ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том 51 Выпуск 1

2006

 КОЗЛОВ В. В.*, СМОЛЯНОВ О. Г.**

ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА И ДИФФУЗИЯ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

Вводится квантовая модель Пуанкаре, реализующая необратимое поведение идеального газа, состоящего из невзаимодействующих квантовых больцмановских частиц. При этом используется тот факт, что эволюция функции Вигнера для квантовой системы с квадратичным гамильтонианом совпадает с эволюцией вероятностного распределения на фазовом пространстве гамильтоновой системы, квантованием которой получена изучаемая квантовая система.

Ключевые слова и фразы: модель Пуанкаре, функция Вигнера, уравнение Гейзенберга, уравнение Гамильтона, оператор Вейля, функция Вейля, идеальный газ.

С помощью функции Вигнера описывается квантовый аналог модели Пуанкаре, реализующей необратимое поведение идеального газа (сплошной среды), состоящего из точечных классических невзаимодействующих частиц.

В первоначальной модели Пуанкаре [1] (ее подробный анализ содержится в книге [3]) рассматривается идеальный газ в прямоугольном параллелепипеде, состоящий из одинаковых (точечных) невзаимодействующих классических свободных частиц. При этом плотность частиц или, что то же самое, плотность идеального газа отождествляется с плотностью вероятностного распределения положений свободной частицы в параллелепипеде (в рамках изучаемой модели другие характеристики идеального газа не рассматриваются). В [3] доказано, что при стремлении времени к бесконечности (а также и к минус бесконечности) это вероятностное распределение стремится к равномерному (в предположении, что в начальный момент времени плотность распределения является

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: kozlov@pran.ru

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: smolyanov@yandex.ru

суммируемой функцией координат и скоростей). Но это и означает, что плотность идеального газа стремится к равномерной при неограниченном возрастании времени, что соответствует необратимости эволюции такого газа (фактически в книге [3] рассматривается движение частиц на торе, причем отмечается, что эта ситуация является универсальной для невырожденных вполне интегрируемых гамильтоновых систем). Стоит еще раз подчеркнуть, что плотность стремится к равномерной также и при неограниченном убывании времени, так как уравнения, описывающие динамику системы частиц, инвариантны относительно обращения времени.

В настоящей работе показано, что в случае некомпактного конфигурационного пространства как вероятностное распределение координат классической свободной частицы, так и вероятностное распределение результатов измерения координат квантовой свободной частицы также стремятся к равномерному. Это по определению означает, что отношение вероятностей попадания частицы в две различные компактные области конфигурационного пространства стремится к отношению их мер Лебега (снова как при неограниченном возрастании, так и при неограниченном убывании времени) (ср. [4]).

При применении этого результата к идеальному газу, состоящему из одинаковых невзаимодействующих свободных частиц, снова предполагается, что плотность такого идеального газа — это плотность вероятностного распределения (в квантовом случае снова следует добавить — результатов измерений) координат свободной частицы[2]. Таким образом, оказывается, что плотность идеального газа, состоящего из невзаимодействующих свободных частиц, стремится к равномерной при неограниченном возрастании времени (а также и при его неограниченном убывании), причем это верно как для газа, состоящего из классических частиц, так и для газа, состоящего из квантовых частиц.

Центральную роль в работе играет то обстоятельство, что для квантовых систем, полученных квантованием классических гамильтоновых систем с квадратичной функцией Гамильтона (про такие квантовые системы говорят, что они обладают квадратичным гамильтонианом), эволюция функции Вигнера совпадает с эволюцией плотности вероятностного распределения в фазовом пространстве исходной классической гамильтоновой системы; поэтому использование функции Вигнера позволяет (в случае квадратичных гамильтонианов) решать одновременно квантовые и классические задачи и, в частности, применять при ис-

[2] Конечно, в квантовом случае это верно только для так называемых больцмановских, т.е. различимых, квантовых частиц; если частицы являются бозонами или фермионами, то сформулированное предположение выполняется лишь приближенно для достаточно разреженного газа — см. по этому поводу [7].

следовании квантовых версий моделей типа Пуанкаре методы, развитые в [3] и [4] для исследования классической модели.

Последующее изложение построено следующим образом. Сначала мы формулируем несколько определений функции Вигнера и доказываем их эквивалентность. Затем мы приводим доказательство того, что для квантовых систем с квадратичным гамильтонианом эволюция функции Вигнера совпадает с эволюцией плотности вероятностного распределения на фазовом пространстве классической гамильтоновой системы. В том случае, когда гамильтониан является суммой кинетической и потенциальной энергии, полученный результат вытекает из результата работы [10] об уравнении для функции Вигнера (таким образом, используемое далее описание эволюции функции Вигнера свободной частицы является частным случаем каждого из этих результатов). После этого мы показываем, что вероятностное распределение результатов измерений координат свободной квантовой частицы в $\mathbf{R}^n$ стремится к равномерному; это означает, в частности, что плотность условного распределения измеренных значений координат такой частицы, при условии, что эти значения принадлежат компактной области K конфигурационного пространства, стремится к функции, значение которой равно $1/\operatorname{mes} K$ в точках этой области и нулю вне ее (символ $\operatorname{mes} K$ обозначает меру Лебега множества K). Кроме того, мы показываем (с помощью рассуждений, аналогичных использованным в [4]), что при подходящих начальных условиях эволюция плотности распределения измеренных значений координат свободной квантовой частицы подчиняется эволюционному уравнению, фундаментальное решение задачи Коши для которого представляет собой переходную вероятность строго устойчивого случайного процесса. Наконец, мы рассматриваем движение квантовых частиц на торе и отмечаем, что эволюция плотности идеального газа, состоящего из таких частиц, описывается периодической функцией и, следовательно, существенно отличается от эволюции классического идеального газа.

1. Обозначения и терминология. Далее символ Q обозначает конфигурационное пространство классической гамильтоновой системы, P — ее пространство импульсов; предполагается, что $\dim Q$ $(= \dim P) = n$ $(< \infty)$ и что каждое из пространств Q и P наделено структурой евклидова пространства, а ортогональная сумма E евклидовых пространств Q и P (отождествляемая с их произведением, так что можно написать $E = Q \oplus P = Q \times P$) — структурой симплектического пространства, задаваемой отображением I: $E^* \to E$, $(p, q) \mapsto (q, -p)$; символом $\mathscr{H}$ обозначается функция Гамильтона (она определена на фазовом пространстве E гамильтоновой системы). Таким образом, можно сказать, что рассматриваемая гамильтонова система — это набор $(E, I, \mathscr{H})$; уравнения Гамильтона и Лиувилля — это соответственно уравнения

$$f'(t) = I\mathscr{H}'f(t),$$

где $\mathscr{H}'$ — производная (Гато) функции $\mathscr{H}$, и

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \{F, \mathscr{H}\} \quad (= F'_E(I(\mathscr{H}'))),$$

где $\mathscr{H}'$ — производная (Гато) функции $\mathscr{H}$, $\{\cdot,\cdot\}$ — скобка Пуассона (определяемая последним равенством) и F'_E — производная функции $F\colon \mathbf{R} \times E$ по второму аргументу. Термины «уравнение Гамильтона» и «система уравнений Гамильтона» считаются синонимами.

