Функциональный анализ и его приложения
2005, т. 39, вып. 4, с. 32–47

УДК 517.925.51+531.36

Ограничения квадратичных форм на лагранжевы плоскости, квадратные матричные уравнения и гироскопическая стабилизация*

© 2005. В. В. Козлов

В статье обсуждаются различные аспекты теории линейных гамильтоновых систем с невырожденным гамильтонианом — квадратичной формой в $2n$-мерном фазовом пространстве. В §1 установлена возможность сведения гамильтоновых систем общего вида к уравнению второго порядка в n-мерном пространстве, которое характерно для теории малых колебаний механических систем. Такое сведение связано с решением следующей задачи: найти n-мерную лагранжеву плоскость, при ограничении на которую функции Гамильтона появляется невырожденная квадратичная форма. Обсуждается также более сложная задача о возможных сигнатурах ограничений квадратичной формы на лагранжевы плоскости. В частности, установлено, что инерционную матрицу редуцированной системы второго порядка можно сделать положительно определенной (как в задачах механики).

Линейные по скоростям слагаемые отвечают так называемым гироскопическим силам, которые не влияют на сохранность полной энергии. Их структура определяется кососимметрическим оператором Γ в n-мерном пространстве, который предполагается невырожденным. В частности, число степеней свободы n четно. Классическая задача о гироскопической стабилизации связана с изучением условий на структуру оператора Γ, при которых состояние равновесия гамильтоновой системы становится устойчивым. Несмотря на обилие результатов в этом направлении, задача о гироскопической стабилизации не может считаться исчерпанной. Мы рассматриваем задачу устойчивости при малых значениях нормы $\|\Gamma^{-1}\|$.

Наш подход связан с поиском инвариантных n-мерных плоскостей Σ гамильтоновой системы, которые сами являются симплектическими пространствами (§2). Симплектическая структура на Σ определяется как ограничение исходной симплектической структуры из фазового пространства на Σ. Такие инвариантные плоскости можно назвать *вихревыми* или *декартовыми* (по причинам, изложенным в [1]). Инвариантные плоскости находятся как решения квадратного матричного уравнения некоторого специального вида. Отвечающие вихревым плоскостям решения этого уравнения появляются парами. При этом

— исходное $2n$-мерное фазовое пространство распадается в прямую сумму вихревых n-мерных плоскостей Σ_1 и Σ_2,
— на Σ_1 и Σ_2 возникают гамильтоновы системы с $n/2$ степенями свободы,
— их гамильтонианы — ограничения исходного гамильтониана на Σ_1 и Σ_2,

*Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-136.2003.1).

— равновесие исходной гамильтоновой системы устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво равновесие каждой из этих гамильтоновых систем с вдвое меньшим числом степеней свободы.

Согласно «основному принципу симплектической геометрии» Алана Вейнстейна, все интересные объекты в этой геометрии являются лагранжевыми многообразиями. Однако автор настоящей статьи придерживается другого принципа, сформулированного в [1]: полезно изучать *вихревые* многообразия. Особенно с точки зрения теории устойчивости, поскольку ограничение гамильтониана на n-мерное инвариантное вихревое многообразие будет непостоянной функцией, которую в ряде случаев можно принять в качестве функции Ляпунова.

В §3 квадратное матричное уравнение решается методом сжатых отображений. При определенных условиях наибольшее по норме решение порождает устойчивую гамильтонову систему с $n/2$ степенями свободы. Таким образом, задача об устойчивости сводится к исследованию дополнительной линейной гамильтоновой системы с вдвое меньшим числом степеней свободы. В §4 это матричное уравнение решается с помощью разложения решений в ряды по степеням некоторого вспомогательного параметра. Их сходимость доказывается с использованием мажорирующего ряда, коэффициенты которого — хорошо известные в комбинаторике числа Каталана.

В §5 описывается структура инвариантных вихревых плоскостей для гамильтоновых систем с простым спектром.

Автор признателен С. В. Болотину, Д. В. Трещеву и А. А. Шкаликову за полезные обсуждения.

