2005 г. ноябрь — декабрь *т. 60, вып. 6(366)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 510.6+519.21

ВЕСОВЫЕ СРЕДНИЕ, РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И СТРОГАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ

В. В. Козлов

Рассматривается круг вопросов, связанный с применением методов суммирования Рисса и Вороного в эргодической теории, теории чисел и теории вероятностей. Обсуждается парадокс первых цифр, указаны усиления классического результата Г. Вейля о равномерном распределении дробных долей значений многочлена, рассматривается возможность усиления эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина. В заключение перечислены некоторые нерешенные задачи.

Библиография: 44 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Парадокс первых цифр

Начнем с обсуждения известной задачи о частоте появления цифры g $(1 \leqslant g \leqslant 9)$ в последовательности первых цифр степеней двойки:

$$\begin{gathered} 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8, \\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ \dots\ . \end{gathered} \tag{1.1}$$

Введем последовательность чисел $x_n(g)$ (или, кратко, x_n), которые равны 1, если десятичное разложение 2^n начинается с цифры g, и равны нулю в противном случае. Частота появления g определяется как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_g(n)}{n},$$

где $\nu_g(n) = \sum_1^n x_k$. Хорошо известно, что этот предел существует и равен

$$\lg \frac{1+g}{g}\,.$$

В частности, в последовательности (1.1) семерка чаще встречается, чем восьмерка.

Этот результат можно сформулировать по-другому:

$$x_n \to \lg \frac{1+g}{g} \quad (C), \tag{1.2}$$

где C – сходимость по Чезаро.

Напомним вывод формулы (1.2). Ниже мы используем его идею в другой ситуации. Ясно, что десятичная запись числа 2^n начинается с цифры g, если

$$g \cdot 10^k \leqslant 2^n < (g+1) \cdot 10^k$$

при некотором целом $k \geqslant 0$. Логарифмируя эти неравенства и переходя к дробным частям, получаем неравенства

$$\lg g \leqslant \{n \lg 2\} < \lg(g+1). \tag{1.3}$$

Так как число $\lg 2$ иррационально, то последовательность дробных долей $\{n \lg 2\}$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ в смысле классического определения Вейля. Но это и означает, что в среднем числа $\{n \lg 2\}$ попадают в интервал $[\lg g, \lg(g+1))$ с частотой, равной длине этого интервала.

Упростим теперь задачу, заменив 2^n на n. Спрашивается, с какой частотой числа натурального ряда начинаются с цифры g? В этом случае неравенство (1.3) надо заменить неравенством

$$\lg g \leqslant \{\lg n\} < \lg(g+1).$$

Известно, что хотя последовательность дробных долей логарифмов всюду плотна в единичном отрезке, она не является равномерно распределенной. Этот результат установил О. Ж. Френель еще в 1917 г. Следовательно, в данном случае отношение $\nu_g(n)/n$ (средняя частота появления цифры g) вообще не имеет предела, когда $n \to \infty$.

Снова введем последовательность чисел x_n, которые равны 1, если десятичное разложение n начинается с цифры g, и равны 0 в противном случае.

Теорема 1.

$$x_n \to \lg \frac{1+g}{g} \quad (R, 1/n).$$

Здесь $(R, 1/n)$ обозначает логарифмический метод суммирования: $s_n \to s\ (R, 1/n)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2/2 + \dots + s_n/n}{1 + 1/2 + \dots + 1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k} = s.$$

Этот метод *включает* метод Чезаро: если $s_n \to s\ (C)$, то $s_n \to s\ (R, 1/n)$.

Теорема 1 доказана Р. Л. Дунканом [1]. Этой теореме предшествовал более ранний результат Б. Флейнджер [2], которая вместо риссовских средних использовала итерации метода Чезаро. Следует отметить, что теорема 1 – весьма частный случай результатов более ранней работы [3] о свойствах равномерного распределения, когда метод Чезаро заменяется методами суммирования Рисса (об этом речь пойдет в § 2).

Теорема 1 служит обоснованием парадокса первой цифры: вопреки ожиданию наугад взятое натуральное число почти в семь раз чаще начинается с единицы, чем с девятки. Этот парадокс обычно связывают с именем Ф. Бенфорда, американского физика, заметившего однажды, что в книге, содержащей подробную таблицу логарифмов, наиболее загрязнены края страниц в ее начале [4]. Это означает, что люди чаще всего ищут логарифмы чисел, которые начинаются с 1, и реже всего – логарифмы чисел, начинающиеся с 9. В.И. Арнольд также заметил, что распределение первых цифр в таблицах населения и площадей стран мира соответствует закону Бенфорда (см. комментарии в книге [5]).

Следует отметить, что закон Бенфорда был открыт и опубликован американским астрономом Саймоном Ньюкомом шестьюдесятью годами раньше [6]. Ньюком приводит следующую таблицу частот появления различных цифр на первом и втором месте в десятичной записи натуральных чисел.

цифра		первая цифра	вторая цифра
0	...	...	0.1197
1	...	0.3010	0.1139
2	...	0.1761	0.1088
3	...	0.1249	0.1043
4	...	0.0969	0.1003
5	...	0.0792	0.0967
6	...	0.0669	0.0934
7	...	0.0580	0.0904
8	...	0.0512	0.0876
9	...	0.0458	0.0850

Эти частоты Ньюком *вычисляет*, исходя из предположения, что последовательность $\{\lg n\}$ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Как мы видели, само определение равномерно распределенной последовательности нуждается в уточнении. Ньюком не дает точных определений. Но при этом надо помнить, что его пионерская работа опубликована за 35 лет до классической работы Германа Вейля о равномерном распределении по модулю 1.

Из таблицы Ньюкома видно, что вторые цифры в десятичной записи натуральных чисел также распределены неравномерно: ноль встречается в 1.4 раза чаще, чем девятка. Частота появления цифры g $(0 \leqslant g \leqslant 9)$ на втором месте подсчитывается тем же способом. Десятичные разложения таких чисел имеют вид

$$1g\ldots,\ 2g\ldots,\ \ldots,\ 9g\ldots.$$

Надо подсчитать частоты появления этих чисел (например, в смысле логарифмической сходимости) и затем эти частоты сложить.

Частота, с которой встречаются числа с десятичной записью $kg\ldots$, равна

$$\lg\frac{10k+g+1}{10k+g}.$$

Следовательно, частоты появления цифр $0,1,\ldots,9$ на втором месте равны

$$\lg\frac{11}{10}\cdot\frac{21}{20}\cdots\frac{91}{90},\ldots,\lg\frac{20}{19}\cdot\frac{30}{29}\cdots\frac{100}{99}.$$

Аналогично решается задача о вычислении частот появления цифр $0, 1, \ldots, 9$ на третьем месте:

$$\lg \frac{101}{100} \cdot \frac{111}{110} \cdot \frac{121}{120} \cdots \frac{991}{990}, \ldots, \lg \frac{110}{109} \cdot \frac{120}{119} \cdot \frac{130}{129} \cdots \frac{1000}{999}.$$

Эти числа отличаются друг от друга еще более незначительно.

Теорема 2. *Частота появления каждой цифры на n-м месте стремится к $1/10$ при $n \to \infty$.*

Родственное по своему смыслу утверждение отмечено ранее в [7]. Пусть $D(n)$ – количество всех цифр всех натуральных чисел, не превосходящих n, а $D_g(n)$ – количество появлений цифры g в десятичной записи всех таких чисел. Как показано в [7],

$$D_g(n)/D(n) \to 1/10. \tag{1.4}$$

Теорема 2 формально не зависит от этого результата, поскольку частота появления цифры g определяется в (1.4) с помощью сходимости по Чезаро, в то время как теорема 2 оперирует с частотами, определение которых использует более сильные методы суммирования.

Соотношение (1.4) фактически было известно до работы [7]. Например, для двоичных разложений оно содержится в учебнике [8] в качестве упражнения в приложении к гл. V.