Пространство P отождествляется с пространством Q^* линейных функционалов на Q, а пространство Q — с пространством P^* линейных функционалов на P; тем самым пространство E отождествляется с пространством E^* линейных функционалов на нем; получаемое таким образом изоморфное отображение E на E^* обозначается символом J. Для $q_1, q_2 \in Q$, $p_1, p_2 \in P$ результат применения линейного функционала $(p_1, q_1) = J(q_1, p_1)$ к элементу (q_2, p_2) обозначается через $((p_1, q_1), (q_2, p_2))$ или через $p_1q_2 + q_1p_2$; используются и другие подобные обозначения. Гильбертово пространство H соответствующей квантовой системы реализуется как $L_2(Q)$; символ T обозначает оператор плотности (т.е. ядерный положительно определенный оператор в H с единичным следом), определяющий состояние этой квантовой системы, а символ ρ_T обозначает интегральное ядро оператора плотности. Если E, G — векторные пространства, то символ $L(E, G)$ обозначает пространство всех линейных отображений из E в G.

Если $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, то интеграл $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$ определяется следующим образом. Мы говорим, что этот интеграл существует, если для всякой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, для которой $\varphi(0) = 1$, существует предел $\lim_{a\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(ax)\, f(x)\,dx$, и в этом случае мы полагаем $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{a\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(ax)\, f(x)\,dx$ (это определение не зависит от выбора функции φ с перечисленными свойствами).

Если подынтегральная функция зависит от параметра α, то сходимость (при $a \to 0$) семейства интегралов $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(ax)\, f(x,\alpha)\,dx$ понимается как сходимость (при $a \to 0$) функций $\alpha \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(ax)\, f(x,\alpha)\,dx$ в пространстве S^* обобщенных функций.

Для каждой «достаточно хорошей» числовой функции[3)] F на E $(= Q \times P)$ символ $\widehat{F}$ обозначает (предполагаемый самосопряженным) псевдодифференциальный оператор (ПДО) в $L_2(Q)$, символом Вейля которого является F; это значит, что если $\varphi \in L_2(Q)$ и $\varphi \in \operatorname{dom} \widehat{F}$, то

$$(\widehat{F}\varphi)(q) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P \int_Q F\left(\frac{q_1 + q}{2},\ p\right) e^{-ip(q_1 - q)} \varphi(q_1)\, dq_1\, dp. \qquad (1)$$

[3)] Далее мы обычно не формулируем всех аналитических предположений, при которых справедливы приводимые предложения.

Если функция F принимает значения в некотором векторном пространстве K (которое далее предполагается конечномерным), то равенство (1) определяет оператор, действующий из пространства $L_2(Q)$ в пространство $L_2(Q,K)$ (K-значных квадратично интегрируемых функций на Q)[4]. Отметим, что если $k \in K^*$, то $k \circ \widehat{F} = \widehat{k \circ F}$. Если $A_1, A_2 \in L(L_2(Q))$, $D \in L(L_2(Q), L_2(Q,K))$, то равенство $D = A_1 \widehat{F} A_2$ означает, что $kD\varphi = A_1 \widehat{k \circ F} A_2 \varphi$ для всех $k \in K^*$ и φ из соответствующей области определения.

Для каждого $h \in E$ через $\widehat{h}$ обозначается псевдодифференциальный оператор в $L_2(Q)$, символом Вейля которого является Jh ($\in E^*$), так что если $h = q + p$ ($= (q,p)$), то $\widehat{h} = \widehat{p} + \widehat{q}$. Отметим, что если $q_0 \in Q$, то $\widehat{q}_0$ — это оператор $L_2(Q) \ni \varphi \mapsto -i\varphi'(\cdot)\, q_0$, т.е. оператор *импульса в направлении* q_0 (а не координаты).

В третьем пункте нам потребуется еще определение тех линейных преобразований в пространстве обладающих линейными символами псевдодифференциальных операторов, которые порождаются линейными преобразованиями этих символов (такие преобразования называются преобразованиями Боголюбова).

Пусть $\overline{E} = \{\widehat{h}\colon h \in E\}$; так как действие дифференциального оператора однозначно определяет его коэффициенты, то отображение $F^-\colon E^* \to \overline{E}$, $h \mapsto \widehat{h}$ взаимно однозначно; после наделения пространства $\overline{E}$ естественной структурой векторного пространства это отображение становится линейным изоморфизмом[5].

Если S — линейное симплектическое преобразование пространства E, то порождаемое им преобразование Боголюбова — это линейное отображение пространства $\overline{E}$ в себя, обозначаемое тем же символом S и определяемое равенством $S\widehat{h} = F^- T S T^{-1} (F^-)^{-1} \widehat{h}$ ($= \widehat{Sh}$)[6]. Преобразование Боголюбова, действующее в пространстве ПДО с линейными векторнозначными символами, определяется аналогично.

2. Функция Вигнера.

Определение 1. Функция Вигнера W_T, соответствующая оператору плотности (состоянию) T, — это деленный на $(2\pi)^n$ символ Вейля оператора плотности: $T = (2\pi)^n \widehat{W_T}$. Таким образом, если

---

[4] Такие операторы используются в третьем пункте этой работы.

[5] Продолжение изоморфизма F^- до линейного отображения пространства, порожденного пространством E^* и функцией на E, всюду равной единице, в пространство операторов в $L_2(Q)$, при котором эта функция отображается в умноженный на мнимую единицу тождественный оператор, называется шрёдингеровским представлением канонических коммутационных соотношений.

[6] Преобразование Боголюбова можно определить также следующим образом. Пусть $\alpha_{11} \in L(Q,Q)$, $\alpha_{12} \in L(P,Q)$, $a_{21} \in L(Q,P)$, $a_{22} \in L(P,P)$ и $S\colon E \to E$ определяется равенством $S(q,p) = (a_{11}q + a_{12}p,\ a_{21}q + a_{22}p)$. Тогда для $\overline{S}\colon \overline{E} \to \overline{E}$ справедливо: $S(\widehat{q} + \widehat{p}) = \widehat{a_{11}q} + \widehat{a_{12}p} + \widehat{a_{21}q} + \widehat{a_{22}p}$ ($= a_{11}\widehat{q} + a_{12}\widehat{p} + a_{21}\widehat{q} + a_{22}\widehat{p}$).

