III).

Впрочем, как замечает сам Гиббс, для *линейных* гамильтоновых систем грубая плотность $\bar{\rho}^t$ осциллирует и вообще не имеет предела при неограниченном возрастании времени. С другой стороны, предположение Гиббса заведомо справедливо для гамильтоновых систем с перемешиванием на изоэнергетических поверхностях. Это наблюдение принадлежит Крылову [3], однако он не заметил важного обстоятельства: для систем с перемешиванием пределы грубой плотности $\bar{\rho}^t$ при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$ *совпадают*. Такая симметрия прошлого и будущего (вытекающая из обратимости натуральных гамильтоновых систем) противоречит традиционным представлениям об однонаправленности приближения изолированной системы к состоянию теплового равновесия.

Ниже мы обсуждаем предположение Гиббса о приближении к тепловому равновесию (в несколько ослабленной формулировке) *квазиоднородных* гамильтоновых систем. Напомним, что гамильтонова система

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \qquad \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

называется квазиоднородной, если существуют вещественные постоянные (веса́ квазиоднородности) α, β, γ, $\alpha + \beta + 1 = \gamma$, такие, что для всех $\lambda > 0$

$$H(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^\gamma H(x, y).$$

Иначе говоря, уравнения Гамильтона инвариантны при подстановках

$$t \mapsto \frac{t}{\lambda}, \qquad x \mapsto \lambda^{\alpha} x, \qquad y \mapsto \lambda^{\beta} y.$$

Как обычно, в качестве инвариантной меры μ берется мера Лиувилля, имеющая единичную плотность в координатах (x, y).

Приведем два примера.

Пример 2. Системы с однородным потенциалом

$$H = \frac{1}{2} \sum y_j^2 + V_m(x),$$

где m – степень однородности потенциальной энергии V_m. Здесь

$$\alpha = \frac{2}{m-2}, \qquad \beta = \frac{m}{m-2}, \qquad \gamma = \frac{2m}{m-2}.$$

В частности, сюда относится задача n тел с ньютоновым потенциалом ($\alpha = -2/3$, $\beta = 1/3$, $\gamma = 2/3$).

Исключительный случай $m = 2$ соответствует линейным системам, которые не являются квазиоднородными.

Пример 3. Движение по инерции:

$$H = \frac{1}{2} \sum a_{jk}(x) y_j y_k, \qquad x \in M,$$

где M – гладкое риманово многообразие. Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$. Сюда же относятся бильярдные системы, в которых M – многообразие с краем, и отражение от края упругое.

Теорема 4. *Пусть гамильтонова система* (4.2) *квазиоднородна, начальная плотность* ρ *– функция из* $L_p(\Gamma, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда пределы* (4.1) *существуют (в смысле слабой* $L_p(\Gamma, \mu)$*-сходимости) и совпадают.*

Сделаем несколько замечаний.

1. Теорема 4 получена в работе [6]. Она справедлива для более общего класса динамических систем (не обязательно гамильтоновых) – *слоистых потоков*, введенных в работе [7].

2. Пусть $\mathcal{A}^k$ – класс систем гладкости k, в которых пределы (4.1) существуют для любой плотности $\rho \in L_p(\Gamma, \mu)$.

Гипотеза. *Для любого достаточно большого* k *(включая* $k = \infty$ *и* $k = \omega$*) множество* $\mathcal{A}^k$ *состоит из систем общего положения в пространстве систем гладкости* k.

По поводу справедливости этой гипотезы известно довольно мало. Если на (Γ, μ) имеется перемешивающая гиперболическая система (система Аносова), то внутренность $\mathcal{A}^k$ в C^k-топологии не пуста. В самом деле, гиперболические перемешивающие системы, очевидно, лежат в $\mathcal{A}^k$ и, как известно, являются структурно-устойчивыми.

К сожалению, не следует ожидать, что условие общности положения в гипотезе можно понимать в том смысле, что $\mathcal{A}^k$ открыто и всюду плотно при $k < \omega$. Причина состоит в том, что согласно работе [8] гладкую систему с гомоклиническим касанием можно как угодно точно в C^∞-топологии приблизить системой, имеющей инвариантное множество, на котором динамика является жестким поворотом. Для такой системы пределы (4.1) не существуют для большинства начальных плотностей ρ. (Строго говоря, результаты работы [8] получены для отображений, но не вызывает сомнений возможность применения аналогичных методов и в случае потоков.)

Таким образом, общность положения в гипотезе, по-видимому, следует понимать в том смысле, что $\mathcal{A}^k$ является подмножеством второй категории Бэра.

3. Если гамильтонова система эргодична на изоэнергетических многообразиях, то состояние статистического равновесия, задаваемое стационарной инвариантной мерой $d\nu^\infty = \rho^\infty\, d\mu$, будет микроканоническим (плотность ρ^∞ зависит лишь от полной энергии). Этому свойству мера $\bar{\nu}^\infty$, вообще говоря, не удовлетворяет: она даже не инвариантна относительно фазового потока.