Докажем теорему 2. Для определенности рассмотрим частоту появления нуля:

$$\lg\left(1+\frac{1}{10^n}\right)\left(1+\frac{1}{10^n+10}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{10^{n+1}-10}\right). \tag{1.5}$$

Добавим (для удобства записи) к (1.5) слагаемое

$$\lg\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right), \tag{1.6}$$

которое экспоненциально быстро стремится к нулю при $n \to \infty$ (как 10^{-n}). В итоге сумма (1.5) и (1.6) имеет вид

$$s_n = \sum_{j=0}^{9\cdot 10^{n-1}} \lg\left(1+\frac{1}{10^n+10j}\right).$$

Воспользуемся элементарным неравенством: если $x > 0$, то

$$0 < x - \ln(1+x) < x^2/2.$$

Следовательно,

$$0 < u_n - s_n < v_n, \tag{1.7}$$

где

$$u_n = \frac{1}{10\ln 10} \sum_{j=0}^{9\cdot 10^{n-1}} \frac{1}{10^{n-1}+j}, \qquad v_n = \frac{1}{2\ln 10} \sum_{j=0}^{9\cdot 10^{n-1}} \frac{1}{(10^n+10j)^2}.$$

Далее,

$$\int_0^{9\cdot 10^{n-1}} \frac{dx}{10^{n-1}+x} < \sum_{j=0}^{9\cdot 10^{n-1}} \frac{1}{10^{n-1}+j} < \int_0^{9\cdot 10^{n-1}} \frac{dx}{x-1+10^{n-1}}\,.$$

Интегралы слева и справа равны соответственно

$$\ln 10 \quad \text{и} \quad \lg\frac{10^n-1}{10^{n-1}-1} = \ln\biggl(10+\frac{9}{10^{n-1}-1}\biggr).$$

Следовательно, $u_n \to 1/10$ при $n\to\infty$.

Так как

$$\sum_{j=0}^{9\cdot 10^{n-1}} \frac{1}{(10^n+10j)^2} < \frac{9\cdot 10^{n-1}+1}{10^{2n}} < \frac{1}{10^n}\,,$$

то $v_n\to 0$ при $n\to\infty$. Но тогда из (1.7) вытекает, что $s_n\to 1/10$. Что и требовалось.

Как видно из доказательства, разность между (1.5) и $1/10$ убывает с ростом n как 10^{-n}. Таким образом, при больших n парадокс n-ой цифры практически не заметен.

Обсуждение различных аспектов парадокса первых цифр можно найти в работах [7], [9].

§ 2. Весовые средние и типы равномерного распределения

Соображения предыдущего параграфа, связанные с заменой сходимости средних арифметических (по Чезаро) другими методами суммирования, приводят нас к естественному обобщению равномерно распределенных последовательностей.

Пусть x_n $(n\geqslant 1)$ – последовательность точек единичного отрезка, $L\subset[0,1]$ – произвольный отрезок длины l, f – характеристическая функция этого отрезка. Пусть S – некоторый линейный и регулярный метод суммирования.

Будем говорить, что последовательность точек x_n S-равномерно распределена по модулю 1 (или, более кратко, S-рр), если для каждого отрезка L

$$f(x_n)\to \operatorname{mes} L = l \quad (S). \tag{2.1}$$

Если S – метод Чезаро, то получаем классическое определение Вейля.

Легко доказывается, что соотношение (2.1) справедливо для всех интегрируемых по Риману функций f, только надо, конечно, l заменить интегралом от f по отрезку $0\leqslant x\leqslant 1$. Как и в классическом случае, справедливо обращение этого результата: если для всех целых $m\neq 0$

$$e^{2\pi i m x_n}\to 0 \quad (S),$$

то последовательность x_n будет S-рр. Ясно, что всякая S-рр последовательность всюду плотно заполняет единичный отрезок.

Последовательности, равномерно распределенные в обобщенном смысле, на самом деле уже рассматривал сам Г. Вейль в классической работе “О равномерном распределении чисел по модулю один” (см. [5]). В качестве метода суммирования S он рассматривает методы Рисса (R,p_n), у которых весовые коэффициенты p_n монотонно убывают и $\sum p_n=\infty$, либо монотонно возрастают и при этом

$$(n+1)p_n = O\biggl(\sum_1^n p_j\biggr). \tag{2.2}$$

Вейль доказывает (см. [5; теорема 10, с. 74]) следующее. Пусть $P(x)$ – многочлен, у которого хотя бы один коэффициент (кроме свободного) иррационален. Тогда при сделанных выше предположениях относительно весовых коэффициентов p_n и для любой интегрируемой по Риману функции f

$$f(P(n)) \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad (R, p_n). \tag{2.3}$$

Это утверждение для линейной формы $P(x)$ и монотонно убывающей последовательности p_n содержится также в книге Г. Полиа и Г. Сеге [10; задача 173].

Однако эти утверждения не содержат ничего нового по сравнению с результатом о равномерном распределении по модулю 1 последовательности $\{P(n)\}$ (это – теорема 9 из [5], с. 69). Дело в том, что при $p_{n+1} \leqslant p_n$ справедливо следующее свойство: если $s_n \to s$ (C), то $s_n \to s$ (R, p_n). Это вытекает из теоремы Чезаро [11; теорема 14], установленной в 1888 г. (за 25 лет до работы Вейля). Другими словами, при сделанных предположениях метод Рисса *включает* метод Чезаро. С другой стороны, если $p_{n+1} \geqslant p_n$, то, наоборот, метод Чезаро всегда включает метод Рисса [11; теорема 14]. Если, кроме того, выполнено условие (2.2), то эти методы равносильны. Таким образом, предельное соотношение (2.3) будет содержательным только для тех методов Рисса, у которых p_n возрастают, но свойство (2.2) не выполняется.

Отметим, что при выполнении (2.2) p_n могут возрастать как степени n. С другой стороны, если p_n возрастают экспоненциально быстро, то метод Рисса теряет свою силу и становится эквивалентным обычной сходимости [11; теорема 15]. Поэтому реальный интерес в этом обобщении представляют случаи, когда, например, $p_n \sim \exp n^\gamma$, $0 < \gamma < 1$.

Укажем достаточные условия R-рр.

Теорема 3. *Пусть непрерывно дифференцируемые функции $f(x)$, $g(x)$ $(x \geqslant 1)$ удовлетворяют следующим условиям*:

1) $f' \neq 0$ *и* $f'(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$,
2) *функция* $g > 0$ *либо не убывает и*

$$\frac{g(x)}{\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

либо не возрастает и

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \infty, \tag{2.4}$$

3) *отношение* g/f' *либо не возрастает, либо не убывает и*

$$\frac{g(x)}{f'(x)\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Тогда последовательность $\{f(n)\}$ *будет* $(R, g(n))$*-равномерно распределенной.*

Эта теорема при несколько иных предположениях ($f(x) \nearrow \infty$ и $f'(x) \searrow 0$) доказана в [3]. Приведенный вариант утверждения о R-рр указан в [12]. Доказательство теоремы 3 использует формулу суммирования Эйлера–Маклорена.

Из этой теоремы выводится ряд полезных следствий.

Следствие 1. *В предположениях теоремы 3 последовательность $\{f(n)\}$ всюду плотна на единичном отрезке.*

Следствие 2 (теорема Фейера [10], [13]). *Если $f'(x)$ монотонно стремится к нулю и $x|f'(x)| \to \infty$ при $x \to \infty$, то последовательность $\{f(n)\}$ равномерно распределена по Вейлю.*

Следствие 3. *Пусть $f' > 0$, $f'(x) \searrow 0$ и $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда $\{f(n)\}$ – $(R, f'(n))$-равномерно распределенная последовательность.*

Надо положить $g = f'$ и воспользоваться теоремой 3. В частности, последовательность $\{c \ln n\}$, $c \neq 0$, будет $(R, 1/n)$-рр.

§ 3. Равномерное распределение и сходимость по Вороному

Кроме сходимости по Риссу мы будем использовать сходимость по Вороному. Пусть снова $p_1 > 0$, $p_n \geqslant 0$. Для последовательности s_n $(n \geqslant 1)$ положим

$$u_n = \frac{p_n s_1 + p_{n-1} s_2 + \dots + p_1 s_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}\,.$$

Ясно, что если $s_i = s_1$, то $u_n = s_1$. Если $u_n \to s$, то полагают $s_n \to s$ (W, p_n). Теория суммирования Вороного подробно изложена в [11].

В западной математической литературе метод Вороного называют методом Нёрлунда, который рассмотрел его спустя 18 лет после публикации заметки Г. Ф. Вороного 1901 года.

Критерий регулярности W-метода:

$$\frac{p_n}{p_1 + \dots + p_n} \to 0.$$

Оказывается, всякие два регулярных метода Вороного *совместимы*: если $s_n \to s\,(W)$ и $s_n \to s'\,(W')$, то $s = s'$. Подчеркнем, что методы Рисса не обладают этим важным свойством.