§1. Редукция линейных гамильтоновых систем

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$M\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Px = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь M и P — симметрические матрицы, причем $|M| \neq 0$ и $|P| \neq 0$, а матрица Γ кососимметрическая: $\Gamma^T = -\Gamma$. Точка, как обычно, обозначает производную по времени. Если матрица M положительно определена, то (1.1) описывает малые колебания механической системы с кинетической энергией $(M\dot{x}, \dot{x})/2$ и потенциальной энергией $(Px, x)/2$. Скобка $(\ ,\ )$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$: $(u, v) = \sum_1^n u_j v_j$. Слагаемое $-\Gamma\dot{x}$ имеет смысл дополнительных гироскопических сил.

В общем случае уравнение (1.1) имеет интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(M\dot{x}, \dot{x}) + \frac{1}{2}(Px, x). \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1), очевидно, гамильтоновы. Введем канонически сопряженные импульсы

$$y = M\dot{x} + \Gamma x/2,$$

а в качестве функции Гамильтона возьмем квадратичную форму (1.2), представленную в переменных x, y. Тогда от уравнения второго порядка (1.1) можно перейти к дифференциальным уравнениям Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}\,.$$

Обратно, пусть имеется линейная гамильтонова система

$$\dot v = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \dot u = -\frac{\partial H}{\partial v}, \qquad u, v \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

с квадратичным гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(Au, u) + (Bu, v) + \frac{1}{2}(Cv, v). \tag{1.4}$$

Пусть, например, симметрическая матрица A невырожденна. Тогда первое уравнение системы (1.3) можно разрешить относительно u:

$$u = A^{-1}\dot v - A^{-1}B^T v.$$

После подстановки этого выражения во второе уравнение (1.3) получим дифференциальное уравнение второго порядка вида (1.1)

$$A^{-1}\ddot v + (BA^{-1} - A^{-1}B^T)\dot v + (C - BA^{-1}B^T)v = 0.$$

Ясно, что матрица $BA^{-1} - A^{-1}B^T$ является кососимметрической, а $C - BA^{-1}B^T$ — симметрическая матрица.

Теорема 1. *Пусть имеется линейная гамильтонова система с невырожденным квадратичным гамильтонианом H. Тогда найдутся канонические переменные u, v, такие, что в этих переменных $|A| \neq 0$.*

Это утверждение эквивалентно следующему.

Теорема 2. *Пусть H — невырожденная квадратичная форма в $2n$-мерном симплектическом векторном пространстве. Найдется n-мерная лагранжева плоскость Λ, такая, что ограничение H на Λ будет невырожденной квадратичной формой.*

Действительно, если $|A| \neq 0$, то можно положить $\Lambda = \{v = 0\}$. Обратно, пусть Λ есть n-мерная лагранжева плоскость из теоремы 2 и $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — декартовы координаты на Λ. Эти координаты всегда можно расширить до канонических переменных $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ во всем симплектическом пространстве. В этих переменных $\Lambda = \{v = 0\}$, а квадратичная форма H имеет вид (1.4), причем, очевидно, $|A| \neq 0$.

Автору не известно короткое доказательство теоремы 2. Самый прямой путь — это использование теории нормальных форм Вильямсона [2]. Согласно этому подходу, вещественное симплектическое пространство, на котором задан квадратичный гамильтониан H, распадается в прямую сумму попарно косоортогональных вещественных симплектических подпространств так, что H представляется суммой частичных гамильтонианов определенного вида, заданных на этих подпространствах. Поэтому наша задача сводится к поиску лагранжевых плоскостей симплектических подпространств для невырожденных частичных гамильтонианов. Искомая лагранжева n-мерная плоскость будет прямой суммой этих «частичных» лагранжевых плоскостей.

Согласно Вильямсону,

(a) вещественной паре $\pm a$ собственных чисел порядка k отвечает частичный гамильтониан

$$H = -a\sum_{j=1}^{k} p_j q_j + \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1};$$

(b) четверке $\pm a \pm ib$ порядка k —

$$H = -a\sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b\sum_{j=1}^{k}(p_{2j-1}q_{2j} - p_{2j}q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2};$$

(c) чисто мнимой паре $\pm ib$ порядка $2k+1$ —

$$H = \pm\frac{1}{2}\Bigl[\sum_{j=1}^{k}(b^2 p_{2j}p_{2k-2j+2} + q_{2j}q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1}(b^2 p_{2j-1}p_{2k-2j+3} + q_{2j-1}q_{2k-2j+3})\Bigr] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1};$$