4. В случае дискретных динамических систем конструкции аналогичны. В самом деле, пусть $g\colon \Gamma \to \Gamma$ – автоморфизм (или эндоморфизм) измеримого пространства (Γ, μ), т.е. для любого μ-измеримого множества $D \subset \Gamma$

$$\mu(D) = \mu(g^{-1}(D)).$$

Как обычно, $g^{-1}(D)$ – полный прообраз D при отображении g.

Если $\rho^0 : \Gamma \to \mathbb{R}$ – плотность вероятностной меры ν^0, $d\nu^0 = \rho^0\, d\mu$, то при целых $n \geqslant 0$ имеем меру ν^n:

$$d\nu^n = \rho^n\, d\mu, \qquad \rho^n = \rho^0 \circ g^n.$$

Тогда для любого μ-измеримого множества $D \subset \Gamma$

$$\nu^n(D) = \nu^0(g^{-n}(D)).$$

5. СТАБИЛИЗАЦИЯ ГРУБОЙ ПЛОТНОСТИ

Гиббс пытался доказать, что грубая энтропия $\bar{s}_t$ возрастает с возрастанием времени. Однако его рассуждения также оказались некорректными (их анализ содержится в монографии [3], где имеются другие ссылки). Интересно отметить, что поначалу этот неверный результат многими авторами воспринимался всерьез. Например, Пуанкаре [4] пишет о нем как о хорошо известном факте. Грубую энтропию следует отличать от энтропии Больцмана, связанной со статистикой в μ-пространстве.

Некоторую информацию о поведении грубой плотности $\bar{\rho}^t$ при $t \to \infty$ дает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть гамильтонова система* (4.2) *квазиоднородна, начальная плотность ρ – функция из $L_p(\Gamma, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $\{\Gamma_j\}$ – разбиение фазового пространства на куски конечной меры Лиувилля. Тогда* $\lim_{t\to+\infty} \rho_j(t)$ *и* $\lim_{t\to-\infty} \rho_j(t)$ *существуют в смысле слабой L_p-сходимости и совпадают.*

Теорема 5 легко выводится из теоремы 4. Действительно, пусть g^t – фазовый поток системы (4.2). Тогда $\rho^t = \rho \circ g^t \in L_p(\Gamma, \mu)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть φ_j – характеристическая функция измеримой области Γ_j. Так как ρ^t слабо сходится к ρ^∞ при $t \to \pm\infty$ и $\rho^\infty \in L_p(\Gamma, \mu)$, то

$$\rho_j(t) = \frac{1}{\gamma_j} \int_\Gamma \rho^t \varphi_j \, d\mu \to \frac{1}{\gamma_j} \int_\Gamma \rho^\infty \varphi_j \, d\mu. \tag{5.1}$$

Остается заметить, что $\int_\Gamma \bar{\rho}^\infty \, d\mu = \int_\Gamma \rho^\infty \, d\mu$ и $\bar{\rho}^\infty \in L_p(\Gamma)$.

Как показано в работе [7], если уровни энергии квазиоднородной гамильтоновой системы *компактны*, то ρ^∞ – плотность некоторой вероятностной меры:

$$\int_\Gamma \rho^\infty \, d\mu = 1.$$

Следовательно, в этом случае функция $\bar{\rho}^\infty$ из теоремы 5 также задает вероятностную меру.

Рассмотрим квазиоднородную гамильтонову систему (4.2) на инвариантном куске

$$\Gamma = \{(x, y) \colon h_1 \leqslant H(x, y) \leqslant h_2\}, \qquad h_1 < h_2. \tag{5.2}$$

Пусть Γ компактно. Так как $C^0(\Gamma)$ плотно в $L_1(\Gamma, \mu)$ (μ – мера Лиувилля $d^n x \, d^n y$), то из теорем 1 и 5 вытекает

Следствие. *Пусть начальная плотность $\rho \colon \Gamma \to \mathbb{R}$ – функция из $L_1(\Gamma, \mu)$ и $\{\Gamma_j\}$ – разбиение множества (5.2). Тогда при $\sup(\operatorname{diam} \Gamma_j) \to 0$ плотность $\bar{\rho}^\infty$ с любой наперед заданной точностью аппроксимирует слабый предел ρ^∞ в метрике $L_1(\Gamma, \mu)$.*

Действительно, правая часть предельного соотношения (5.1) совпадает с $(\bar{\rho}^\infty)_j$. Таким образом, плотность $\bar{\rho}^\infty$ получается из плотности ρ^∞ усреднением по ячейкам разбиения $\Gamma = \cup \Gamma_j$.

6. ТЕОРЕМА О ВОЗРАСТАНИИ ГРУБОЙ ЭНТРОПИИ

Пусть ρ^∞ – слабый предел плотности ρ^t при $t \to \pm\infty$ ($\rho_0 = \rho$). Тогда (как установлено в работе [7]) имеет место неравенство

$$S(\rho^\infty) \geqslant S(\rho). \tag{6.1}$$

Оказывается, что, вопреки распространенному мнению (высказанному впервые Гиббсом и поддержанному Пуанкаре), грубая энтропия не всегда возрастает. Это показывает простой пример.