$\varphi \in L_2(Q)$, то

$$(T\varphi)(q) = ((2\pi)^n \widehat{W}_T \varphi)(q) = \int_P \int_Q W_T\left(\frac{q_1 + q}{2}, p\right) e^{-ip(q_1 - q)} \varphi(q_1)\, dq_1\, dp$$
$$= \int_Q \rho_T(q, q_1)\, \varphi(q_1)\, dq_1. \tag{2}$$

Замечание 1. Конечно, и для каждого $\tau \in [0, 1]$ можно было бы определить «τ-функцию Вигнера» как τ-символ оператора плотности (определение 1 получается при $\tau = \frac{1}{2}$); для $\tau = 0$ и $\tau = 1$ такие объекты — но иначе определяемые — рассматривались в литературе (см., например, [9] и имеющиеся там ссылки).

Определение 2. Функция Вигнера W_T, соответствующая состоянию T, определяется равенством

$$W_T(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \rho_T\left(q - \frac{1}{2}\, r,\ q + \frac{1}{2}\, r\right) e^{irp}\, dr.$$

Замечание 2. Из самосопряженности оператора плотности вытекает, что его интегральное ядро эрмитово-симметрично, откуда, в свою очередь, следует, что интеграл в правой части последнего равенства (т.е. функция Вигнера) может принимать только вещественные значения.

Предложение 1. *Определения 1 и 2 функции Вигнера равносильны.*

Доказательство. Из определения 1 вытекает, что

$$\int_P W_T\left(\frac{q_1 + q}{2},\ p\right) e^{-ip(q_1 - q)}\, dp = \rho_T(q, q_1) \tag{3}$$

почти всюду.

Поэтому $\rho_T(q - r, q + r) = \int_P W_T(q, p)\, e^{-ip2r}\, dp$, или $\rho_T(q - r/2, q + r/2) = \int_P W_T(q, p)\, e^{-ipr}\, dp$, и равенство из определения 2 получается теперь по формуле для обратного преобразования Фурье.

С другой стороны, равенство из определения 2 влечет — снова по формуле обращения преобразования Фурье — последнее из трех только что приведенных равенств, а следовательно, и все остальные; но равенство (2) означает, что W_T — функция Вигнера в смысле определения 1.

Замечание 3. Положив в равенстве (3) $q = q_1$, получим хорошо известное равенство $\int_P W_T(q, p)\, dp = \rho(q, q)$ для плотности $\rho(q, q)$ вероятности на Q, описывающей результаты измерений координаты, когда частица находится в состоянии T.

Определение 3. Функция Вигнера — это интегральное ядро линейного функционала $F \mapsto \operatorname{tr} T\widehat{F}$ на векторном пространстве символов Вейля (ограниченных) псевдодифференциальных операторов в $L_2(Q)$.

Это значит, что для каждого такого символа Вейля F справедливо равенство

$$\operatorname{tr} T\widehat{F} = \int_P \int_Q W_T(q,p)\, F(q,p)\, dq dp. \tag{4}$$

Предложение 2. *Определения* 2 *и* 3 *функции Вигнера равносильны.*

Доказательство. Из определения оператора $\widehat{F}$ вытекает, что справедливо равенство

$$\operatorname{tr} T\widehat{F} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \int_Q \rho(q_1,q) \int_P F\Big(\frac{q_1+q}{2},\ p\Big)\, e^{-ip(q_1-q)}\, dp\, dq\, dq_1.$$

После замены переменных $q_1 = \overline{q} - r/2$, $q = \overline{q} + r/2$ интеграл в правой части последнего равенства преобразуется в интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \int_Q \rho\Big(\overline{q} - \frac{r}{2},\ \overline{q} + \frac{r}{2}\Big) \int_P F(\overline{q},p)\, e^{ipq}\, dp\, d\overline{q}\, dr.$$

Таким образом, для каждой «достаточно хорошей» функции F на $Q \times P$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int_P \int_Q W_T(q,p)\, F(q,p)\, dq dp \\ &\quad = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P \int_Q \Big(\int_Q \rho\Big(q - \frac{r}{2},\ q + \frac{r}{2}\Big)\, e^{ipq}\, dr\Big)\, F(q,p)\, dq dp, \end{aligned} \tag{5}$$

а потому и равенство из определения 2. Таким образом, доказано, что из определения 3 вытекает определение 2. Для доказательства противоположной импликации достаточно провести рассуждения в обратном порядке.

Предложение 3. *Определения* 1 *и* 3 *функции Вигнера равносильны.*

Хотя это вытекает из двух предыдущих предложений, мы приведем и прямое доказательство. Согласно определению 1,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} T\widehat{F} &= \operatorname{tr}(2\pi)^n \widehat{W}_T \widehat{F} \\ &= \int_Q \int_Q \int_P \int_P W_T\Big(\frac{q_1+q}{2},\ \overline{p}\Big)\, e^{-i\overline{p}(q_1-q)} \frac{1}{(2\pi)^n} \\ &\qquad \times F\Big(\frac{q_1+q}{2},\ p\Big)\, e^{-ip(q-q_1)}\, dp\, d\overline{p}\, dq\, dq_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Замена переменных $q_1 = \overline{q} - r/2$, $q = \overline{q} + r/2$ превращает последний интеграл в интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \int_Q \int_P \int_P W_T(\overline{q},\overline{p})\, e^{i\overline{p}r} e^{-ipr} F(\overline{q},p)\, dp\, d\overline{p}\, d\overline{q}\, dq.$$

После интегрирования экспоненты $e^{i(\overline{p}-p)r}$ по r получается $(2\pi)^n \delta(\overline{p} - p)$, после чего интегрирование по $\overline{p}$ приводит к следующему результату:

$\int_P \int_Q W_T(\bar q, p)\, F(\bar q, p)\, d\bar q\, dp$; но это означает, что из определения 1 вытекает определение 3. Чтобы показать, что из определения 3 вытекает определение 1, достаточно провести рассуждения в обратном порядке.