(d) чисто мнимой паре $\pm ib$ порядка $2k$ —

$$H = \pm\frac{1}{2}\Bigl[\sum_{j=1}^{k}(b^{-2} q_{2j-1}q_{2k-2j+1} + q_{2j}q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k-1}(b^2 p_{2j+1}p_{2k-2j+1} + p_{2j+2}p_{2k-2j+2})\Bigr] - b^2\sum_{j=1}^{k} p_{2j-1}q_{2j} + \sum_{j=1}^{k} p_{2j}q_{2j-1}.$$

В случаях (a) и (b) частичные гамильтонианы имеют вид

$$H = (Bp, q).$$

Справедлива простая

Лемма 1. *Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа $(n \times n)$-матрицы B и*

$$\lambda_j + \lambda_k \neq 0 \tag{1.5}$$

для всех j, k. Тогда для любых целых неотрицательных i^+, i^-, $i^+ + i^- = n$, найдется лагранжева плоскость Λ, такая, что квадратичная форма $H|_\Lambda$ имеет сигнатуру (i^+, i^-).

В частности, форма $H|_\Lambda$ невырожденна.

Доказательство. Будем искать Λ в виде

$$p = Rq, \qquad R^T = R.$$

Пусть $h = (Qq, q)/2$ — произвольная квадратичная форма с сигнатурой (i^+, i^-). Положим $H|_\Lambda = h$. Это эквивалентно линейному матричному уравнению

$$BR + RB^T = Q.$$

Согласно условию (1.5), оно всегда разрешимо для любой симметрической матрицы Q (см., например, [3]), что и требовалось.

В случае (a) k собственных чисел матрицы B равны $-a$, а в случае (b) $2k$ собственных чисел матрицы B равны $-a \pm ib$. Поскольку $a \neq 0$, то условие (1.5) здесь заведомо выполнено. Таким образом, в случаях (a) и (b) теорема 2 доказана.

В оставшихся случаях положим $\Lambda = \{p = 0\}$. Тогда

$$H|_\Lambda = \frac{1}{2}(Cq, q),$$

причем (как легко убедиться) $\det C \neq 0$. Что и требовалось.

Если квадратичная форма H в $2n$-мерном пространстве невырожденна, то ее ограничение на *некоторую* n-мерную плоскость (не обязательно лагранжеву) будет положительно или отрицательно определенной квадратичной формой. Спрашивается, справедливо ли это заключение для лагранжевых плоскостей? При положительном ответе мы имели бы возможность свести *любую* линейную гамильтонову систему с невырожденным гамильтонианом к линейной механической системе (1.1) с положительно определенной матрицей инерции M.

Однако ответ на этот вопрос отрицательный. Простым контрпримером служит квадратичная форма

$$H = u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2. \tag{1.6}$$

Действительно, рассмотрим лагранжеву плоскость Λ, заданную уравнениями

$$u_1 = \alpha v_1 + \beta v_2, \qquad u_2 = \beta v_1 + \gamma v_2. \tag{1.7}$$

Ограничение формы (1.6) на Λ имеет вид

$$(\alpha^2 - \beta^2 + 1)v_1^2 + 2\beta(\alpha - \gamma)v_1 v_2 + (\beta^2 - \gamma^2 - 1)v_2^2. \tag{1.8}$$

Определитель матрицы этой квадратичной формы равен

$$\Delta = -(\beta^2 - \alpha\gamma)^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 - 1.$$

Эта функция трех переменных α, β, γ достигает максимума в точках кривой $\alpha = \gamma = \omega$, $\beta = \pm\sqrt{1-\omega^2}$ ($\omega \in \mathbb{R}$), и этот максимум равен нулю. Следовательно, Δ не может быть положительным, и потому квадратичная форма (1.8) не может быть знакоопределенной.

Случаи, когда Λ не проектируется однозначно на координатную плоскость v_1, v_2, охватываются уравнениями

$$u_1 = \alpha v_1 + \beta u_2, \qquad v_2 = -\beta v_1 \tag{1.9}$$

или

$$u_2 = \alpha v_2 + \beta u_1, \qquad v_1 = -\beta v_2. \tag{1.10}$$

Совсем просто убедиться в том, что ограничение формы (1.6) на лагранжевы плоскости (1.9) и (1.10) также никогда не будет знакоопределенной квадратичной формой.