Пример 4. Рассмотрим вертикально расположенный отрезок длины l в поле сил тяжести и ансамбль частиц, которые упруго отражаются от его концов. Если квадрат скорости частицы превосходит $2gl$ (g – ускорение свободного падения), то частица периодически сталкивается с обоими концами отрезка. Пусть начальная плотность ρ постоянна в прямом произведении Γ отрезка $0 \leqslant x \leqslant l$ и области

$V = \{v\colon 2gl \leqslant v^2 \leqslant c,\ c = \mathrm{const}\}$ на оси скоростей. Рассмотрим разбиение Γ на два одинаковых куска

$$\Gamma_1 = \left\{0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right\}, \qquad \Gamma_1 = \left\{\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l\right\}.$$

Начальная энтропия вычисляется по формуле (1.1), в которой $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ и $\gamma_j = \mu(\Gamma_1) = \mu(\Gamma_2)$. Легко понять, что в стационарном состоянии (когда плотность ρ^t заменяется слабым пределом) бóльшая часть частиц из ансамбля будет расположена в верхней половине отрезка (поскольку в этой половине частицы движутся с меньшей скоростью). Следовательно, при $\rho = \rho^\infty$ в формуле (1.1) уже $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Но тогда, как известно, $S(\rho^\infty) < S(\rho)$. Легко понять, что тот же вывод справедлив и в более общем случае, когда разбиение Γ порождается разбиением отрезка на $n \geqslant 2$ равных частей.

Чтобы указать *достаточные* условия возрастания грубой энтропии, снова рассмотрим квазиоднородную систему уравнений Гамильтона (4.2), ограниченную на компактную инвариантную область (5.2).

Теорема 6. *Пусть начальная плотность* $\rho\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ – *функция из* $L_1(\Gamma, \mu)$ *и* $\{\Gamma_j\}$ – *разбиение* Γ. *Если неравенство* (6.1) *строгое*, $S(\bar\rho^\infty) < \infty$, *то при достаточно малых* $\sup(\operatorname{diam}\Gamma_j)$ *справедливо неравенство* $\mathbf{S}(\bar\rho^\infty) > \mathbf{S}(\bar\rho)$.

Это утверждение сразу доказывается с помощью следствия, приведенного в предыдущем разделе, и аппроксимационной теоремы 2: так как в нашем случае $C^0(\Gamma)$ плотно в $L_1(\Gamma, \mu)$ и $\mathbf{S}(\rho) < \mathbf{S}(\rho^\infty) < \infty$, то при $\sup(\operatorname{diam}\Gamma_j) \to 0$ разности $\mathbf{S}(\bar\rho)$ и $\mathbf{S}(\rho)$, а также $\mathbf{S}(\bar\rho^\infty)$ и $\mathbf{S}(\rho^\infty)$ сколь угодно малы.

7. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему с компактными совместными уровнями первых интегралов. В области, не содержащей критических интегральных уровней, такая система может быть записана в переменных "действие–угол":

$$\dot x = \omega(y), \quad \dot y = 0, \qquad \mathbb{T}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \bmod 1\}, \quad y \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

Если зависимость частот ω от действий y невырожденна (т.е. $\det(\partial\omega/\partial y) \neq 0$), то по крайней мере локально ω можно взять вместо y в качестве фазовых координат. Тогда система принимает вид

$$\dot x = \omega, \qquad \dot\omega = 0. \tag{7.1}$$

Отметим, что (7.1) – квазиоднородные уравнения Гамильтона: x_j, ω_j – сопряженные канонические переменные, а $H = (\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2)/2$ – функция Гамильтона.

К уравнениям (7.1) можно прийти также из других соображений. Рассмотрим бесстолкновительную сплошную среду, заключенную в n-мерный сосуд – прямоугольный параллелепипед. Предполагается, что частицы упруго отражаются от стенок сосуда – границы параллелепипеда – и не сталкиваются друг с другом, поэтому такую среду можно назвать *идеальным газом*. Такую модель одномерного идеального газа впервые рассмотрел Пуанкаре [4]. Все это, конечно, является частным случаем общей теории ансамблей Гиббса. Как заметил Пуанкаре, после перехода к 2^n-листному накрытию параллелепипеда тором $\mathbb{T}^n$ уравнение движения частиц совпадет с системой (7.1).

Уравнения (7.1) имеют инвариантную меру $d\mu = dx\, d\omega$ в фазовом пространстве $\Gamma = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Пусть $\rho(x,\omega)$ – плотность вероятностной меры ν: $d\nu = \rho\, d\mu$. Для любой пары натуральных чисел N, M рассмотрим разбиение фазового пространства Γ на части Γ_{jk}, $j \in \mathbb{Z}^n/N\mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk} &= \Gamma^x_j \times \Gamma^\omega_k, \\ \Gamma^x_j &= \biggl\{x \in \mathbb{T}^n \colon \frac{j_l}{N} \leqslant x_l \leqslant \frac{j_l+1}{N}, \quad l = 1,\dots,n\biggr\}, \\ \Gamma^\omega_k &= \biggl\{\omega \in \mathbb{R}^n \colon \frac{k_l}{M} \leqslant \omega_l \leqslant \frac{k_l+1}{M}, \quad l = 1,\dots,n\biggr\}. \end{aligned}$$

Мера μ каждого из кусков Γ_{jk} равна $\mu(\Gamma_{jk}) = (NM)^{-n}$.