Оператор Вейля $\mathscr{W}(h)$, порождаемый элементом $h \in E$, — это оператор в $L_2(Q)$, определяемый так: $\mathscr{W}(h) = e^{-i\hat h}$. Функция Вейля $\mathscr{W}_T$, соответствующая оператору плотности T (она называется также характеристической функцией), — это функция на E, определяемая равенством

$$\mathscr{W}_T(h) = \operatorname{tr} T\mathscr{W}(h). \tag{7}$$

О п р е д е л е н и е 4. Функция Вигнера, соответствующая оператору плотности T, — это обратное преобразование Фурье функции Вейля:

$$W_T(q,p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P \int_Q e^{i(q\bar p + p\bar q)}\, \mathscr{W}_T(\bar q,\, \bar p)\, d\bar q\, d\bar p.$$

Предложение 4. *Определение 4 функции Вигнера эквивалентно всем предыдущим.*

В доказательстве этого предложения используется следующая лемма.

Лемма 1. *Если $h \in E$, то $e^{i\hat h} = \widehat{e^{ih}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть $h = q_1 + p_1 \in E = Q \oplus P$ и $t \geqslant 0$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}
(e^{it\widehat{(p_1+q_1)}}\varphi)(q) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P \int_Q e^{it(p_1(q+\bar q)/2 + q_1 p)}\, e^{-ip(\bar q - q)} \varphi(\bar q)\, d\bar q\, dp \\
&= \int_Q \left(\int_P \frac{1}{(2\pi)^n} e^{ip(tq_1 + q - \bar q)}\, dp \right) e^{itp_1(q+\bar q)/2} \varphi(\bar q)\, d\bar q \\
&= \int_Q \delta(tq_1 + q + \bar q)\, e^{itp_1(q+\bar q)/2} \varphi(\bar q)\, d\bar q \\
&= e^{ip_1(q + tq_1/2)} \varphi(q_1 + q) = e^{itp_1 q} e^{ip_1 q_1 t^2/2} \varphi(tq_1 + q).
\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(e^{itp_1 q} e^{ip_1 q_1 t^2/2} \varphi(tq_1 + q)) &= (ip_1 q + tp_1 q_1)(e^{itp_1 q} e^{ip_1 q_1 t^2/2} \varphi(tq_1 + q)) \\
&\quad + e^{itp_1 q} e^{ip_1 q_1 t^2/2} \varphi'(tq_1 + q) p_1 \\
&= \left(\left(q_1 \frac{\partial}{\partial q} \right) + ip_1 q \right) \left(e^{itp_1 q} e^{ip_1 q_1 t^2/2} \varphi(tq_1 + q) \right);
\end{aligned}$$

иначе говоря,

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{it\widehat{(p_1+q_1)}}\varphi = i(\widehat p + \widehat q\,)\, e^{it\widehat{(p_1+q_1)}}\varphi.$$

Таким образом, функция $F\colon t \mapsto e^{it\widehat{(p_1+q_1)}}$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и полугруппа $e^{it(\hat p + \hat q)}$; так как $F(0)$ — это тождественное отображение, то $F(t) = e^{it(\hat p + \hat q)}$ для всех $t \geqslant 0$.

Доказательство предложения 4. В силу леммы 1 определение функции Вейля можно переписать так:

$$\mathscr{W}_T(q,p) = \operatorname{tr} T e^{-\widehat{i(q+p)}}; \tag{8}$$

поэтому, если W_T — функция Вигнера согласно определению 3, то

$$\mathscr{W}_T(q,p) = \int_P \int_Q W_T(\overline{q},\ \overline{p})\, e^{-i(p\overline{q}+q\overline{p})}\, d\overline{q}\, d\overline{p}, \tag{9}$$

что равносильно равенству из определения 4; таким образом, доказано, что определение 3 влечет определение 4.

Покажем теперь, что определение 4 влечет определение 2. Из равенств (7) и (8) вытекает, что

$$\int_P \int_Q W_T(q,p)\, e^{-i(p\overline{q}+q\overline{p})}\, dq\, dp$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P \int_Q \int_Q \rho(q,q_1)\, e^{-i\overline{p}(q+q_1)/2-ip\overline{q}}\, e^{-ip(q-q_1)}\, dq\, dq_1\, dp.$$

После замены переменных $q = \widetilde{q} - r/2$, $q_1 = \widetilde{q} + r/2$ интеграл в правой части равенства превращается в интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_P \int_Q \int_Q \rho\Big(\widetilde{q} - \frac{r}{2},\ \widetilde{q} + \frac{r}{2}\Big)\, e^{-i\overline{p}\,\widetilde{q}+ipr-ip\overline{q}}\, d\widetilde{q}\, dr\, dp.$$

Поэтому

$$\int_P \int_Q W_T(q,p)\, e^{i(p\overline{q}+q\overline{p})}\, dq\, dp$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P \int_Q e^{-iq\overline{p}} e^{-ip\overline{q}} \bigg(\int_Q \rho\Big(q - \frac{r}{2},\ q + \frac{r}{2}\Big)\, e^{ipr}\, dr \bigg)\, dq\, dp.$$

В последнем интеграле, помимо перестановки пределов интегрирования, мы заменили переменную интегрирования $\widetilde{q}$ на q. Таким образом, преобразования Фурье правой и левой частей равенства из определения 2 совпадают; но это означает, что справедливо и само это равенство.

Замечание 4. Определение 2 содержится в статье самого Вигнера [2]; определение 4 можно найти, например, в [9], а определение 3 фактически есть в книге [11].

3. Эволюция функции Вигнера квантовой системы с квадратичным гамильтонианом. В этом пункте доказывается, что для квантовых систем с квадратичным гамильтонианом эволюция функции Вигнера совпадает с эволюцией плотности вероятностного распределения на фазовом пространстве классической гамильтоновой системы. То, что это так для частного случая систем, (квадратичный) гамильтониан которых является суммой кинетической и потенциальной энергий, вытекает из полученного в работе [10] уравнения, описывающего эволюцию функции Вигнера квантовых систем, гамильтониан которых, хотя и не обязательно квадратичный, является такой суммой. При выводе этого уравнения в работе [10] используется определение 2 функции Вигнера; в настоящем пункте мы используем определение 4. В этом случае совпадение эволюции функции Вигнера с эволюцией классической плотности распределения оказывается — на эвристическом уровне — почти очевидным (хотя доказательство и требует некоторых выкладок).

Действительно, эволюция наблюдаемой $\widehat{h}$, начального состояния T, оператора Вейля и функций Вейля и Вигнера (квантовой системы, полученной квантованием по Шрёдингеру–Вейлю гамильтоновой системы $(E, I, \mathscr{H})$) описывается равенствами

$$\widehat{h}(t) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{h}e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}, \quad T(t) = e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}Te^{it\widehat{\mathscr{H}}},$$

$$\mathscr{W}(t,h) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\mathscr{W}(h)\,e^{-it\widehat{\mathscr{H}}} \quad (= e^{i\widehat{h}(t)}),$$

$$\mathscr{W}_T(t,h) = \mathscr{W}_{T(t)}(h), \quad W_T(t,h) = W_{T(t)}(h)$$

(где $t \geqslant 0,\ h = (q,p) \in E$)[7].