Тем не менее уравнения Гамильтона с гамильтонианом (1.6) приводятся к системе второго порядка вида (1.1) с положительно определенной матрицей M:

$$\ddot{v}_1 + v_1 = 0, \qquad \ddot{v}_2 + v_2 = 0.$$

Однако здесь нет никакого противоречия, поскольку канонические переменные u_1, v_1 и u_2, v_2 в гамильтониане (1.6) разделяются. Эти наблюдения можно обобщить.

Пусть

$$\mathbb{R}^{2n} = \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_m, \tag{1.11}$$

симплектические подпространства Π_k и Π_l косоортогональны (когда $k \neq l$), $H_l\colon \Pi_l \to \mathbb{R}$ — частичные гамильтонианы и

$$H = H_1 + \dots + H_m. \tag{1.12}$$

Пусть (i_l^+, i_l^-) — сигнатура квадратичной формы H_l; ввиду предположения о невырожденности сумма $i_l^+ + i_l^-$ равна $\dim \Pi_l$ и, следовательно, четна.

Теорема 3. *Пусть* j_l^+ *и* j_l^- *— целые неотрицательные числа, такие, что*

$$j_l^+ \leqslant i_l^+, \quad j_l^- \leqslant i_l^-, \quad j_l^+ + j_l^- = (i_l^+ + i_l^-)/2.$$

Тогда найдется n-мерная лагранжева плоскость Λ, такая, что квадратичная форма $H|_\Lambda$ имеет сигнатуру (j^+, j^-), где $j^\pm = j_1^\pm + \dots + j_m^\pm$.

Для квадратичной формы (1.6) $m = 2$, а сигнатуры частичных гамильтонианов H_1 и H_2 равны $(2,0)$ и $(0,2)$ соответственно. Следовательно, по теореме 3 сигнатурой невырожденного ограничения квадратичной формы (1.6) на лагранжевы плоскости может быть только $(1,1)$.

В типичном случае, когда спектр линейной гамильтоновой системы с гамильтонианом H простой, теорема 3 доказывается совсем просто. Для частичных гамильтонианов с нетривиальными жордановыми клетками вида (a) и (b) теорема 3 вытекает из леммы 1. В случаях (c) и (d) заключение теоремы проверяется громоздкими вычислениями.

Сигнатуры частичных гамильтонианов подсчитаны в работе [4]. В случае (a) сигнатура равна (k,k), в случае (b) это $(2k,2k)$, в случае (c) она равна либо $(2k+2,2k)$, либо $(2k,2k+2)$, а в случае (d) снова имеем сигнатуру $(2k,2k)$.

Следствие 1. *Линейная гамильтонова система с n степенями свободы и невырожденным гамильтонианом сводится к дифференциальному уравнению второго порядка*

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Px = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

где $\Gamma^T = -\Gamma$, $P^T = P$, $|P| \neq 0$.

Для доказательства воспользуемся разложениями (1.11) и (1.12). По теоремам 1 и 3 уравнения Гамильтона сводятся к уравнению (1.1), в котором

$$M = \operatorname{diag}(M_1, \dots, M_n), \quad \Gamma = \operatorname{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m), \quad P = \operatorname{diag}(P_1, \dots, P_m),$$

причем симметрические матрицы M_j либо положительно, либо отрицательно определены. Если M_j отрицательно определена, то у M_j, Γ_j и P_j следует поменять знак. В результате уравнение (1.1) сохранит свой вид, только матрица M теперь станет положительно определенной. После этого уравнение (1.1) стандартным приемом приводится к виду (1.13).

Следствие 2. *Линейная гамильтонова система с простым спектром сводится к уравнению* (1.13), *причем ранг кососимметрической матрицы Γ равен удвоенному количеству комплексных четверок в спектре.*

При этом не следует думать, что в случае $|\Gamma| \neq 0$ простой спектр уравнения (1.13) состоит из одних комплексных четверок.

Следствие 3. *Линейную систему*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1.14}$$

с единственным равновесием $x = 0$ ($|A| \neq 0$), допускающую невырожденный квадратичный первый интеграл, всегда можно привести к виду (1.13).

Действительно, при указанных условиях система (1.14) гамильтонова [5]. В частности, s четно ($s = 2n$). Остается воспользоваться заключением следствия 1.