Подсчитаем значение грубой плотности на Γ_{jk}:

$$\rho_{jk}(t) = (NM)^n \int_{\Gamma_{jk}} \rho(x+\omega t, \omega)\, dx\, d\omega.$$

Положим

$$\langle\rho\rangle(\omega) = \int_{\mathbb{T}^n} \rho(x,\omega)\, dx, \qquad \langle\rho\rangle_k = \int_{\Gamma^\omega_k} \langle\rho\rangle(\omega)\, d\omega.$$

Очевидно, что $\langle\rho\rangle$ – плотность некоторой вероятностной меры на Γ, причем для любого t имеем $\langle\rho\rangle_{jk}(t) = \langle\rho\rangle_k$.

Теорема 7. *Предположим, что функция ρ ограничена на Γ и липшецева по переменным ω. Тогда при $t > 0$*

$$|\rho_{jk}(t) - \langle\rho\rangle_k| \leqslant \frac{nMN^n}{t}\biggl(\frac{\|\rho\|_1}{M} + 2\|\rho\|_0\biggr),$$

$$\|\rho\|_0 = \sup_\Gamma |\rho|, \qquad \|\rho\|_1 = \sup \frac{|\rho(x,\omega') - \rho(x,\omega'')|}{|\omega' - \omega''|},$$

где $(x,\omega'), (x,\omega'') \in \Gamma$, $\omega' \ne \omega''$.

Доказательство теоремы 7 содержится в приложении (п. П.6).

Пусть функция ρ финитна, $\bar\rho$ и $\overline{\langle\rho\rangle}$ – грубые плотности, соответствующие разбиению Γ_{jk} и плотностям ρ и $\langle\rho\rangle$, соответственно. Тогда

$$\mathbf{S}(\bar\rho) - \mathbf{S}\bigl(\overline{\langle\rho\rangle}\bigr) = -\frac{1}{(MN)^n} \sum_{j,k} (\rho_{jk} \ln \rho_{jk} - \langle\rho\rangle_k \ln\langle\rho\rangle_k),$$

причем лишь конечное число слагаемых в сумме отлично от нуля. По-видимому, в типичной ситуации следует ожидать, что при $t \to \infty$ разность $\mathbf{S}(\bar\rho) - \mathbf{S}\bigl(\overline{\langle\rho\rangle}\bigr)$ имеет порядок $1/t$, хотя легко построить примеры, когда $\mathbf{S}(\bar\rho) - \mathbf{S}\bigl(\overline{\langle\rho\rangle}\bigr) \sim t^{-1}\ln t$.

8. ПЕРЕМЕШИВАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Динамику в системах, рассмотренных в разделе 7, принято называть регулярной. Ее антиподом является хаотическая динамика. Здесь прежде всего мы имеем в виду перемешивающие системы. Напомним

Определение 2. Пусть поток g^t на фазовом пространстве Γ сохраняет вероятностную меру μ. Поток g^t называется перемешивающим, если для любой пары функций $\varphi, \psi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ из достаточно широкого функционального пространства

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Gamma \varphi \circ g^t \, \psi \, d\mu = \int_\Gamma \varphi \, d\mu \int_\Gamma \psi \, d\mu. \tag{8.1}$$

В случае гиперболических систем (систем Аносова) имеет место экспоненциальное убывание корреляций, т.е. для некоторых постоянных $C > 0$ и $\tau \in (0,1)$

$$\left| \lim_{t\to\infty} \int_\Gamma \varphi \circ g^t \, \psi \, d\mu - \int_\Gamma \varphi \, d\mu \int_\Gamma \psi \, d\mu \right| < C\tau^{|t|}. \tag{8.2}$$

В этом случае грубая плотность всегда стремится к 1 при $t \to \infty$. Действительно,

$$\rho_j(t) = \frac{1}{\gamma_j} \int_{\Gamma_j} \varphi \circ g^t \, d\mu = \frac{1}{\gamma_j} \int_\Gamma \varphi \circ g^t \, \chi_{\Gamma_j} \, d\mu,$$

где χ_{Γ_j} – характеристическая функция множества Γ_j. Из (8.1) следует, что

$$\rho_j \to \frac{1}{\gamma_j} \int_\Gamma \varphi \, d\mu \int_\Gamma \chi_{\Gamma_j} \, d\mu = 1.$$

Более того, если выполнено неравенство (8.2), то ρ_j приближается к 1 с экспоненциальной скоростью. Такого же поведения следует ожидать и от грубой энтропии: $\mathbf{S}(\bar\rho^t)$ экспоненциально быстро стремится к $\mathbf{S}(1) = 0$.