Положим еще $\mathscr{P}(t,q) = \int_P W_T(t,q,p)\,dp$; таким образом, $\mathscr{P}(t,\cdot)$ — это плотность вероятности на конфигурационном пространстве Q, описывающей результаты измерений координаты в момент t, если в начальный момент $(t = 0)$ система находилась в состоянии T.

Предложение 5. *Пусть $h = (q,p) \in Q \times P$ и, для каждого $t \geqslant 0$, $k_h(t) = (q_h(t),\ p_h(t)) \in Q \times P$ определяется равенством $\widehat{k_h(t)} = \widehat{h}(t)$. Тогда $\mathscr{W}_T(t,h)$ $(= \mathscr{W}_T(t,q,p)) = \mathscr{W}_T(k_h(t))$ $(= \mathscr{W}_T(q_h(t),p_h(t)))$.*

Доказательство. Оно вытекает из следующей цепочки равенств: $\mathscr{W}_T(t,h) = \mathscr{W}_{T(t)}(h) = \operatorname{tr} e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}Te^{it\widehat{\mathscr{H}}}e^{i\widehat{h}} = \operatorname{tr} Te^{it\widehat{\mathscr{H}}}e^{i\widehat{h}}e^{-it\widehat{\mathscr{H}}} = \operatorname{tr} Te^{i\widehat{h}(t)} = \operatorname{tr} Te^{i\widehat{k_h(t)}} = \mathscr{W}_T(k_h(t))$.

Ниже будет доказано, что функция $k_h(\cdot)$ из предложения 5 является решением уравнения, сопряженного к уравнению Гамильтона (то, что она удовлетворяет именно сопряженному к уравнению Гамильтона, а не самому этому уравнению, объясняется тем, что операторы $\widehat{q}$ и $\widehat{p}$ — это соответственно операторы импульса и координаты); так как образ функции относительно линейной замены переменных переводится преобразованием Фурье в функцию, получающуюся из образа преобразования Фурье исходной функции с помощью сопряженной замены переменных, то отсюда будет следовать, что эволюция функции Вигнера описывается равенством $W_T(t,q_1,p_1) = W_T(q_1(t),p_1(t))$, для которого

[7] Стоит подчеркнуть, что символ $\widehat{h}(\cdot)$ обозначает здесь не ПДО, а функцию вещественного аргумента, принимающую значения в пространстве операторов в $L_2(Q)$; во избежание недоразумений мы не будем нигде обозначать ее символом $\widehat{h}$, так как он используется для обозначения ПДО, символом Вейля которого является функция h.

$h_1(\cdot) = (q_1(\cdot), p_1(\cdot))$ — решение уравнения Гамильтона, что и требовалось проверить. Итак, фактически нам остается доказать, что функция $k_h(\cdot) = (q_h(\cdot), p_h(\cdot))$ является решением уравнения, сопряженного к уравнению Гамильтона.

Всюду далее предполагается, что (классический) гамильтониан $\mathscr{H}$ — это квадратичная функция, так что

$$\mathscr{H}(q,p) = a_{11}q^2 + 2a_{12}qp + a_{22}p^2; \tag{10}$$

здесь $a_{11} \in L(Q,P)$, $a_{12} \in L(Q,Q)$, $a_{22} \in L(P,Q)$, причем, в соответствии с принятым выше соглашением, $a_{11}q^2$ — это результат применения линейного функционала $J(a_{11}q) \in Q^*$ $(a_{11}q \in P)$ к элементу q; аналогичный смысл имеют и оставшиеся два слагаемых в правой части равенства[8] (10).

Пусть еще $Q_\perp, P_\perp$ — функции на $Q \times P$, определяемые равенствами $Q_\perp(q,p) = q$, $P_\perp(q,p) = p$. Тогда эволюция операторов, в начальный момент времени совпадающих с псевдодифференциальными операторами, символами Вейля которых являются эти функции, описывается равенствами $\widehat{Q}_\perp(t) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{Q_\perp}e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}$ и $\widehat{P}_\perp(t) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{P_\perp}e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}$, откуда, в свою очередь, следует, что каждая из функций $\widehat{Q}_\perp(\cdot)$, $\widehat{P}_\perp(\cdot)$ является решением уравнения Гейзенберга

$$z'(t) = i\,[\widehat{\mathscr{H}},\, z(t)]. \tag{11}$$

Это проверяется с помощью дифференцирования обеих частей предыдущих равенств; при этом операторнозначная функция $z(\cdot)$ называется дифференцируемой в точке t_0, если для каждого вектора a, принадлежащего общей для всех операторов $z(t)$ существенной области определения, функция $t \mapsto z(t)\,a$ дифференцируема в этой точке, и в этом случае производная $z'(t_0)$ определяется требованием, чтобы для каждого такого a элемент $z'(t_0)\,a$ был равен производной функции $t \mapsto z(t)\,a$ в точке t_0. Отметим, что здесь $\widehat{Q}_\perp(\cdot)$ и $\widehat{P}_\perp(\cdot)$ — это функции со значениями в пространстве операторов (из пространства $L_2(Q)$ в пространство $L_2(Q,K)$), тогда как $\widehat{Q_\perp}$ и $\widehat{P_\perp}$ — это ПДО, символами Вейля которых являются функции $Q_\perp$ и $P_\perp$ (при этом $\widehat{Q}_\perp(0) = \widehat{Q_\perp}$, $\widehat{P}_\perp(0) = \widehat{P_\perp}$). Так как из правил коммутации операторов координаты и импульса [12] вытекает, что, каковы бы ни были $t \geqslant 0$, $p \in Q^*$, $q \in P^*$, справедливо равенство

$$[p \circ \widehat{Q}_\perp(t),\, q \circ \widehat{P}_\perp(t)] = ipq$$

(пользуясь подходящими определениями, можно также сказать, что $[\widehat{Q}_\perp(t),\, \widehat{P}_\perp(t)] = i\,\mathrm{Id}$ для таких t; здесь Id — тождественное отображение

[8] Далее используются и другие подобные обозначения.