Если W-метод регулярен и последовательность весовых коэффициентов p_n не убывает, то метод (W, p_n) включает метод Чезаро C. Больший интерес представляют условия обратного включения. Пусть $p_1 = 1$, $p_n > 0$. Если W-метод регулярен, p_n не возрастают и

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

для всех $n > 2$, то C включает (W, p_n).

Имеется аналог теоремы 3 для равномерного распределения в смысле средних Вороного, отмеченный в [12].

Теорема 4. *Пусть непрерывно дифференцируемые функции $f(x)$, $g(x)$ $(x \geqslant 1)$ удовлетворяют следующим условиям*:

1) $f' \neq 0$ *и* $f'(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$,
2) *положительная функция* g *монотонна и*

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \infty,$$

$$\frac{g(x)}{\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{3.1}$$

3) *отношение* $g(n-x)/f'(x)$ *не убывает или не возрастает на отрезке* $1 \leqslant x \leqslant n$,

4) $|f'(x)| \int_1^x g(t)\,dt \to \infty$ *при* $x \to \infty$.

Тогда последовательность $\{f(n)\}$ *будет* $(W, g(n))$*-рр на единичном отрезке.*

Условие (3.1) – условие регулярности метода Вороного. Если положить $g(x) = 1$, то получим известную теорему Фейера о равномерном распределении по Вейлю.

Следствие. *Пусть* $f' > 0$, $f'(x) \searrow 0$, $g(x) > 0$ *не возрастает и*

$$f'(x) \int_1^x g(t)\,dt \to \infty \tag{3.2}$$

при $x \to \infty$. *Тогда* $\{f(n)\}$ *–* $(W, g(n))$*-рр.*

Положим, например, $g(x) = 1/x$. Тогда (3.2) принимает вид

$$f'(x) \ln x \to \infty.$$

В этом случае последовательность $\{f(n)\}$ – $(W, 1/n)$-рр.

Особый интерес представляет случай, когда функция g возрастает. Тогда регулярный $(W, g(n))$-метод включает метод Чезаро. Однако здесь (как правило) условие 3) теоремы 4 не выполняется. Укажем одну из возможных модификаций теоремы 4.

Будем считать далее, что функция f дважды непрерывно дифференцируема. Положим $\varphi(x) = 1/f'(x)$. Если продифференцировать произведение $\varphi(x)g(n-x)$ по x и разделить результат на это произведение, то получим

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{g'(n-x)}{g(n-x)}. \tag{3.3}$$

Предположим, что функции φ'/φ и g'/g *монотонно* убывают до нуля при $x \to \infty$. В частности, $f''/f' \to 0$ монотонно. Тогда при достаточно больших n в интервале $[1, n]$ функция (3.3) имеет ровно один нуль, который мы обозначим x_n.

Теорема 5 [14]. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $f' > 0$, $f'(x) \to 0$, $f''(x)/f'(x)$ *монотонно стремится к нулю при* $x \to \infty$,

2) $g > 0$, g *монотонно возрастает, а* $g'(x)/g(x) \to 0$ *монотонно при* $x \to \infty$,

3)
$$\frac{g(n)}{f'(x_n) \int_1^n g(t)\,dt} \to 0, \qquad \frac{g(x_n)}{f'(n) \int_1^n g(t)\,dt} \to 0 \tag{3.4}$$

при $n \to \infty$.

Тогда последовательность $\{f(n)\}$ *будет* $(W, g(n))$*-рр.*

Следствие. *Пусть* $f' > 0$, *функции* $f'(x)$ *и* $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$ *монотонно стремятся к нулю при* $x \to \infty$ *и*

$$\frac{f''(x)}{f'^2(x)} \to 0. \tag{3.5}$$

Тогда $\{f(n)\}$ *будет* $(W, 1/f'(n))$*-рр.*

Надо положить $g(x) = 1/f'(x)$. Легко проверить, что в этом случае все условия теоремы 5 выполнены, причем $x_n = (n-1)/2$. При этом условия (3.4) вытекают из (3.5).

Пример. Положим $f(x) = \ln^{\alpha} x$, $\alpha > 0$. Условие (3.5) выполняется лишь при $\alpha > 1$. В этом случае последовательность $\{\ln^{\alpha} n\}$ будет W-рр при подходящем выборе регулярного W-метода (в качестве W можно взять, например, метод Чезаро). Однако, это свойство теряется при $\alpha = 1$.

Теорема 6 [14]. *Пусть $a \geqslant 2$ – целое и W – регулярный метод суммирования Вороного. Тогда последовательность*

$$\left\{\frac{1}{2}\log_a n\right\}$$

не является W-рр.

Используя метод работы [14], Г. А. Калябин совсем недавно доказал, что этот результат справедлив для любой последовательности $\{\alpha \ln n\}$, $\alpha \neq 0$.

§4. Равномерное распределение на торе

Пусть $\mathbb{T}^n$ – n-мерный тор с угловыми координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$, изменяющимися по $\operatorname{mod} 2\pi$. Движение на $\mathbb{T}^n$ – это непрерывное отображение $t \mapsto x(t)$. Оно называется равномерно распределенным на $\mathbb{T}^n$ (по Вейлю), если для любой измеримой по Жордану области $D \subset \mathbb{T}^n$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\nu_D(T)}{T} = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \mathbb{T}^n},$$

где $\nu_D(T)$ – сумма длин интервалов на отрезке $[0, T]$, когда $x(t) \in D$; $\operatorname{mes} \mathbb{T}^n = (2\pi)^n$.

Вейль дал следующий критерий равномерного распределения:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(m, x(t))}\, dt = 0$$

для всех целочисленных векторов $m \neq 0$. Он же отметил следующий результат (теорема 8 из [5], с. 69): если $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – такие n многочленов от t, что

$$\sum m_j x_j(t) \neq \mathrm{const}$$

для всех целых m_j, не равных одновременно нулю, то движение $x_j = x_j(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ равномерно распределено на $\mathbb{T}^n$.

Пусть $t \mapsto \lambda(t)$ – положительная непрерывная функция, причем

$$\int_0^\infty \lambda(t)\, dt = \infty. \tag{4.1}$$

Будем говорить, что $f(t) \to \overline{f}$ (R, λ), если

$$\int_0^T \lambda(t) f(t)\, dt \Big/ \int_0^T \lambda(t)\, dt \to \overline{f}$$

при $T \to \infty$. Это – непрерывный аналог метода суммирования Рисса. Укажем основные свойства (R, λ)-метода, не стремясь к законченности и полноте.

Во-первых, (R, λ)-метод линеен и регулярен. Последнее свойство – прямое следствие правила Лопиталя.

Далее, пусть имеется еще одна функция $\mu(t) > 0$, удовлетворяющая (4.1). Будем говорить, что (R, λ) *включает* (R, μ), если из сходимости $f(t) \to \overline{f}\ (R, \mu)$ следует $f(t) \to \overline{f}\ (R, \lambda)$. Следующее утверждение дает достаточное условие включения.

Теорема 7. *Пусть*

$$\lambda(\tau) \int_0^\tau \mu\, dt \Big/ \mu(\tau) \int_0^\tau \lambda\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty \tag{4.2}$$

и функция

$$\lambda(\tau) \int_0^\tau \mu\, dt / \mu(\tau) \tag{4.3}$$

монотонна при $\tau \geqslant \tau_0$. *Тогда* (R, λ) *включает* (R, μ).

Пусть функции λ и μ из одного тела Харди и имеют порядок $+\infty$ относительно t:

$$\frac{\ln \lambda(t)}{\ln t} \to +\infty \quad \text{и} \quad \frac{\ln \mu(t)}{\ln t} \to +\infty$$

при $t \to +\infty$. Тогда условие (4.2) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\dot\lambda}{\lambda} \Big/ \frac{\dot\mu}{\mu} \to 0. \tag{4.4}$$

Если λ и μ принадлежат одному телу Харди, то условие о монотонности функции (4.3) при достаточно больших значениях τ заведомо выполнено.

Замечание. Пусть $(R, \lambda(n))$ и $(R, \mu(n))$ – два обычных (дискретных) метода Рисса, причем $\sum \lambda(n) = \sum \mu(n) = \infty$. По теореме Чезаро, если

$$\frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)} \leqslant \frac{\mu(n+1)}{\mu(n)}, \tag{4.5}$$

то $(R, \lambda(n))$ включает $(R, \mu(n))$. Если представить (4.5) в эквивалентной форме

$$\frac{\lambda(n+1) - \lambda(n)}{\lambda(n)} \leqslant \frac{\mu(n+1) - \mu(n)}{\mu(n)},$$

то становится ясным (ср. с (4.4)), что теорема 7 – непрерывный аналог теоремы Чезаро.