Отметим, тем не менее, что к этим утверждениям следует относиться с известной долей осторожности, так как обычно функциональные пространства, для которых удается доказать соотношения (8.1), (8.2), обычно несколько у́же, чем пространство непрерывных функций на Γ, так что характеристические функции множеств Γ_j в них не входят. По-видимому, основной причиной этого обстоятельства является не то, что функции χ_{Γ_j} слишком "плохие", а то, что их трудно включить в удобное (с точки зрения проверки (8.1), (8.2)) функциональное пространство. Впрочем, в конкретных примерах (скажем, для линейных гиперболических автоморфизмов тора) проверку приведенных в этом разделе утверждений о поведении грубой плотности и грубой энтропии легко провести непосредственно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П.1. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как $C^0(\Gamma)$ плотно в $L_1(\Gamma, \mu)$, существует функция $\rho \in C^0(\Gamma)$ такая, что

$$\|\rho - \rho_c\| < \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|$ – L_1-норма. Имеем также простое неравенство

$$\|\bar{\rho}-\bar{\rho}_c\| \leqslant \|\rho-\rho_c\| < \varepsilon. \tag{П.1}$$

Функция ρ_c равномерно непрерывна на Γ. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\rho_c(z_1)-\rho_c(z_2)| < \varepsilon$$

для любых $z_1, z_2 \in \Gamma$, $\operatorname{dist}(z_1, z_2) < \delta$. Следовательно $|\bar{\rho}_c-\rho_c| < \varepsilon$, откуда вытекает, что

$$\|\bar{\rho}_c-\rho_c\| < \varepsilon. \tag{П.2}$$

Комбинация (П.1) и (П.2) дает $\|\rho-\bar{\rho}\| < 3\varepsilon$.

П.2. Доказательство теоремы 2: часть 1. В этом пункте мы выводим теорему 2 из леммы 1. Положим

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если} \quad \rho(x) \leqslant \Delta, \\ \Delta, & \text{если} \quad \rho(x) > \Delta, \end{cases}$$

$$\rho_{0j} := \bar{\rho}_0|_{\Gamma_j} = \frac{1}{\gamma_j}\int_{\Gamma_j} \rho_0\, d\mu, \qquad s_0 = \mathbf{S}(\rho_0), \qquad \bar{s}_0 = \mathbf{S}(\bar{\rho}_0).$$

Из (П.2) следует, что $s_0 \leqslant \bar{s}_0$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Если Δ достаточно велико, то

$$0 \leqslant s - s_0 \leqslant \varepsilon. \tag{П.3}$$

Если диаметр разбиения $\{\Gamma_j\}$ достаточно мал, то согласно лемме 1 выполнены неравенства

$$0 < \bar{s}_0 - s_0 \leqslant \varepsilon. \tag{П.4}$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\bar{s} < \bar{s}_0 + c\,\varepsilon|\ln\varepsilon|, \tag{П.5}$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε. Действительно, тогда согласно (П.3) и (П.4) будем иметь $|s-\bar{s}_0| < 2\varepsilon$. Следовательно, из (П.2) и (П.5) вытекает, что

$$s \leqslant \bar{s} \leqslant \bar{s}_0 + c\varepsilon\ln\varepsilon \leqslant s + c\,\varepsilon\ln\varepsilon + 2\varepsilon,$$

откуда получаем $|s-\bar{s}| < c\varepsilon\ln\varepsilon + 2\varepsilon$.

Оставшаяся часть пункта – доказательство оценки (П.5). Запишем (П.3) подробнее:

$$0 < \int_{\Gamma\cap\{\rho\geqslant\Delta\}} (\rho\ln\rho - \rho_0\ln\rho_0)\, d\mu < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$0 < \int_{\Gamma\cap\{\rho\geqslant\Delta\}} (\rho\ln\Delta - \rho_0\ln\Delta)\, d\mu < \varepsilon,$$

откуда получаем

$$0 < \int_\Gamma (\rho - \rho_0)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{\ln \Delta}. \tag{П.6}$$

Имеем неравенства

$$0 \leqslant \rho_{0j} \leqslant \rho_j, \qquad \sum_j (\rho_j - \rho_{0j})\gamma_j < \frac{\varepsilon}{\ln \Delta}. \tag{П.7}$$

Докажем вспомогательный факт: для любых $0 \leqslant a \leqslant b$ и $\sigma \in (0, 1/e)$ выполнено неравенство

$$a \ln a \leqslant b \ln b + |\sigma \ln \sigma| + |1 + \ln \sigma|\,(b - a). \tag{П.8}$$

В самом деле, если $a > \sigma$, то, пользуясь очевидным неравенством $\min_{\rho \geqslant \sigma} (\rho \ln \rho)' = 1 + \ln \sigma$, получаем

$$a \ln a - b \ln b \leqslant |1 + \ln \sigma|(b - a).$$

Если же $a \in (0, \sigma)$, имеем

$$a \ln a - b \ln b \leqslant |a \ln a - \sigma \ln \sigma| + |\sigma \ln \sigma - b \ln b| \leqslant |\sigma \ln \sigma| + |1 + \ln \sigma|(b - a).$$

Из неравенства (П.8) немедленно следует

$$\sum_j \gamma_j \rho_{0j} \ln \rho_{0j} \leqslant \sum_j \gamma_j \rho_j \ln \rho_j + |\sigma \ln \sigma| \sum_j \gamma_j + \sum_j (|1 + \ln \sigma|)(\rho_j - \rho_{0j})\gamma_j,$$

что с учетом (П.7) можно переписать в виде

$$\bar{s} \leqslant \bar{s}_0 + |\sigma \ln \sigma| + \frac{|1 + \ln \sigma|}{\ln \Delta}\varepsilon.$$

Теперь достаточно положить $\sigma = \varepsilon$.