гильбертова пространства H в себя) и так как для тех же t справедливо равенство

$$\widehat{\mathscr{H}} = a_{11}(\widehat{Q}_\perp(t))^2 + a_{12}\widehat{Q}_\perp(t)\,\widehat{P}_\perp(t) + a_{12}^*\widehat{P}_\perp(t)\,\widehat{Q}_\perp(t) + a_{22}(\widehat{P}_\perp(t))^2,$$

то

$$[\widehat{\mathscr{H}},\, \widehat{Q}_\perp(t)] = -i\,\widehat{\mathscr{H}'_p}(t)$$

и

$$[\widehat{\mathscr{H}},\, \widehat{P}_\perp(t)] = i\,\widehat{\mathscr{H}'_q}(t),$$

где символы $\mathscr{H}'_q$ и $\mathscr{H}'_p$ обозначают производные по соответствующим аргументам, так что

$$\mathscr{H}'_q(q,p) = 2a_{11}q + 2a_{12}p, \quad \mathscr{H}'_p(q,p) = 2a_{12}q + 2a_{22}p$$

и

$$\widehat{\mathscr{H}'_q}(t) = \mathscr{H}'_q(\widehat{Q}_\perp(t),\ \widehat{P}_\perp(t)) = 2a_{11}\widehat{Q}_\perp(t) + 2a_{12}^*\widehat{P}_\perp(t),$$
$$\widehat{\mathscr{H}'_p}(t) = \mathscr{H}'_p(\widehat{Q}_\perp(t),\ \widehat{P}_\perp(t)) = 2a_{12}\widehat{Q}_\perp(t) + 2a_{22}\widehat{P}_\perp(t).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть $Q_\perp, P_\perp$ — функции на $Q\times P$, определяемые равенствами $Q_\perp(q,p) = q$, $P_\perp(q,p) = p$ и $\widehat{Q}_\perp(\cdot)$, и $\widehat{P}_\perp(\cdot)$ — функции на $[0,\infty)$, принимающие значения в пространстве линейных операторов, действующих из пространства $L_2(Q)$ в пространство $L_2(Q,K)$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *для каждого $t\in[0,\infty)$ справедливы равенства $\widehat{Q}_\perp(t) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{Q_\perp}e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}$ и $\widehat{P}_\perp(t) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{P_\perp}e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}$;*

(2) *Для каждого $t\geqslant 0$ справедливы равенства*

$$\widehat{Q}'_\perp(t) = 2a_{12}\widehat{Q}_\perp(t) + 2a_{22}\widehat{P}_\perp(t);$$
$$\widehat{P}'_\perp(t) = -2a_{11}\widehat{Q}_\perp(t) - 2a_{12}^*\widehat{P}_\perp(t)$$

и выполнены начальные условия $\widehat{Q}_\perp(0) = \widehat{Q_\perp}$, $\widehat{P}_\perp(0) = \widehat{P_\perp}$.

Иначе говоря, операторнозначные функции $\widehat{Q}_\perp(\cdot)$ и $\widehat{P}_\perp(\cdot)$ представляют собой решение задачи Коши для системы уравнений Гамильтона (которые в этом случае обычно также называются уравнениями Гейзенберга) с приведенными выше начальными условиями. Дифференцируемость операторнозначных функций определяется здесь почти так же, как и в уравнении (11), с той только разницей, что сейчас надо предполагать, что векторы a должны принадлежать существенной области определения, общей для всех операторов $\widehat{Q}_\perp(t), \widehat{P}_\perp(t)$.

При этом для всех $t\geqslant 0$ выполняется коммутационное соотношение $[\widehat{Q}_\perp(t), \widehat{P}_\perp(t)] = i\,\mathrm{Id}$.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что блок-матрица $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12}^* \end{pmatrix}$ задает оператор $I\mathscr{H}'$; поэтому, если для каждого $t\geqslant 0$ оператор $e^{tI\mathscr{H}'}$

задается блок-матрицей $\begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix}$, то решение задачи Коши для системы уравнений Гейзенберга, удовлетворяющее начальным условиям $(\widehat{Q_\perp}, \widehat{P_\perp})$ (а следовательно, и условиям коммутации), определяется равенствами

$$\widehat{Q}_\perp(t) = c_{11}(t)\,\widehat{Q_\perp} + c_{12}(t)\,\widehat{P_\perp}, \qquad \widehat{P}_\perp(t) = c_{21}(t)\,\widehat{Q_\perp} + c_{22}(t)\,\widehat{P_\perp}.$$

Предложение 7. *Пусть* $h = (q_0, p_0) \in Q \times P$ *и* $\widehat{h}(t) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{h}e^{-it\widehat{\mathscr{H}}}$ *Тогда*

$$\widehat{(e^{tI\mathscr{H}'})^*(p_0, q_0)} \quad (= \widehat{(e^{tI\mathscr{H}'})^* Jh}\ ) = \widehat{h}(t) \ (= \widehat{p}_0(t) + \widehat{q}_0(t)),$$

где $\widehat{(e^{tI\mathscr{H}'})^*(p_0, q_0)}$ *— псевдодифференциальный оператор, символом Вейля которого является функция* $(e^{tI\mathscr{H}'})^*(p_0, q_0) = [(q, p) \mapsto ((e^{tI\mathscr{H}'})^*(p_0, q_0))(q, p)]$ *(аналогичный смысл имеют и другие подобные обозначения).*

Доказательство. Так как $h = (q_0, p_0)$, то $\widehat{h} = \widehat{p}_0 + \widehat{q}_0 = \widehat{p_0 \circ Q_\perp} + \widehat{q_0 \circ P_\perp} = p_0 \circ \widehat{Q_\perp} + q_0 \circ \widehat{P_\perp}$, здесь первое равенство вытекает из того, что $p_0 \circ Q_\perp = p_0$, $q_0 \circ P_\perp = q_0$, а второе следует из определения псевдодифференциальных операторов. Поэтому

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(t) &= \widehat{p}_0(t) + \widehat{q}_0(t) = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}(\widehat{p}_0 + \widehat{q}_0)\, e^{-it\widehat{\mathscr{H}}} = e^{it\widehat{\mathscr{H}}}(\widehat{p_0 \circ Q_\perp} + \widehat{q_0 \circ P_\perp})\, e^{-it\widehat{\mathscr{H}}} \\
&= e^{it\widehat{\mathscr{H}}}(p_0 \circ \widehat{Q_\perp} + q_0 \circ \widehat{P_\perp})\, e^{-it\widehat{\mathscr{H}}} = p_0 e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{Q_\perp} e^{-it\widehat{\mathscr{H}}} + q_0 e^{it\widehat{\mathscr{H}}}\widehat{P_\perp} e^{-it\widehat{\mathscr{H}}} \\
&= p_0 \widehat{Q}_\perp(t) + q_0 \widehat{P}_\perp(t),
\end{aligned}$$