Сведение гамильтоновых систем к виду (1.13) носит принципиальный характер и не вполне конструктивно. Всюду в дальнейшем исследуется уравнение (1.1), причем не предполагается положительная определенность матрицы M.

§2. Инвариантные вихревые плоскости

Пусть n-мерная плоскость

$$\Sigma = \{x, \dot{x} : \dot{x} = Ax\}$$

является инвариантной для системы (1.1): если фазовая траектория системы (1.1) пересекает Σ, то она целиком лежит в Σ. Условие инвариантности плоскости Σ имеет вид квадратного относительно матрицы A уравнения

$$(MA + \Gamma)A + P = 0. \tag{2.1}$$

Положим

$$A = M^{-1}(D - \Gamma/2). \tag{2.2}$$

Тогда матрица D будет удовлетворять следующему квадратному уравнению:

$$(D + \Gamma/2)M^{-1}(D - \Gamma/2) + P = 0. \tag{2.3}$$

Ясно, что

$$(D^T + \Gamma/2)M^{-1}(D^T - \Gamma/2) + P = 0.$$

Следовательно,

$$A' = M^{-1}(D^T - \Gamma/2) \tag{2.4}$$

также удовлетворяет уравнению (2.1).

Матрицы A и A' связаны соотношением

$$A' = M^{-1}A^TM - M^{-1}\Gamma.$$

Это — аналог теоремы Виета для матричного уравнения (2.1). Если Σ — инвариантная плоскость, то плоскость $\Sigma' = \{\dot{x} = A'x\}$ также будет инвариантной. В соответствии с этим замечанием естественно рассмотреть два линейных дифференциальных уравнения

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

и

$$\dot{x} = A'x, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

В канонических переменных x, y инвариантная плоскость $\{\dot{x} = Ax\}$ имеет вид $\{y = Dx\}$. Если матрица D симметрическая, то эта плоскость будет *лагранжевой*. Мы будем рассматривать другой крайний случай, когда матрица ротора $\operatorname{rot}(Dx) = D - D^T$ невырожденна. Такие инвариантные плоскости естественно назвать *вихревыми* [1].

Теорема 4. *Если $|D - D^T| \neq 0$, то*

(1) *фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n} = \{x, \dot{x}\}$ — прямая сумма n-мерных плоскостей Σ и Σ',*

(2) *положение равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$ системы* (1.1) *устойчиво тогда и только тогда, когда все решения линейных дифференциальных уравнений* (2.5) *и* (2.6) *ограничены.*

Доказательство. Если n-мерные плоскости Σ и Σ' имеют общую точку $(x, \dot{x}) \neq (0, 0)$, то $Ax = A'x$ при некотором $x \neq 0$. Тогда, согласно (2.2) и (2.4),

$$|A - A'| = |M^{-1}|\,|D - D^T| = 0$$

и, следовательно, кососимметрическая матрица $D - D^T$ вырожденна. Поэтому $\mathbb{R}^{2n} = \Sigma \oplus \Sigma'$. Каждая из линейных систем (2.2) и (2.3) имеет n линейно независимых решений. В силу уже установленного свойства (1) и инвариантности плоскостей Σ и Σ' эти $2n$ решений образуют базис в $2n$-мерном пространстве всех решений линейной системы (1.1). Что и требовалось доказать.

Заметим, что кососимметричная матрица $D - D^T$ может быть невырожденной лишь при четных n.

Положим

$$h(x) = H|_{\dot{x}=Ax} = \frac{1}{2}(A^T MAx, x) + \frac{1}{2}(Px, x),$$
$$h'(x) = H|_{\dot{x}=A'x} = \frac{1}{2}(A'^T MA'x, x) + \frac{1}{2}(Px, x).$$

Ясно, что квадратичные формы h и h' являются первыми интегралами линейных систем (2.5) и (2.6) соответственно.