П.3. Доказательство теоремы 2: часть 2. В этом пункте мы выводим лемму 1 из леммы 2. Пусть $\rho < \Delta$. Положим

$$\rho_*(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если} \quad \rho(x) \geqslant \delta, \\ \delta, & \text{если} \quad \rho(x) < \delta, \end{cases}$$

$$\rho_{*j} := \bar{\rho}_*|_{\Gamma_j} = \frac{1}{\gamma_j} \int_{\Gamma_j} \rho_0\, d\mu, \qquad s_* = \mathbf{S}(\rho_*), \qquad \bar{s}_* = \mathbf{S}(\bar{\rho}_*).$$

Имеем

$$0 \leqslant s - s_* \leqslant \delta \ln \delta. \tag{П.9}$$

Если диаметр разбиения $\{\Gamma_j\}$ достаточно мал, то согласно лемме 2 выполнены неравенства

$$0 < \bar{s}_* - s_* \leqslant \delta. \tag{П.10}$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\bar{s} < \bar{s}_* + c\delta, \tag{П.11}$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от δ. Действительно, тогда ввиду (П.9), (П.10) будем иметь $|s - \bar{s}_*| < \delta + \delta \ln \delta$. Следовательно, из (П.2) и (П.11) вытекает, что $s \leqslant \bar{s} \leqslant \bar{s}_* + c\delta \leqslant s + (1+c)\delta + \delta \ln \delta$, откуда получаем $|s - \bar{s}| < (1+c)\delta + \delta \ln \delta$.

Проверим справедливость оценки (П.11). Согласно определению функции ρ_* имеем

$$\delta \leqslant \rho_* \leqslant \rho + \delta \leqslant \Delta + \delta.$$

Следовательно, $\delta \leqslant \bar{\rho}_* \leqslant \bar{\rho} + \delta \leqslant \Delta + \delta$. Из неравенства

$$\sup_{\rho \in (0, \Delta+\delta)} (\rho \ln \rho)' = 1 + \ln(\Delta + \delta)$$

вытекает, что $\bar{\rho}_* \ln \bar{\rho}_* \leqslant \bar{\rho} \ln \bar{\rho} + (1 + \ln(\Delta+\delta))\delta$, откуда получаем

$$\bar{s} \leqslant \bar{s}_* + (1 + \ln(\Delta + 1))\delta.$$

П.4. Доказательство теоремы 2: часть 3. В этом пункте мы доказываем лемму 2. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $C^0(\Gamma)$ плотно в $L_1(\Gamma, \mu)$, найдется функция $\rho_c \in C^0(\Gamma)$ такая, что

$$\delta < \rho_c < \Delta, \qquad \rho = \rho_c(1 + \rho_l), \qquad \|\rho_l\| < \varepsilon. \tag{П.12}$$

Здесь $\|\cdot\|$ – L_1-норма. Тогда

$$s = -\int_\Gamma \rho_c(1+\rho_l)\ln(\rho_c(1+\rho_l))\,d\mu = s_c + A_1 + A_2,$$
$$s_c := \mathbf{S}(\rho_c), \qquad A_1 = -\int_\Gamma \rho \ln(1+\rho_l)\,d\mu, \qquad A_2 = -\int_\Gamma \rho_c\rho_l \ln \rho_c\,d\mu.$$

Таким образом, остается проверить, что величины $|\bar{s} - s_c|$, A_1 и A_2 малы.

Так как $|\rho_c \ln \rho_c| \leqslant \Delta \ln \Delta$, имеем

$$|A_2| \leqslant \Delta \ln \Delta \int_\Gamma |\rho_l|\,d\mu < \varepsilon \Delta \ln \Delta. \tag{П.13}$$

Согласно (П.12) $\rho_l = (\rho - \rho_c)/\rho_c \in I$, где $I = [-1 + \delta/\Delta,\ 1 + \Delta/\delta]$. Несложно установить, что

$$\max_{\rho \in I} \left| \frac{\ln(1+\rho)}{\rho} \right| \leqslant \ln \frac{\Delta}{\delta}.$$

Следовательно,

$$|A_1| \leqslant \Delta \int_\Gamma |\ln(1+\rho_l)|\,d\mu \leqslant \Delta \ln \frac{\Delta}{\delta} \int_\Gamma |\rho_l|\,d\mu \leqslant \varepsilon \Delta \ln \frac{\Delta}{\delta}. \tag{П.14}$$

Функция ρ_c непрерывна на компакте Γ, следовательно, она равномерно непрерывна, т.е. существует $\sigma > 0$ такое, что $|\rho_c(z_1) - \rho_c(z_2)| < \varepsilon$ для любых $z_1, z_2 \in \Gamma$ таких, что $\operatorname{dist}(z_1, z_2) < \sigma$.