в силу предложения 6 и замечания 5 сумма справа равна

$$\begin{aligned}
&p_0(c_{11}(t)\,\widehat{Q_\perp} + c_{12}(t)\,\widehat{P_\perp}) + q_0(c_{21}(t)\,\widehat{Q_\perp} + c_{22}(t)\,\widehat{P_\perp}) \\
&\quad= (p_0 c_{11}(t) + q_0 c_{21}(t))\,\widehat{Q_\perp} + (p_0 c_{12}(t) + q_0 c_{22}(t))\,\widehat{P_\perp} \\
&\quad= \widehat{(p_0 c_{11}(t) + q_0 c_{21}(t)) Q_\perp} + \widehat{(p_0 c_{12}(t) + q_0 c_{22}(t)) P_\perp} \\
&\quad= \widehat{p_0 c_{11}(t) + q_0 c_{21}(t) + p_0 c_{12}(t) + q_0 c_{22}(t)} = \widehat{(e^{tI\mathscr{H}'})^*(p_0, q_0)}.
\end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть функция Гамильтона* $\mathscr{H}$ *является квадратичной и* $h = (q, p) \in E$. *Тогда эволюция функции Вейля описывается равенством* $\mathscr{W}_T(t, h) = \mathscr{W}_T((e^{tI\mathscr{H}'})^*(p, q))$.

Доказательство. Положим $k_h(t) = (e^{tI\mathscr{H}'})^* Jh$, $t \geqslant 0$ (так что функция k_h является решением уравнения, сопряженного к уравнению Гамильтона). Тогда, в силу предложения 7, $\widehat{k_h(t)} = \widehat{h}(t)$ для $t \geqslant 0$, и теперь доказываемое утверждение вытекает из предложения 5.

Теорема 2. *Пусть функция Гамильтона* $\mathscr{H}$ *является квадратичной и* $h = (q, p) \in E$. *Тогда эволюция функции Вигнера описывается равенством* $W_T(t, h) = W_T((e^{-tI\mathscr{H}'})\, h)$.

Доказательство. Это вытекает из теоремы 1, так как функция $t \mapsto (e^{tI\mathscr{H}'})^* Jh$ $(= k_h)$ является решением уравнения, сопряженного к уравнению Гамильтона, а функция Вигнера является (обратным) преобразованием Фурье функции Вейля.

Следствие 1. *Функция Вигнера $W_T(\cdot,\cdot)$ является решением уравнения Лиувилля.*

Следствие 2. *Если $\mathscr{H}(q,p) = \frac{1}{2}ap^2$, то $W_T(t,q,p) = W_T(q-tap,p)$.*

4. Бесстолкновительная среда, состоящая из свободных частиц. В этом пункте доказываются теоремы о стремлении к нулю и о выравнивании плотности вероятности результатов измерений координаты свободной квантовой частицы; при этом плотность вероятности вычисляется с помощью функции Вигнера. Так как, согласно следствию 2, эволюция функции Вигнера квантовой свободной частицы совпадает с эволюцией плотности вероятностного распределения на фазовом пространстве для классической свободной частицы, то полученные результаты охватывают как классический, так и квантовый вариант модели Пуанкаре. Стоит отметить, что хотя формула для эволюции функции Вигнера свободной квантовой частицы и была известна ранее (но была получена совсем по-другому) и даже применялась для описания — но только в частных случаях — расширения волнового пакета,— для исследования квантового аналога модели Пуанкаре она до сих пор не использовалась (впрочем, и сама квантовая модель Пуанкаре не рассматривалась).

Теорема 3. *Пусть для каждого $t > 0$, $|W_T(q-ap, p/t)| \leqslant C(q,p)$, где C — неотрицательная функция, причем для каждого $q \in Q$ функция $p \mapsto C(q,p)$ интегрируема (по p). Тогда $\mathscr{P}_T(t,q) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Заключение теоремы вытекает из теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла. Действительно,

$$\int_P W_T(q-tap,p)\,dp = \frac{1}{t^n}\int_P W_T\Big(q-ap,\ \frac{p}{t}\Big)\,dp \longrightarrow 0$$

при $t \to \infty$ для каждого $q \in Q$, так как $|W(q-ap, p/t)| \leqslant C(q,p)$ для каждого такого q.

Пример 1. Пусть $W_T(q,p) = \varphi(q)\,h(p)$, где функция h ограничена, $h(p) < C_1$ и измерима, а φ интегрируема. Тогда $|W_T(q-ap, p/t)| \leqslant C_1|\varphi(q-ap)|$ для каждого $q \in Q$ и каждого $t > 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, и пусть, кроме того, при каждом $q \in Q$ функция $p \mapsto W(q,p)$ непрерывна в нуле, и, каково бы ни было компактное подмножество K^Q пространства Q, функция $C(\cdot,\cdot)$ интегрируема по $K^Q \times P$ и $\int_Q W(q,0)\,dq > 0$.*

Тогда, каковы бы ни были компактные подмножества K_1^Q, K_2^Q пространства Q,

$$\frac{\int_{K_1^Q} \mathscr{P}_T(t,q)\,dt}{\int_{K_2^Q} \mathscr{P}_T(t,q)\,dt} \longrightarrow \frac{\operatorname{mes} K_1^Q}{\operatorname{mes} K_2^Q}, \qquad t \to \infty.$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{K_1^Q} \mathscr{P}(t,q)\,dq}{\int_{K_2^Q} \mathscr{P}(t,q)\,dq} &= \frac{\int_{K_1^Q}\int_P W_T(q-tap,p)\,dp\,dq}{\int_{K_2^Q}\int_P W_T(q-tap,p)\,dp\,dq} \\
&= \frac{t^{-n}\int_{K_1^Q}\int_P W_T(q-ap,\,p/t)\,dp\,dq}{t^{-n}\int_{K_1^Q}\int_P W_T(q-ap,\,p/t)\,dp\,dq} \\
&\longrightarrow \frac{\int_{K_1^Q}\int_P W_T(q-ap,0)\,dp\,dq}{\int_{K_2^Q}\int_P W_T(q-ap,0)\,dp\,dq} \\
&= \frac{\int_{K_1^Q}\int_P W_T(ap,0)\,dp\,dq}{\int_{K_2^Q}\int_P W_T(ap,0)\,dp\,dq} = \frac{\operatorname{mes} K_1^Q}{\operatorname{mes} K_2^Q};
\end{aligned}$$

при этом последнее равенство вытекает из того, что подынтегральные функции в числителе и в знаменателе предпоследней дроби представляют собой (совпадающие) константы (их общее значение равно $\int_P W_T(ap,0)\,dp$).