Теорема 5. *Если $|D - D^T| \neq 0$, то линейные системы* (2.5) *и* (2.6) *гамильтоновы с функциями Гамильтона h и h' соответственно.*

Доказательство. Действительно,

$$A^T MA = (D^T + \Gamma/2)M^{-1}(D - \Gamma/2).$$

Воспользовавшись формулами (2.2) и (2.3), получаем

$$\begin{aligned}
-\partial h/\partial x &= [-(D^T + \Gamma/2)M^{-1}(D - \Gamma/2) - P]x \\
&= [-(D^T + \Gamma/2)M^{-1}(D - \Gamma/2) + (D + \Gamma/2)M^{-1}(D - \Gamma/2)]x \\
&= [(D - D^T)M^{-1}(D - \Gamma/2)]x = (D - D^T)\dot{x}.
\end{aligned}$$

Положим для краткости $D - D^T = \Omega$ и $h(x) = (Bx, x)/2$. Тогда линейная система (2.5) принимает вид

$$\Omega\dot{x} = -Bx. \tag{2.7}$$

Положим $x = Cz$. Здесь матрица C такова, что

$$C^T\Omega C = J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где E — единичная $(n/2)\times(n/2)$-матрица. В новых переменных уравнение (2.7) имеет вид линейной гамильтоновой системы

$$J\dot{x} = -\frac{\partial h}{\partial z},$$

где

$$h(z) = \frac{1}{2}(Bx, x)\big|_{x=Cz} = \frac{1}{2}(C^T BCz, z),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, с учетом теоремы 4 при условии

$$|D - D^T| \neq 0$$

задача об устойчивости линейной гамильтоновой системы (1.1) с n степенями свободы сводится к задаче об устойчивости двух линейных гамильтоновых систем с $n/2$ степенями свободы.

Теорема 6. *Если гамильтонова система* (1.1) *с n степенями свободы допускает вихревую инвариантную плоскость, то ее спектр распадается на две части из n точек, каждая из которых инвариантна* (*с учетом кратности*) *при отражении относительно вещественной и мнимой осей.*

Это — следствие теорем 4 и 5, а также известного результата о спектре линейной гамильтоновой системы.

§3. Метод сжатых отображений и вихревые инвариантные плоскости

Задача о решениях квадратного матричного уравнения представляет самостоятельный интерес. Она обсуждается в [6] как новая, хотя некоторые ее частные случаи ранее уже рассматривались (см., например, [1]).

Известны простые квадратные матричные уравнения, которые имеют континуум решений (например, $A^2 = 0$), а также уравнения, вообще не допускающие ни одного решения (даже с комплексными элементами) [6]. Поэтому важное значение представляют условия существования матричных решений и изучение их свойств. В [7] обсуждаются условия существования решений уравнения (2.1) вида (2.2) с симметрической матрицей D. Такие решения порождают лагранжевы инвариантные плоскости.

Лемма 2. *Уравнение* $MX^2 + \Gamma X + P = 0$, $|\Gamma| \neq 0$, *имеет решение, если*

$$\|\Gamma^{-1}M\|\|\Gamma^{-1}P\| \leqslant 1/4, \tag{3.1}$$

причем

$$\|X\| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|\Gamma^{-1}M\|\|\Gamma^{-1}P\|}}{2\|\Gamma^{-1}M\|}. \tag{3.2}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — *любая матричная норма. Если*

$$\|\Gamma^{-1}M\|\|\Gamma^{-1}P\| < 1/4, \tag{3.3}$$

то это уравнение допускает единственное решение, удовлетворяющее условию (3.2).

Доказательство. С учетом предположения об обратимости матрицы Γ перепишем квадратное матричное уравнение в виде

$$X = F(X) = -\Gamma^{-1}(MX^2 + P).$$

Легко проверить, что при условии (3.1) нелинейный оператор F отображает шар (3.2) в себя. Следовательно, по теореме Боля–Брауэра оператор F имеет в этом шаре неподвижную точку.

Далее, для любых X и Y из шара (3.2)

$$\begin{aligned}
\|F(X) - F(Y)\| &= \|-\Gamma^{-1}M(X^2 - XY + XY - Y^2)\| \\
&\leqslant \|-\Gamma^{-1}M\|(\|X\| + \|Y\|)\|X - Y\| \\
&\leqslant (1 - \sqrt{1 - 4\|\Gamma^{-1}M\|\|\Gamma^{-1}P\|})\|X - Y\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, если выполнено условие (3.3), то отображение F будет сжимающим в шаре (3.2), что и требовалось.