Пусть $\operatorname{diam}\Gamma_j < \sigma$. Тогда $|\bar\rho_c - \rho_c| < \varepsilon$. Имеем оценку

$$|\bar s_c - s_c| = \left|\int_\Gamma (\rho_c \ln\rho_c - \bar\rho_c \ln\bar\rho_c)\,d\mu\right| \leqslant \\ \leqslant \left(1 + \ln\frac{\Delta}{\delta}\right)\int_\Gamma |\rho_c - \bar\rho_c|\,d\mu \leqslant \left(1 + \ln\frac{\Delta}{\delta}\right)\varepsilon. \tag{П.15}$$

Положим $\rho_{cj} = \bar\rho_c|_{\Gamma_j}$. Тогда

$$|\rho_j - \rho_{cj}| = \left|\frac{1}{\gamma_j}\int_{\Gamma_j}\rho_c\rho_l\,d\mu\right| \leqslant \frac{\Delta}{\gamma_j} r_j,$$
$$r_j = \int_{\Gamma_j}|\rho_l|\,d\mu, \qquad \sum_{j\in J} r_j < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $j \in J$

$$|\rho_j \ln\rho_j - \rho_{cj}\ln\rho_{cj}| \leqslant \left(1 + \ln\frac{\Delta}{\delta}\right)|\rho_j - \rho_{cj}| \leqslant \frac{\Delta}{\gamma_j}\left(1 + \ln\frac{\Delta}{\delta}\right) r_j.$$

Получаем следующую оценку для разности энтропий:

$$|\bar s_c - \bar s| = \left|\sum_{j\in J}(\rho_j\ln\rho_j - \rho_{cj}\ln\rho_{cj})\gamma_j\right| \leqslant \Delta\left(1 + \ln\frac{\Delta}{\delta}\right)\varepsilon. \tag{П.16}$$

Из (П.15), (П.16) находим

$$|\bar s - s_c| \leqslant (1 + \Delta)\left(1 + \ln\frac{\Delta}{\delta}\right)\varepsilon.$$

П.5. Доказательство теоремы 3. Очевидно, можно считать, что $d < 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Положим

$$\hat J_l = \{j \in J : \Gamma_j \subset K_l\}, \qquad \widehat K_l = \bigcup_{j\in\hat J_l}\Gamma_j.$$

Тогда для достаточно больших N выполняются неравенства

$$\left|s - \int_{\widehat K_N}\rho\ln\rho\,d\mu\right| < \varepsilon, \tag{П.17}$$
$$\left|\bar s - \int_{\widehat K_N}\bar\rho\ln\bar\rho\,d\mu\right| < \varepsilon. \tag{П.18}$$

Действительно, проверим (П.17):

$$\left|s - \int_{\widehat K_N}\rho\ln\rho\,d\mu\right| \leqslant A_N + A_{N+1} + \cdots,$$
$$A_l = \int_{\widehat K_{l+1}\setminus\widehat K_l}|\rho\ln\rho|\,d\mu.$$

Для любого $l > 1$ выполнены включения $K_{l-1} \subset \widehat{K}_l \subset K_l$ (второе включение следует из определения множества $\widehat{K}_l$, а первое – из определения 1 (г) и неравенства $d < 1$). Таким образом,

$$\widehat{K}_{l+1} \setminus \widehat{K}_l \subset K_{l+1} \setminus K_{l-1}.$$

Следовательно, согласно определению 1 (в)

$$\mu(\widehat{K}_{l+1} \setminus \widehat{K}_l) \leqslant \mu(K_{l+1} \setminus K_l) + \mu(K_l \setminus K_{l-1}) \leqslant 2Cl^{n-1}.$$

Из условия (3) теоремы вытекает, что

$$\rho|_{\widehat{K}_{l+1}\setminus\widehat{K}_l} \leqslant \rho|_{K_{l+1}} < c_\rho(l+1)^{-n-\delta}.$$

Так как можно считать, что $c_\rho(N+1)^{-n-\delta} < 1/e$, имеем

$$A_l \leqslant 2Cl^{n-1}c_\rho(l+1)^{-n-\delta}|\ln(c_\rho(l+1)^{-n-\delta})| \tag{П.19}$$

для всех $l \geqslant N$. Неравенство (П.17) при достаточно больших N вытекает из оценки (П.19). Неравенство (П.18) доказывается аналогично.

Согласно определению 1 (в) $\mu(\widehat{K}_N) < \infty$. Поэтому из теоремы 1 следует, что при достаточно малых $d > 0$

$$\left|\int_{\widehat{K}_N} \rho\ln\rho\,d\mu - \int_{\widehat{K}_N} \bar\rho\ln\bar\rho\,d\mu\right| < \varepsilon. \tag{П.20}$$

Из неравенств (П.17), (П.18) и (П.20) вытекает, что при достаточно малых $d > 0$ $|s - \bar{s}| < 3\varepsilon$, что и требовалось доказать.