Пример. Положим $R_\alpha = (R, \exp t^\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$. Ясно, что R_0 является классическим методом Чезаро. Согласно теореме 7, R_α включает R_β, если $\beta \geqslant \alpha$. Как будет указано ниже, при $\alpha \geqslant 1$ методы R_α эквивалентны обычной сходимости.

Теорема 8. *Предположим, что*

$$\lambda(\tau) \Big/ \int_0^\tau \lambda\, dt \geqslant c = \text{const} > 0 \tag{4.6}$$

и f, $\dot f$ *ограничены. Тогда из* $f(t) \to \overline{f}\ (R, \lambda)$ *вытекает, что* $f(t) \to \overline{f}$ *(в обычном смысле).*

Для функций λ бесконечного порядка относительно t условие (4.6) эквивалентно следующему:

$$\dot\lambda / \lambda \geqslant c.$$

В частности, все методы $R_\alpha = (R, \exp t^\alpha)$ при $\alpha \geqslant 1$ эквивалентны обычной сходимости.

В известных тауберовых теоремах Винера предполагается, что f ограничена и медленно колеблется. Последнее свойство заведомо выполнено при условии ограниченности производной. Доказательство теорем 7 и 8 можно найти в [15].

Непрерывное движение $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n$ будем называть (R,λ)-равномерно распределенным (кратко (R,λ)-рр), если для *любой непрерывной* функции $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \lambda(t) f(x(t))\,dt \Big/ \int_0^\tau \lambda(t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\,d^n(x).$$

Это соотношение справедливо и для любой интегрируемой по Риману функции f при условии, что функция $t \mapsto f(x(t))$ интегрируема по Риману на каждом конечном интервале. Если $\lambda(t) = 1$, то получим определение равномерного распределения по Вейлю.

Для (R,λ)-рр достаточно проверить, что

$$\int_0^\tau \lambda(t) e^{i(m,x(t))}\,dt \Big/ \int_0^\tau \lambda(t)\,dt \to 0$$

при $\tau \to \infty$ для всех $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ (обобщенный критерий Вейля).

Теорема 9. *Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – такие n многочленов, что никакая их целочисленная нетривиальная комбинация не сводится к константе. Если*

$$\lambda(\tau) \Big/ \int_0^\tau \lambda(t)\,dt \to 0$$

и функции λ и t принадлежат одному телу Харди, то движение

$$x_j = x_j(t), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4.7}$$

будет (R,λ)-рр на $\mathbb{T}^n$.

Условия этого утверждения заведомо выполнены, если, например, $\lambda = \exp t^\alpha$, $\alpha < 1$. Таким образом, теорема 9 из [15] – это усиление результата Вейля (теорема 8 из [5], с. 69) о равномерном распределении движения (4.7) на $\mathbb{T}^n$ в обычном смысле (когда $\lambda = 1$).

Обсудим теперь задачу о распределении логарифмов. Пусть сначала $n = 1$. Движение $x = \ln t$, $t \geqslant a > 0$, не будет рр на окружности по Вейлю. Действительно,

$$\frac{1}{\tau} \int_a^\tau e^{i\ln t}\,dt = \frac{e^{i\ln\tau}}{1+i} + \frac{\mathrm{const}}{\tau}\,,$$

что осциллирует и не стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Наоборот, при всех $\varepsilon > 0$ движение $x = \ln^{1+\varepsilon} t$ будет рр по Вейлю на окружности $\mathbb{T} = \{x \bmod 2\pi\}$.

С другой стороны, поскольку при всех целых $m \neq 0$

$$\int_a^\tau \frac{e^{im\ln t}}{t}\,dt = \frac{e^{i\ln\tau}}{im} + \mathrm{const} = O(1),$$

то движение $x = \ln t$ будет $(R, 1/t)$-рр. Конечно, $(R, 1/t)$-метод сильнее метода Чезаро.

Эти замечания можно обобщить. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Если функция $t\lambda(t)$ монотонна при $t \geqslant t_0$ и*

$$\tau\lambda(\tau)\Big/\int_0^\tau \lambda(t)\,dt \to 0,$$

то движение $x_j = \omega_j \ln t$ с рационально несоизмеримыми $\omega_1,\dots,\omega_n$ будет (R,λ)-рр на $\mathbb{T}^n$.

Аналогичное утверждение справедливо и для повторных логарифмов. Например, функция $\ln\ln t$ будет $(R,(t\ln t)^{-1})$-рр на окружности $\{x \bmod 2\pi\}$.

Пусть $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция с нулевым средним значением, $\omega_1,\dots,\omega_n$ – набор постоянных частот (не обязательно нерезонансный). Рассмотрим интеграл

$$I(\tau,x_0) = \int_0^\tau f(\omega_1 t + x_1^0,\dots,\omega_n t + x_n^0)\,dt.$$

В [16] доказано, что при этих предположениях всегда найдется набор начальных фаз $x_0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$, $f(x_0) = 0$, для которых $I(\tau,x_0) \geqslant 0$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Аналогичное заключение, конечно, справедливо и для неравенства $I(\tau,x_0) \leqslant 0$. Этот результат допускает обобщение [15].

Теорема 11. *Пусть $\lambda(t) > 0$ – невозрастающая функция. Тогда при сделанных выше предположениях*

$$\int_0^\tau \lambda(t) f(\omega t + x_0)\,dt \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

при всех τ для некоторых начальных фаз x_0 таких, что $f(x_0) = 0$.

Следствие 1. *Пусть f – непрерывная функция на $\mathbb{T}^n$ с нулевым средним и $p \geqslant 1$. Тогда найдется $x_0 \in \mathbb{T}^n$ такое, что*

$$\int_0^\tau f(\omega t^p + x_0)\,dt \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

для всех τ.

Достаточно выполнить замену переменной по формуле $t^p = z$.

Следствие 2. *Пусть f – непрерывная функция с нулевым средним и произведение $e^z\lambda(e^z)$ не возрастает. Тогда найдется $x_0 \in \mathbb{T}^n$ такое, что*

$$\int_1^\tau \lambda(t) f(\omega \ln t + x_0)\,dt \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

при всех τ.

Достаточно перейти к новому переменному $z = \ln t$. В частности, заключение следствия 2 справедливо для $\lambda = 1/t$. Если не накладывать ограничений на функцию λ, то свойство знакоопределенности теряется. Например, при всех x_0 интеграл

$$\int_1^\tau \cos(\ln t + x_0)\,dt$$

бесконечно много раз меняет знак, когда $\tau \to \infty$.

Пусть теперь $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – непостоянная *бесконечно дифференцируемая* функция с нулевым средним значением, а частоты $\omega_1,\dots,\omega_n$ рационально независимы. Как доказано в [17], если $f(x_0) \neq 0$, то интеграл

$$\int_0^\tau f(\omega t + x_0)\,dt$$

бесконечно много раз меняет знак, когда $\tau \to \infty$. При $n = 1$ это очевидно, а при $n = 2$ – доказано в [16].

Теорема 12. *Пусть $\lambda(t) > 0$ – неубывающая функция. Если все нули функции*

$$\tau \mapsto \int_0^\tau \lambda(t) f(\omega t + x_0)\, dt \tag{4.8}$$

простые, то их бесконечно много.

Если функция λ убывает, то интеграл (4.8) может иметь лишь конечное число нулей. Простым примером служит классический интеграл Френеля

$$\int_0^\tau \cos t^2\, dt. \tag{4.9}$$

Заменой $t^2 = z$ он приводится к виду (4.8), причем λ монотонно стремится к нулю. Хорошо известно, что функция (4.9) имеет всего один простой нуль $\tau = 0$.

§ 5. Строгая эргодичность

Пусть M – компактное метрическое пространство, T – гомеоморфизм M. По теореме Крылова–Боголюбова, T сохраняет некоторую борелевскую меру μ на M. Если нормированная ($\mu(M) = 1$) *инвариантная* относительно T борелевская мера единственна, то непрерывное преобразование T называется *строго эргодическим.*

Ясно, что строго эргодический гомеоморфизм T эргодичен по отношению к своей единственной инвариантной борелевской мере μ. Однако далеко не каждое непрерывное эргодическое преобразование будет строго эргодическим. Например, у строго эргодического преобразования нет периодических точек. В противном случае имеется дополнительная инвариантная борелевская мера, сосредоточенная на периодической траектории гомеоморфизма T.