Для упрощения дальнейшего изложения с помощью линейного преобразования приведем симметрическую матрицу M к диагональному виду

$$M = \operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1). \tag{3.4}$$

Полагая $x = Cz$, перепишем уравнение (1.1) в эквивалентной форме

$$C^T MC\ddot{z} + C^T \Gamma C\dot{z} + C^T PCz = 0.$$

Можно подобрать так невырожденную матрицу C, что $C^T MC$ будет иметь вид (3.4), а матрица $C^T \Gamma C$ $(C^T PC)$, очевидно, останется кососимметрической (симметрической) и невырожденной.

Далее мы будем использовать матричные нормы $\| \cdot \|$, в которых $\|M\| = 1$. Сюда относятся все естественные *операторные* нормы. Например, две нормы

$$\|X\|_1 = \max_j \sum_k |x_{jk}|, \qquad \|X\|_2 = \max_k \sum_j |x_{jk}|,$$

где $X = (x_{jk})$, удовлетворяют этому условию. В этих случаях

$$\|XM\| = \|MX\| = \|X\|. \tag{3.5}$$

Теорема 7. *Если*

$$\|\Gamma^{-1}\| \|\Gamma^{-1} P\| < 1/4, \tag{3.6}$$

то уравнение (1.1) *имеет две инвариантные вихревые плоскости.*

Действительно, с учетом (3.5) условие (3.6) эквивалентно условию (3.3). Следовательно, существование двух решений матричного уравнения (2.1) вытекает из леммы 2. Нам осталось проверить, что кососимметрическая матрица

$$D - D^T = MA - A^T M + \Gamma$$

невырожденна. Действительно,

$$\Gamma^{-1}(D - D^T) = \Gamma^{-1}(MA - A^T M) + E.$$

Если

$$\|\Gamma^{-1}(MA - A^T M)\| \leqslant 2\|\Gamma^{-1}\| \|A\| < 1, \tag{3.7}$$

то, очевидно, $|D - D^T| \neq 0$. Так как

$$1 - \sqrt{1 - x} \leqslant x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

то неравенство (3.2) дает нам более грубую оценку:

$$\|A\| \leqslant 2\|\Gamma^{-1} P\|. \tag{3.8}$$

Остается заметить, что из неравенств (3.6) и (3.8) вытекает неравенство (3.7).

Замечание. Неравенство (3.6) можно заменить более грубым условием

$$\sqrt{\|P\|}\|\Gamma^{-1}\| < 1/2.$$

Если матрица P *отрицательно* определена, то достаточное условие гироскопической стабилизации равновесия $x = 0$, полученное С. В. Болотиным, имеет вид

$$\|(-P)^{1/2}\| \|\Gamma^{-1}\| < 1/2$$

(см. [1]).

Рассмотрим теперь случай, когда M — единичная матрица (как в задачах механики).

Теорема 8. *Если*

$$\|\Gamma^{-1}\|\|\Gamma^{-1}P\| < 2/9, \tag{3.9}$$

то квадратичная форма $h'(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *положительно определена.*

Условие (3.9), конечно, сильнее условия (3.6). Однако они достаточно близки, поскольку $2/9$ отличается от $1/4$ всего на $1/36$.

Следствие 1. *Если выполнено условие* (3.9), *то равновесие* $x = 0$ *системы* (1.1) *устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво равновесие гамильтоновой системы* (2.5) *с вдвое меньшим числом степеней свободы.*

Напомним, что $(n \times n)$-матрица A в (2.5) определяется как *единственное* решение матричного уравнения (2.1), удовлетворяющее условию (3.2).

Доказательство теоремы 8. Так как $M = E$, то

$$2h' = (A'x, A'x) + (Px, x), \qquad A' = A^T - \Gamma. \tag{3.10}$$

Положим $x = \Gamma^{-1}z$. Тогда (3.10) примет следующий вид:

$$2h' = (z, z) + (Bz, z), \quad B = \Gamma^{-1}A - A^T\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}AA^T\Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}P\Gamma^{-1}.$$

Нам достаточно показать, что $\|B\| < 1$. Оценим норму матрицы B:

$$\|B\| \leqslant 2\|\Gamma^{-1}\|\|A\| + (\|\Gamma^{-1}\|\|A\|)^2 + \|\Gamma^{-1}\|\|\Gamma^{-1}P\|. \tag{3.11}$$

Согласно (3.2),

$$\|\Gamma^{-1}\|\|A\| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}, \qquad \alpha = \|\Gamma^{-1}\|\|\Gamma^{-1}P\|.$$

С учетом (3.11) получаем неравенство

$$1 - \sqrt{1 - 4\alpha} + \frac{(1 - \sqrt{1 - 4\alpha})^2}{4} + \alpha < 1.$$

Оно легко решается: $\alpha < 2/9$. Что и требовалось.