Следствие 3. *Плотность условного распределения измеренных значений координат свободной квантовой частицы, при условии, что эти значения принадлежат компактной области K конфигурационного пространства, стремится к функции $\mathscr{P}^K$, значение которой равно $1/\operatorname{mes} K$ в точках этой области и нулю вне ее; символ $\operatorname{mes} K$ обозначает меру Лебега множества K.*

Это вытекает из сказанного в самом конце доказательства теоремы.

Замечание 6. Результаты этого пункта, в частности, существенно усиливают ранее известные результаты о «расплывании» волновой функции свободной частицы.

5. Дополнительные замечания. В этом пункте мы сначала рассмотрим, следуя работе [4], случай, когда, как в примере 1, $W_T(q,p) = \varphi(q)\,h(p)$, причем

$$h(p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q e^{-|q|^\gamma}\,e^{ipq}\,dq, \qquad \gamma \in (0,2].$$

Иначе говоря, h — это преобразование Фурье функции, являющейся характеристической функцией так называемого строго устойчивого распределения с показателем γ, так что h — это плотность строго устойчивого распределения с тем же показателем (при $\gamma = 2$ получается стандартное гауссовское распределение). Для упрощения записи мы будем предполагать, что $\dim Q (= \dim P) = 1$; кроме того, мы положим $a = 1$ и будем опускать индекс T.

При перечисленных предположениях и соглашениях

$$\mathscr{P}(t,q) = \int_P h(p)\,\varphi(q-tp)\,dp = \int_P \frac{1}{t}\,h\Big(\frac{p}{t}\Big)\,\varphi(q-p)\,dp,$$

так что функция $\mathscr{P}(t,\cdot)$ является произведением дроби $1/t$ и свертки функций $p \mapsto h(p/t)$ и φ. Обозначим через $F\mathscr{P}(t,\cdot)$ преобразование Фурье функции $\mathscr{P}(t,\cdot)$ и через $Fh(t,\cdot)$ и $F\varphi(\cdot)$ преобразования Фурье функций $p \mapsto h(p/t)$ и $\varphi(\cdot)$, так что $F\mathscr{P}(t,z) = \int_Q \mathscr{P}(t,q)\,e^{-izq}\,dq$ и т.д. Из свойств свертки вытекает, что $F\mathscr{P}(t,z) = t^{-1}\,Fh(t,z)\,F\varphi(z) = e^{-t^\gamma |z|^\gamma} F\varphi(z)$. Это означает, что функция в левой части последнего равенства является решением задачи Коши на полупрямой $t > 0$ для (зависящего от параметра z) дифференциального уравнения

$$X'(t) = -t^{\gamma-1}|z|^\gamma X(t)$$

с начальным условием $F\varphi(z)$. В свою очередь, отсюда следует, что при $t > 0$ функция $\mathscr{P}(t,z)$ является решением задачи Коши для псевдодифференциального уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} = t^{\gamma-1}\Delta^{\gamma/2}S(\cdot),$$

с коэффициентом, зависящим от времени. Аналогично можно показать, что при $t < 0$ та же функция является решением задачи Коши для псевдодифференциального уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -|t|^{\gamma-1}\Delta^{\gamma/2}S(\cdot),$$

так что эволюция функции распределения инвариантна относительно обращения времени.

В заключение сделаем несколько замечаний о поведении свободных квантовых частиц на торе.

Оказывается, что в этом случае эволюция плотности вероятности результатов измерений будет описываться периодической функцией, так что никакого стремления вероятностного распределения к равномерному происходить не будет. Так как каждое состояние квантовой системы является вероятностной смесью чистых состояний, достаточно проверить это для чистого состояния. В одномерном случае вместо функций на окружности можно рассматривать периодические функции с периодом 2π на прямой, а в качестве нормы каждой такой функции принять сумму квадратов модулей коэффициентов ее разложения по экспонентам e^{iqn}. Достаточно ограничиться случаем, когда (ненормированный) вектор состояния ψ определяется равенством $\psi(q) = e^{inq} + e^{ikq}$, где n, k — целые числа (общий случай рассматривается аналогично). Тогда можно, как и выше, найти функцию Вигнера (она будет содержать

δ-функции по p) и затем найти (зависящее от времени) распределение вероятностей результатов измерений координат частицы (конечно, речь идет о распределении вероятностей на окружности, а не на всей прямой). При этом окажется, что зависимость этого распределения вероятностей от времени является периодической. Конечно, в этом случае такое распределение можно получить и непосредственно, не пользуясь функцией Вигнера. Тем не менее именно использование функции Вигнера позволяет продемонстрировать как механизм появления существенного различия между поведением квантовых частиц на окружности и на прямой, так и причины различия между поведением квантовых и классических частиц на окружности. С одной стороны, функция Вигнера, описывающая поведение квантовых частиц на окружности, представляет собой сумму, каждое из слагаемых которой или само является δ-функцией (по p) или содержит ее в качестве сомножителя, из-за чего условия теорем 3 и 4 не выполняются. С другой стороны, для классических частиц (на окружности) вероятность на фазовом пространстве может обладать даже гладкой плотностью, что и позволяет применить для исследования предельного поведения соответствующей ей плотности вероятности на конфигурационном пространстве методы, аналогичные описанным в предыдущем пункте, как это и было впервые сделано в книге [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А.* Замечания о кинетической теории газов. Избранные труды, т. 3. М.: Наука, 1974, с. 385–412.
2. *Wigner E.* On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. — Phys. Rev., 1932, v. 40, p. 749–759.
3. *Козлов В. В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002, 319 с.
4. *Kozlov V. V.* Notes on diffusion in collisionless medium. — Regul. Chaotic Dyn., 2004, v. 9, №1, p. 29–34.
5. *Walls D. F.*, *Milburn G. J.* Quantum Optics. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 351 p.
6. *Folland G. B.* Harmonic Analysis in Phase Space. Princeton: Princeton Univ. Press, 1989, 277 p.
7. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Статистическая физика, ч. 1. М.: Наука, 1976, 583 с.
8. *Kim Y. S.*, *Noz M. E.* Phase-Space Picture of Quantum Mechanics. Group Theoretical Approach. River Edge: World Scientific, 1991, 334 p.
9. *Lee H. W.* Spreading of a free wave packet. — Amer. J. Phys., 1982, v. 50, №5, p. 438–440.
10. *Moyal J. E.* Quantum mechanics as a statistical theory. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, v. 45, p. 99–124.
11. *Боголюбов Н. Н.*, *Боголюбов Н. Н.* (*мл.*). Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984, 384 с.
12. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979, 480 с.

Поступила в редакцию
6.X.2005