Укажем характеристическое свойство строго эргодического преобразования (*теорема Окстоби* [18]): для любой непрерывной функции $f\colon M \to \mathbb{R}$

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f\, d\mu \quad (C). \tag{5.1}$$

Символ $\rightrightarrows$ обозначает равномерную сходимость. Ввиду обратимости T, соотношение (5.1) справедливо и при $n \to -\infty$.

Пример. Пусть T – гомеоморфизм окружности $M = \{x \bmod 2\pi\}$, сохраняющий ориентацию. Ясно, что $Tx = x + f(x)$, где f – непрерывная 2π-периодическая функция. Как показал Пуанкаре, для всех x

$$f(T^n x) \to 2\pi\lambda \quad (C). \tag{5.2}$$

Число λ называется *числом вращения* гомеоморфизма T. Если T не имеет периодических точек, то оно строго эргодическое (см., например, [19]).

Соотношение (5.1) можно распространить на более широкий класс функций. Будем говорить, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ является *$\mathscr{R}$-интегрируемой* (относительно нормированной борелевской меры μ на M), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся две непрерывные функции f_1 и f_2 такие, что

$$\begin{gathered} f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{для всех} \quad x \in M, \\ \int_M (f_2 - f_1)\, d\mu < \varepsilon. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Очевидно, что $\mathscr{R}$-интегрируемые функции ограничены и все непрерывные функции $\mathscr{R}$-интегрируемы.

Интеграл $\mathscr{R}$-интегрируемой функции определяется следующим естественным образом. Рассмотрим последовательность ε_n, стремящуюся к нулю. Соответствующие последовательности непрерывных функций, удовлетворяющих условиям (5.3), обозначим $f_1^{(n)}$ и $f_2^{(n)}$. Легко показать, что пределы последовательностей интегралов от $f_1^{(n)}$ и $f_2^{(n)}$ по мере μ при $n \to \infty$ существуют и совпадают; это число будем называть *$\mathscr{R}$-интегралом* f по борелевской мере μ и обозначать

$$\int_M f\,d\mu.$$

Нетрудно убедиться в корректности определения $\mathscr{R}$-интеграла: оно не зависит от выбора последовательностей ε_n, $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$.

Пусть, например, M является многомерным тором $\mathbb{T}^k$, а μ – стандартная мера на $\mathbb{T}^k$. В этом случае класс $\mathscr{R}$-интегрируемых функций будет совпадать с классом функций, интегрируемых по Риману.

Теорему Окстоби можно слегка обобщить [20].

Теорема 13. *Преобразование T строго эргодическое тогда и только тогда, когда для любой $\mathscr{R}$-интегрируемой функции f*

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f\,d\mu \quad (C).$$

Подмножество $D \subset M$ будем называть *$\mathscr{R}$-измеримым*, если его характеристическая функция $f = 1_D$ будет $\mathscr{R}$-интегрируемой. Положим

$$\operatorname{mes} D = \int_M 1_D\,d\mu.$$

Ясно, что $\operatorname{mes} M = 1$ ввиду предположения о нормированности меры μ.

В качестве функции f из теоремы 1 можно взять характеристическую функцию *любой* $\mathscr{R}$-измеримой области D. Введем последовательность s_n $(n \geqslant 0)$ по следующему правилу: $s_k = 1$, если $x_k = T^k x \in D$, и $s_k = 0$ в противном случае. Пусть $\nu(n) = \sum_0^{n-1} s_k$. Тогда для строго эргодического преобразования будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{n} = \operatorname{mes} D.$$

Таким образом, траектория x_k, $k \geqslant 0$, *каждой* точки $x \in M$ проводит в области D время, пропорциональное в среднем мере этой области. Это – *общее* определение равномерно распределенной последовательности по Вейлю (см., например, [21]).

Если только что введенная последовательность s_k сходится к $\operatorname{mes} D$ с точки зрения линейного регулярного метода S при любом выборе $\mathscr{R}$-измеримой области D, то последовательность точек $x_k \in M$, $k \geqslant 0$, естественно назвать S-равномерно распределенной (кратко S-рр).

Следуя [20], покажем, как можно усилить теорему Окстоби с использованием методов суммирования Рисса и Вороного, *включенных* в метод Чезаро.

Теорема 14. *Пусть T – строго эргодический гомеоморфизм компактного метрического пространства M и f – $\mathscr{R}$-интегрируемая функция на M. Если*

$$\frac{p_0 + |p_1 - p_0| + \cdots + |p_n - p_{n-1}| + p_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} \to 0, \tag{5.4}$$

то

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f\,d\mu \quad (R, p_n) \quad \text{и} \quad (W, p_n). \tag{5.5}$$

Условие (5.4) заведомо выполнено, если

a) $p_{n+1} \leqslant p_n$ *и* $\sum p_n = \infty$,

b) $p_{n+1} \geqslant p_n$ *и*

$$\frac{p_n}{p_0 + \cdots + p_n} \to 0. \tag{5.6}$$

Пример. Пусть T – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности без периодических точек. Тогда предельное соотношение (5.2) можно усилить, заменяя метод Чезаро сколь угодно слабыми методами Рисса и Вороного. В [22] этот факт отмечен в общем случае, когда у гомеоморфизма T могут быть периодические точки.

В качестве еще одного примера рассмотрим *сложный косой сдвиг* на k-мерном торе $\mathbb{T}^k = \{x_1, \dots, x_k \bmod 1\}$, задаваемый формулой

$$\begin{aligned} Tx = \bigl((x_1 + \alpha) \bmod 1,\ &(x_2 + p_{2,1}x_1) \bmod 1,\ \dots, \\ &(x_k + p_{k,1}x_1 + \cdots + p_{k,k-1}x_{k-1}) \bmod 1\bigr), \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $\alpha, p_{i,j}$ – вещественные числа. Это преобразование, очевидно, сохраняет стандартную меру на $\mathbb{T}^k$. Как показано в [19], если α иррационально, а $p_{j,j-1} \neq 0$ для всех $2 \leqslant j \leqslant k$, то преобразование (5.7) строго эргодично. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathbb{T}^k$ ее траектория (последовательность точек $T^n x$, $n \geqslant 0$) равномерно распределена по Вейлю.

Пусть $\pi_j \colon \mathbb{T}^k \to \{x_j \bmod 1\}$ – естественная проекция k-мерного тора на окружность

$$\pi_j(x_1, \dots, x_k) = x_j.$$

Ясно, что каждая траектория $T^n x$, $n \geqslant 0$, при проектировании π_j переходит в последовательность точек, равномерно распределенную по модулю 1. Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве f взять функции, периодически зависящие лишь от одной переменной x_j.

Положим теперь $x = 0$. Можно доказать (см. [19], [23]), что

$$\pi_k(T^n x)\big|_{x=0} = \{P(n)\}, \tag{5.8}$$

где $P(z)$ – многочлен от z степени k, причем коэффициент при z^k иррационален, если α иррационально. Верно и обратное утверждение: для любого многочлена P степени k с иррациональным коэффициентом при старшей степени найдется сложный косой сдвиг k-мерного тора вида (5.7), у которого число α иррационально, $p_{j,j-1} \neq 0$ и справедлива формула (5.8). Отсюда (по Г. Фюрстенбергу [19]) вытекает замечательный результат Вейля о равномерном распределении дробных частей многочлена со старшим иррациональным коэффициентом. Общий случай, когда имеется иррациональный коэффициент при z^r, $r \geqslant 1$, легко сводится к этому случаю. Первоначальное доказательство Вейля основано на совершенно других идеях (см. [5]).

Используя теорему 14, редукцию Фюстенберга и условие строгой эргодичности косого сдвига (5.7), приходим к следующему усилению теоремы Вейля [20].

Теорема 15. *Пусть* $P(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$ *– многочлен, у которого один из коэффициентов* $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ *– иррациональное число. Если* $q_{n+1} \leqslant q_n$ *и* $\sum q_n = \infty$, *то последовательность* $\{P(n)\}$ *будет* (W, q_n)*-рр; если* $p_{n+1} \geqslant p_n$ *и выполнено* (5.6), *то последовательность* $\{P(n)\}$ *будет* (R, p_n).

Для многочлена первой степени теорема 15 доказана в работах [24], [25].