П.6. Доказательство теоремы 7. Отметим, что в доказательстве нигде не используется то, что $\rho \geqslant 0$. Поэтому, заменяя ρ на $\rho - \langle\rho\rangle$, видим, что можно ограничиться рассмотрением случая $\langle\rho\rangle = 0$.

Рассмотрим при больших t функции

$$\rho_k(t,x) = M^n\int_{\Gamma_k^\omega} \rho(x+\omega t,\omega)\,d\omega = \frac{M^n}{t^n}\int_{t\Gamma_k^\omega} \rho\biggl(x+\beta,\frac{\beta}{t}\biggr)\,d\beta,$$

где

$$t\Gamma_k^\omega = \biggl\{\beta \in \mathbb{R}^n\colon \frac{tk_l}{M} \leqslant \beta_l \leqslant \frac{t(k_l+1)}{M},\ l = 1,\dots,n\biggr\}.$$

Лемма П.1. *Если $\langle\rho\rangle = 0$, то*

$$|\rho_k(t,x)| \leqslant \frac{nM}{t}\biggl(\frac{\|\rho\|_1}{M} + 2\|\rho\|_0\biggr).$$

Теорема 7 сразу следует из леммы П.1, так как при $\langle\rho\rangle = 0$

$$|\rho_{jk}(t)| = \left|\int_{\mathbb{T}^n} \rho_k(t,x)\,dx\right|.$$

Доказательство леммы П.1. Представим множество $t\Gamma_k^\omega$ в виде объединения единичных кубов $\mathcal{C}_m$, $m \in \mathcal{Z}$, и остатка R. Здесь $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(t)$ – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$,

$$\mathcal{C}_m = \{\beta \in \mathbb{R}^n : m_l \leqslant \beta_l \leqslant m_l + 1,\ l = 1, \dots, n\}$$

и $R = t\Gamma_k^\omega \setminus \bigcup_{m\in\mathcal{Z}} \mathcal{C}_m$. Считаем, что R не содержит целиком ни одного куба $\mathcal{C}_m$. Тогда

$$\int_R d\beta \leqslant \frac{2nt^{n-1}}{M^{n-1}}, \qquad \#\mathcal{Z} \leqslant \frac{t^n}{M^n}. \tag{П.21}$$

Имеем

$$\begin{gathered} \rho_k = \frac{1}{M^n t^n}\biggl(\sum_{m\in\mathcal{Z}} I_m + I_R\biggr), \\ I_m = \int_{\mathcal{C}_m} \rho\biggl(x+\beta, \frac{\beta}{t}\biggr)\,d\beta, \qquad I_R = \int_R \rho\biggl(x+\beta, \frac{\beta}{t}\biggr)\,d\beta. \end{gathered} \tag{П.22}$$

Так как $\langle\rho\rangle = 0$, то для любого $\beta_0 \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\int_{\mathcal{C}_m} \rho\biggl(x+\beta, \frac{\beta}{t}\biggr)\,d\beta = 0.$$

Поэтому

$$|I_m| = \biggl|\int_{\mathcal{C}_m}\biggl(\rho\biggl(x+\beta, \frac{\beta}{t}\biggr) - \rho\biggl(x+\beta, \frac{m}{t}\biggr)\biggr)\,d\beta\biggr| \leqslant \int_{\mathcal{C}_m} \frac{n\|\rho\|_1}{t}\,d\beta = \frac{n\|\rho\|_1}{t}.$$

С другой стороны, $|R| \leqslant \int_R \|\rho\|_0\,d\beta$. Следовательно, используя (П.21) и (П.22), получаем

$$|\rho_k(t,x)| \leqslant \frac{M^n}{t^n}\biggl(n\|\rho\|_1\frac{t^{n-1}}{M^n} + 2n\|\rho\|_0\frac{t^{n-1}}{M^{n-1}}\biggr) = \frac{nM}{t}\biggl(\frac{\|\rho\|_1}{M} + 2\|\rho\|_0\biggr).$$

Лемма доказана.

Благодарности. Авторы благодарны В. В. Сидоренко и О. Г. Смолянову за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-01058, № 05-01-01119), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1312.2006.1) и программы президиума РАН “Нелинейная динамика”.

Список литературы

[1] Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Мир, М., 1979.
[2] М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, М., 1965.
[3] Н. С. Крылов, *Работы по обоснованию статистической физики*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1950.
[4] А. Пуанкаре, “Замечания о кинетической теории газов”, *Избранные труды*, т. III, Наука, М., 1974.
[5] Дж. В. Гиббс, *Термодинамика. Статистическая механика*, Наука, М., 1982.
[6] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *ТМФ*, **136**:3 (2003), 496–506.
[7] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *ТМФ*, **134**:3 (2003), 388–400.
[8] С. В. Гонченко, Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, *Докл. РАН*, **407**:3 (2006), 299–303.

Поступила в редакцию 24.07.2006