В заключение этого параграфа дополним теорему Окстоби еще одним утверждением, касающимся поведения суммы

$$\sigma_n(x) = f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x), \qquad x \in M. \tag{5.9}$$

Теорема 16. *Пусть* T *– строго эргодический гомеоморфизм компактного метрического пространства* M *и* f *– непрерывная функция на* M. *Тогда найдется точка* x_+ (x_-) *на* M *такая, что*

$$\sigma_n(x_+) - n\int_M f\,d\mu \geqslant 0 \qquad \left(\sigma_n(x_-) - n\int_M f\,d\mu \leqslant 0\right)$$

для всех целых n.

Это утверждение, отмеченное в [20], легко распространяется на средние Рисса (Вороного) с невозрастающими (неубывающими) весами. В таком виде оно является обобщением теоремы 11.

С другой стороны, если непрерывная функция f не постоянна, то для почти всех $x \in M$ разность

$$\sigma_n(x) - n\int_M f\,d\mu \tag{5.10}$$

бесконечно много раз меняет знак при $n \to \infty$. Это – следствие одного общего результата, установленного в работе [26] для общих эргодических преобразований. Интересно отметить, что множество точек $x \in M$, для которых разность (5.10) меняет знак лишь конечное число раз, может оказаться всюду плотным в M. Соответствующий пример для эргодического поворота окружности указан в [16]. В этом примере f – непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция. Теорема об осцилляциях разности (5.10) обобщена в работе [27] для средних Рисса (Вороного) с неубывающими (невозрастающими) весами.

§ 6. Весовые средние и усиленный закон больших чисел

Для выражения закона больших чисел в теории вероятностей обычно используют сходимость по Чезаро. Однако применение весовых средних придает этому кругу вопросов бóльшую гибкость. С одной стороны, использование методов суммирования Рисса и Вороного, *включенных* в метод Чезаро, позволяет усилить классические результаты, с другой – применение методов, которые *включают* метод Чезаро, позволяет расширить сферу применимости закона больших чисел.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$. Эти величины не предполагаются независимыми, и поэтому их попарные ковариации $R_{i,j} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathsf{E}(\xi_i \xi_j)$, вообще говоря, отличны от нуля. Классическая теорема Бернштейна [28] утверждает, что если

1) дисперсии σ_n^2 ограничены,
2) $|R_{i,j}| \leqslant \varphi(|i-j|)$, причем $\varphi(m) \to 0$ при $m \to \infty$,

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \to 0 \tag{6.1}$$

при $n \to \infty$.

Условия 1) и 2) можно несколько ослабить, заменив их следующими:

$$\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2 = o(n^2), \tag{6.2}$$

$$\varphi(n) \to 0 \quad (C). \tag{6.3}$$

Итак, из (6.2) и (6.3) следует (6.1). Именно это утверждение мы и собираемся обобщить [29].

Теорема 17. *Если*

$$\frac{p_1^2\sigma_1^2 + \cdots + p_n^2\sigma_n^2}{(p_1 + \cdots + p_n)^2} \to 0 \tag{6.4}$$

и

$$\frac{p_1 R_{1,n+1} + \cdots + p_n R_{n,n+1}}{p_1 + \cdots + p_n} \to 0, \tag{6.5}$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{p_1\xi_1 + \cdots + p_n\xi_n}{p_1 + \cdots + p_n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \to 0 \tag{6.6}$$

при $n \to \infty$.

Условие (6.4) можно заменить более простым:

$$\frac{\sigma_n^2 p_n}{p_1 + \cdots + p_n} \to 0. \tag{6.7}$$

Более точно, с помощью теоремы Штольца и предположения

$$p_n \bigg/ \sum_1^n p_j \to 0 \tag{6.8}$$

легко доказать, что из (6.7) следует (6.4).

С другой стороны, предполагая, что $|R_{i,j}| \leqslant \varphi(|i-j|)$, условие (6.5) можно представить в более простом и универсальном виде:

$$\varphi(n) \to 0 \quad (W, p_n). \tag{6.9}$$

Условие (6.8) – критерий регулярности (W, p_n)-метода. В частности, если $\varphi(n) \to 0$, то заведомо выполнено (6.9) и, следовательно, (6.5).

Что нового дает теорема 17? Классическое условие (6.2) означает, что дисперсии σ_n^2 могут расти медленнее n; точнее, если $\sigma_n^2 = o(n)$, то имеет место (6.2). Если же $\sigma_n^2 = cn$ ($c = \mathrm{const} > 0$), то (6.2) не выполняется и хорошо известно, что в этом случае классический закон больших чисел (6.1), вообще говоря, не справедлив даже для независимых случайных величин (см. по этому поводу [30; гл. X]).

Положим $p_n = 1/n$. Тогда соотношение (6.7) принимает вид $\sigma_n^2 = o(n \ln n)$. В частности, дисперсии могут расти линейно вместе с n и мы имеем дело с законом больших чисел в форме (6.6), если, конечно, ковариации $R_{i,j}$ равномерно по $|i-j|$ стремятся к нулю (или, более общо, справедливо условие (6.9) с весовыми коэффициентами $p_n = 1/n$).

К обсуждаемому кругу вопросов можно подойти с иной стороны. Рассмотрим случай, когда $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots$ (например, случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ одинаково распределены, но зависимы). Тогда условие (6.7) заведомо выполнено ввиду предложения (6.8). Можно рассмотреть случай, когда $p_n = \exp n^\alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 1$. С ростом α "сила" соответствующих (W, p_n)-методов возрастает, и поэтому мы будем иметь все более слабые условия на убывание ковариаций $\varphi(n)$. С другой стороны, сила $(R, \exp n^\alpha)$-методов убывает, и при $\alpha \to 1$ эти методы неограниченно приближаются к обычной сходимости. Но тогда сходимость по вероятности средних Рисса для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ к нулю будет более тонким (а следовательно, и более глубоким) фактом.

Идея обобщения закона больших чисел с использованием методов суммирования, отличным от метода Чезаро, конечно, не нова. Упомянем работы [31], [32], в которых соотношения вида (6.6) доказываются для матричных методов суммирования более общего вида, но при этом случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ предполагаются независимыми.

Следуя [33], обсудим теперь возможности обобщения *усиленного* закона больших чисел.

Теорема 18. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – одинаково распределенные независимые случайные величины с нулевыми средними, имеющие конечные моменты порядков $\leqslant 2k$, а числа $p_1, p_2, \ldots$ таковы, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p_1^2 + \cdots + p_n^2}{(p_1 + \cdots + p_n)^2} \right]^k < \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\{\xi_n \to 0 \ (R, p_n)\} = 1.$$

Следствие. *Пусть ξ_n имеют конечные моменты всех порядков. Тогда*

$$\xi_n \to 0 \quad (R, \exp n^\alpha) \quad \text{п.н.}$$

для всех $0 \leqslant \alpha < 1$.

Теорема 19. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые случайные величины с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$. Если $p_j > 0$, $\sum p_j = \infty$ и*

$$\sum \frac{p_j^2 \sigma_j^2}{(p_1 + \cdots + p_j)^2} < \infty, \tag{6.10}$$

то

$$\xi_n \to 0 \quad (R, p_n) \quad \text{п.н.} \tag{6.11}$$

Ясно, что при $p_1 = p_2 = \cdots$ условие (6.10) переходит в классическое условие Колмогорова $\sum \sigma_n^2 / n^2 < \infty$.

Применим теорему 19 к случаю одинаково распределенных случайных величин. Тогда условие (6.10) примет вид

$$\sum \frac{p_n^2}{(p_1 + \cdots + p_n)^2} < \infty. \tag{6.12}$$

Пусть, например, $p_n = \exp n^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$. Для этого случая ряд (6.12) сходится лишь при $\alpha < 1/2$, что является более слабым результатом по сравнению с теоремой 18. Правда, следует иметь в виду, что в теореме 19 на случайные величины накладываются более слабые ограничения. Заметим еще, что для $\alpha = 1/2$ можно привести пример последовательности *неограниченных* и одинаково распределенных независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, для которой соотношение (6.11) не выполняется.

Теорема 20. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями. Если $|\xi_n| \leqslant M$ п.н., $M = \mathrm{const}$, а числа p_n таковы, что*

$$\frac{p_n^2}{\sum_1^n p_k^2} = \frac{\psi(n)}{\ln\ln\sum_1^n p_k^2}\,,$$

$\psi(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\xi_n \to 0 \quad (R, p_n) \quad \text{п.н.}$$

Это утверждение выводится с помощью закона повторного логарифма Хинчина–Колмогорова.

В частности, если $p_n = \exp n^\alpha$, $\alpha < 1$, то функция ψ убывает как

$$\frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\,.$$

Положим теперь

$$p_n = \exp\frac{n}{\ln^\gamma n}\,, \qquad \gamma > 0. \tag{6.13}$$

С помощью формулы суммирования Эйлера–Маклорена нетрудно проверить, что

$$\frac{\sum p_k^2}{\left(\sum p_k\right)^2}$$

асимптотически убывают с ростом n как $1/\ln^\gamma n$. Следовательно, для всех k ряды в теореме 18 расходятся. Однако в этом случае

$$\psi(n) \sim \ln^{1-\gamma} n.$$

Таким образом, если $\gamma > 1$, то (по теореме 20) для коэффициентов вида (6.13) справедлив усиленный закон больших чисел.

Стоит, наверное, подчеркнуть, что в теореме 20 по сравнению с теоремой 18 накладываются более сильные условия на случайные величины ξ_n.

§ 7. Индивидуальная эргодическая теорема

Пусть M – пространство с конечной мерой μ ($\mu(M) < \infty$) и T – сохраняющее меру (не обязательно обратимое) преобразование: $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ для любой измеримой области A. По *теореме Биркгофа–Хинчина*, для $f \in L_1$ при почти всех $x \in M$ последовательность $f(T^n x)$ сходится по Чезаро к инвариантной (относительно преобразования T) и интегрируемой функции $\overline{f}(x)$, причем

$$\int_M f\,d\mu = \int_M \overline{f}\,d\mu.$$

Этому замечательному результату предшествовала *статистическая эргодическая теорема фон Неймана*, утверждающая сходимость в среднем

$$f(T^n x) \to \overline{f}(x) \quad (C).$$

Пусть L_2 – линейное пространство комплекснозначных функций f на M, суммируемых с квадратом. Каждой функции f можно сопоставить функцию $g(x) = f(Tx)$, $x \in M$. Хорошо известно, что соответствие $f \mapsto g = Uf$ определяет изометрический оператор U в L_2. Теорема фон Неймана утверждает, что

$$U^n f \to Pf \quad (C),$$

где P – оператор, проектирующий L_2 на подпространство всех векторов, инвариантных относительно U.

Теорема 21. *Если U – изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве и весовые коэффициенты p_n удовлетворяют условию* (5.4), *то*

$$U^n f \to Pf \quad (R, p_n) \quad и \quad (W, p_n).$$

Когда $p_n = 1$, получаем классическую теорему фон Неймана. Теорема 21 утверждает, что при $n \to \infty$ функции $f(T^n x)$ сходятся в среднем к инвариантной функции преобразования T в более сильном смысле, чем в теореме фон Неймана.

Теорема 21 остается содержательной, если гильбертово пространство заменить комплексной плоскостью. В этом случае изометрический оператор представляется комплексным числом z, по модулю равным 1. Если $z = 1$, то средние Вороного, очевидно, равны единице. Если $z \neq 1$, то теорема 21 утверждает, что

$$z^n \to 0 \quad (W, q_n).$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $q_n = 1/n$. Ясно, что

$$\frac{z^n + z^{n-1}/2 + \cdots + 1/n}{1 + 1/2 + \cdots + 1/n} = \frac{z^{n+1}(z^{-1} + z^{-2}/2 + \cdots + z^{-n-1}/n)}{\ln n + O(1)}. \tag{7.1}$$

Так как $z^{-1} \neq 1$, то при $n \to \infty$ выражение в круглых скобках стремится к $\ln(1-z^{-1})$. Это однозначная непрерывная функция на окружности с выколотой точкой $\{z : |z| = 1$ и $z \neq 1\}$. Следовательно, (7.1) стремится к нулю как $1/\ln n$.

В работе [34] рассматривались более общие методы суммирования, задаваемые бесконечной матрицей из неотрицательных чисел $a_{n,k}$ $(n, k = 0, 1, 2, \dots)$, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$$

для всех n. В [34] указан критерий, когда средние

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} U^k f$$

сходятся в среднем к Pf:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k\alpha+j} = 1/\alpha$ для всех $0 \leqslant j \leqslant \alpha$ и $\alpha = 2, 3, 4, \dots$,

(2) для любого иррационального γ последовательность $\{n\gamma\}$ равномерно распределена относительно этого метода суммирования.

Заметим, что условие (2) неконструктивно: дело в том, что описание матричных методов, для которых последовательности $\{n\gamma\}$, $\gamma \notin \mathbb{Q}$, равномерно распределены на отрезке $[0,1]$, является пока нерешенной задачей (см. по этому поводу [21]).

В [34] указаны также достаточные условия на коэффициенты $a_{n,k}$, при которых статистическая эргодическая теорема имеет место для преобразований со слабым и сильным перемешиванием. Результаты другого характера, касающиеся обобщения теоремы фон Неймана для весовых средних, можно найти в [35].

Существенно более трудным представляется следующий вопрос: можно ли усилить индивидуальную эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина, заменив суммирование по Чезаро на более слабый метод суммирования Рисса или Вороного? Как мы видели в § 5, для строго эргодических преобразований ответ положительный (теорема 14). Однако не исключено, что для точечной сходимости в типичной ситуации ответ может оказаться отрицательным.

Похожая задача рассматривалась в работах Г. Бакстера [36], [37] (см. также [38]) для метода Рисса (R,p_n), когда весовые коэффициенты определяются из рекуррентного соотношения

$$p_n = f_1p_{n-1} + \cdots + f_np_0, \qquad p_0 = 1,$$

где f_k $(k \geqslant 1)$ – заданная последовательность неотрицательных чисел, для которых $\sum f_k = 1$. Ясно, что все p_n принадлежат отрезку $[0,1]$ и p_n стремится к конечному пределу, когда $n \to \infty$. При некоторых дополнительных условиях в [21], [22] доказана индивидуальная эргодическая теорема для (R,p_n)-метода. В частности, если $f_1 = 1$, а остальные $f_k = 0$, то получаем обычную теорему Биркгофа–Хинчина.

Если p_n стремятся к конечному пределу, то (R,p_n)-метод может оказаться эквивалентным обычному методу Чезаро (такую возможность не исключает сам Бакстер). Поэтому наибольший интерес (согласно [22]) представляет случай, когда $p_n \to 0$. Однако если при этом p_n убывают монотонно, то (R,p_n)-метод включает метод Чезаро, и поэтому обобщенная индивидуальная эргодическая теорема сразу вытекает из обычной теоремы Биркгофа–Хинчина. Укажем еще работу [39], в которой рассматривалась сходимость средних Рисса последовательности случайных величин с невозрастающими весами p_n.

Чтобы лучше понять возникающие здесь трудности, рассмотрим более детально случай, когда M – единичный отрезок $[0,1]$, а T – *преобразование Бернулли*

$$x \mapsto 2x \bmod 1.$$

Это преобразование необратимое, но сохраняет обычную меру на $[0,1]$: $\operatorname{mes} L = \operatorname{mes}(T^{-1}L)$, где L – любое измеримое множество на $[0,1]$, а $T^{-1}L$ – полный прообраз L. Поскольку преобразование Бернулли эргодическое, то для любой интегрируемой функции f и для почти всех x

$$f(T^nx) \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad (C). \tag{7.2}$$

Зададим кусочно-постоянную функцию f следующим образом: $f(x) = 1$ при $0 \leqslant x < 1/2$ и $f(x) = -1$ при $1/2 \leqslant x \leqslant 1$. Функции $r_{n+1}(x) = f(T^nx)$, $n \geqslant 0$, называются *функциями Радемахера*. Они образуют ортонормированную систему. В частности, их средние равны нулю, а дисперсии равны единице. Соотношение (7.2) переходит в усиленный закон больших чисел (по Борелю, см. [40]):

$$r_n(x) \to 0 \quad (C) \tag{7.3}$$

для почти всех x.

Следовательно, предельное соотношение (7.3) можно заменить более сильным

$$r_n(x) \to 0 \quad (R, p_n), \tag{7.4}$$

если весовые коэффициенты p_n удовлетворяют условию теоремы 20. В частности, (7.4) справедливо для $p_n = \exp n^\alpha$, $\alpha < 1$. Однако вопрос о справедливости (7.4) для $p_n = \exp(n/\ln n)$ сводится к более тонкому анализу закона повторного логарифма.

§ 8. Некоторые нерешенные задачи

1°. Какие регулярные матричные методы суммирования S допускают хотя бы одну S-рр последовательность? Например, согласно [41] критерий существования (R, p_n)-рр последовательности сводится к условию (6.8). Более простая задача: при каких условиях на весовые коэффициенты p_n имеется (W, p_n)-рр последовательность?

Эти задачи мотивируются следующим обобщением теоремы фон Неймана (1925 г.), установленным в [41]: если имеется хотя бы одна W-рр последовательность, то *любую* всюду плотную на $[0,1]$ последовательность можно сделать W-рр после подходящего переупорядочивания. Этот результат, по-видимому, справедлив для любых линейных регулярных методов суммирования.

2°. До сих пор считается нерешенной следующая задача: описать все S-методы, для которых последовательности $\{n\alpha\}$, α – иррационально, будут S-рр. Более просто (но также содержательно) эта задача выглядит для регулярных R- и W-методов суммирования. *Достаточным* условием является соотношение (5.4).

3°. Пусть

$$P(z) = \alpha z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

– многочлен степени $k \geqslant 1$, α иррационально, а $x \mapsto f(x)$ – непрерывная периодическая функция с единичным периодом и нулевым средним. Положим

$$\sigma_n(a) = \sum_{j=1}^{n} f(\{P(j)\}), \qquad a = (a_0, \ldots, a_{k-1}). \tag{8.1}$$

Имеется много работ, в которых получены нетривиальные оценки таких сумм, когда $f(x) = \sin 2\pi x$ и $f(x) = \cos 2\pi x$ (см. [42]).

Из результатов, изложенных в § 5, можно вывести следующие свойства суммы (8.1):

1) найдутся такие a_+ и a_-, что $\sigma_n(a_+) \geqslant 0$ и $\sigma_n(a_-) \leqslant 0$ при всех целых n,
2) для почти всех $a \in \mathbb{R}^k$ сумма $\sigma_n(a)$ бесконечно много раз меняет знак, когда $n \to \infty$.

Последнее означает, что σ_n не может принимать только положительные или отрицательные значения при $n \geqslant n_0$.

Верно ли, что сумма (8.1) обладает свойством *возвращаемости*: для любого $\varepsilon > 0$ и любого N найдется $n > N$ такое, что $|\sigma_n(a)| < \varepsilon$? Для $k = 1$ это доказано в работах [43], [44] в предположении, что функция f абсолютно непрерывна. Более того, свойство возвращаемости в этом случае равномерно по параметру a. Для непрерывных функций контрпример указан в [16]. Поэтому при $k > 1$ следует ограничиться гладкими функциями.

4°. Аналогичный вопрос целесообразно рассмотреть для сумм вида

$$\sum_{j=1}^{n} g(j) F(\{f(j)\})$$

или
$$\sum_{j=1}^{n} g(n-j)F(\{f(j)\}),$$
где F – гладкая периодическая функция с единичным периодом и нулевым средним значением, а f и g – функции из теоремы 3 и теорем 4–5 соответственно.

5°. Верно ли, что если $\lambda(t)$ – неубывающая функция и $f(x_0) \neq 0$, то функция (4.8) имеет бесконечно много нулей?

6°. По теореме И. М. Виноградова, последовательность $\{\alpha p\}$, где α иррационально, а p принимает значения последовательных простых чисел, равномерно распределена в смысле классического определения Вейля. Можно ли усилить этот результат, заменив метод Чезаро более слабым методом Рисса или Вороного? Аналогичный вопрос относится к последовательности $\{F(p)\}$, где F – многочлен, у которого хотя бы один коэффициент, кроме свободного члена, иррационален.

7°. Наконец, сформулируем еще раз главный вопрос, ради которого, собственно, и была написана эта статья: можно ли в эргодической теореме Биркгофа–Хинчина заменить сходимость по Чезаро более слабой сходимостью по Риссу или Вороному? Вот одно из возможных уточнений этой задачи: верно ли, что
$$f(T^n x) \to \overline{f}(x) \quad (R, p_n),$$
где $p_n = \exp n^\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. L. Duncan. Note on the initial digit problem // Fibonacci Quart. 1969. V. 7. P. 474–475.
[2] B. J. Flehinger. On the probability that a random number has initial digit A // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. P. 1056–1061.
[3] M. Tsuji. On the uniform distribution of numbers mod 1 // J. Math. Soc. Japan. 1952. V. 4. P. 313–322.
[4] F. Benford. The law of anomalous numbers // Proc. Amer. Philos. Soc. 1938. V. 78. P. 551–572.
[5] Г. Вейль. Избранные труды. М.: Наука, 1984.
[6] S. Newcomb. Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers // Amer. J. Math. 1881. V. 4. P. 39–40.
[7] P. Diaconis. The distribution of leading digits and uniform distribution mod 1 // Ann. Probab. 1977. V. 5. №1. P. 72–81.
[8] Н. Бурбаки. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.
[9] R. A. Raimi. The first digit problem // Amer. Math. Monthly. 1976. V. 83. №7. P. 521–538.
[10] Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. I. М.: Наука, 1978.
[11] Г. Харди. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
[12] В. В. Козлов. О равномерном распределении // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. 2001. С. 96–99.
[13] С. Б. Гашков, В. Н. Чубариков. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М.: Наука, 1996.
[14] В. В. Козлов, Т. Мадсен. Равномерное распределение и сходимость по Вороному // Матем. сб. 2005. Т. 196. №10. С. 103–110.
[15] В. В. Козлов. О равномерном распределении на торе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2004. №2. С. 22–29.
[16] В. В. Козлов. Об интегралах квазипериодических функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1978. №1. С. 106–115.
[17] Н. Г. Мощевитин. О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условно-периодической функции // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №5. С. 723–735.
[18] J. C. Oxtoby. Ergodic sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1952. V. 58. №2. P. 116–136.
[19] H. Furstenberg. Strict ergodicity and transformation of the torus // Amer. J. Math. 1961. V. 83. №4. P. 573–601.

[20] В. В. Козлов. Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение // Матем. заметки. 2005. Т. 78. №3. С. 358–367.
[21] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
[22] В. В. Козлов, Т. Мадсен. Числа вращения Пуанкаре и средние Рисса и Вороного // Матем. заметки. 2003. Т. 74. №2. С. 314–315.
[23] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
[24] J. Cigler. Methods of summability and uniform distribution // Compositio Math. 1964. V. 16. P. 44–51.
[25] A. F. Dowidar. A note on the generalized uniform distribution (mod 1) // J. Natur. Sci. Math. 1971. V. 11. P. 185–189.
[26] G. Halász. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976. V. 28. №3–4. P. 389–395.
[27] А. А. Сорокин. Об осцилляциях средних Рисса и Вороного // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2005. №2. С. 13–17.
[28] С. Н. Бернштейн. О законе больших чисел // Сообщ. Харьков. матем. об-ва. Сер. 2. 1918. Т. 16. С. 82–87.
[29] В. В. Козлов, Т. Мадсен, А. А. Сорокин. О весовых средних значениях слабозависимых случайных величин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2004. №5. С. 34–37.
[30] В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.
[31] W. E. Franck, D. L. Hanson. Some results giving rates of convergence in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. №2. P. 347–359.
[32] D. L. Hanson, F. T. Wright. Some convergence results for weighted sums of independent random variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1971. V. 19. P. 81–89.
[33] В. В. Козлов. Суммирование расходящихся рядов и эргодические теоремы // Труды семин. им. И. Г. Петровского. 2002. Вып. 22. С. 142–168.
[34] D. L. Hanson, G. Pledger. On the mean ergodic theorem for weighted averages // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1969. V. 13. №2. P. 141–149.
[35] L. W. Cohen. On the mean ergodic theorem // Ann. of Math. (2). 1940. V. 41. P. 505–509.
[36] G. Baxter. An ergodic theorem with weighted averages // J. Math. Mech. 1964. V. 13. №3. P. 481–488.
[37] G. Baxter. A general ergodic theorem with weighted averages // J. Math. Mech. 1965. V. 14. №2. P. 277–288.
[38] R. V. Chacon. Ordinary means imply recurrent means // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 796–797.
[39] В. Ф. Гапошкин. О суммировании стационарных последовательностей методами Рисса // Матем. заметки. 1995. Т. 57. №5. С. 653–662.
[40] М. Кац. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: ИЛ, 1963.
[41] Е. В. Горделий. К теореме фон Неймана о перестановках всюду плотных последовательностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2004. №6. С. 18–24.
[42] Ло-ген Хуа. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964.
[43] В. В. Козлов. Об одной задаче Пуанкаре // ПММ. 1976. Т. 40. №2. С. 352–355.
[44] Е. А. Сидоров. Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем // УМН. 1979. Т. 34. №6. С. 184–188.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
17.08.2005