Следствие 2. *Если* $M = E$ *и выполнено условие* (3.9), *то сигнатура квадратичной формы* $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *совпадает с сигнатурой потенциальной энергии* $(Px, x)/2$.

В частности, пусть потенциальная энергия принимает в положении равновесия $x = 0$ *максимальное* значение. Тогда условие (3.9) гарантирует гироскопическую стабилизацию состояния равновесия системы (1.1).

§ 4. Большие гироскопические силы

Решения матричного уравнения (2.1) можно также представить в виде сходящихся рядов. С этой целью заменим матрицу гироскопических сил Γ на $N\Gamma$ и будем считать, что параметр N принимает большие значения (асимптотически $N \to \infty$). Положим $A = NX$ и $\varepsilon = 1/N^2$. Тогда матричное уравнение (2.1) приобретает следующий вид:

$$(MX + \Gamma)X + \varepsilon P = 0. \tag{4.1}$$

Будем искать его решение в виде ряда по степеням ε:

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \cdots. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим цепочку алгебраических соотношений, из которых будем последовательно находить матрицы $X_0, X_1, \dots$. Для X_0 получаем уравнение

$$(MX_0 + \Gamma)X_0 = 0.$$

Оно имеет два решения: $X_0 = -M^{-1}\Gamma$ и $X_0 = 0$.

Для второго случая остальные коэффициенты находятся из равенств

$$\begin{gathered}\Gamma X_1 + P = 0, \quad \Gamma X_2 + MX_1^2 = 0, \quad \Gamma X_3 + M(X_1X_2 + X_2X_1) = 0,\\ \Gamma X_4 + M(X_1X_3 + X_2^2 + X_3X_1) = 0, \quad \dots .\end{gathered} \tag{4.3}$$

Отсюда последовательно получаем

$$X_1 = -\Gamma^{-1}P, \quad X_2 = -\Gamma^{-1}M(\Gamma^{-1}P)^2, \quad \dots .$$

Для определения условий сходимости ряда (4.2) оценим нормы матричных коэффициентов. Полагая

$$U = \Gamma^{-1}P, \qquad V = \Gamma^{-1}M,$$

получим последовательно

$$\begin{gathered}\|X_1\| = \|U\|, \quad \|X_2\| \leqslant \|V\|\|U\|^2, \quad \|X_3\| \leqslant 2\|V\|^2\|U\|^3,\\ \|X_4\| \leqslant \|V\|(4\|U\|\|V\|^2\|U\|^3 + \|V\|^2\|U\|^4) = 5\|V\|^3\|U\|^4,\\ \|X_5\| \leqslant 14\|V\|^4\|U\|^5, \quad \dots .\end{gathered}$$

Итак,

$$\|X_k\| \leqslant æ_k\|V\|^{k-1}\|U\|^k.$$

Из (4.3) вытекает рекуррентное правило для вычисления коэффициентов $æ_k$:

$$æ_{k+1} = æ_1æ_k + æ_2æ_{k-1} + \dots + æ_{k-1}æ_2 + æ_kæ_1, \quad æ_1 = 1. \tag{4.4}$$

Таким образом, $æ_k$ — это хорошо известные в комбинаторике *числа Каталана.* Их производящая функция $\sum_{k=1}^\infty æ_k z^k$ равна $(1 - \sqrt{1-4z})/2$.

Следовательно,

$$\|X\| \leqslant \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k\|X_k\| \leqslant \|V\|^{-1}\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k æ_k(\|U\|\|V\|)^k = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon\|U\|\|V\|}}{2\|V\|}. \tag{4.5}$$

Ряд (4.2) сходится, очевидно, при условии (3.3):

$$\varepsilon\|U\|\|V\| = \|(N\Gamma)^{-1}M\|\|(N\Gamma)^{-1}P\| < 1/4. \tag{4.6}$$

Так как $A = NX$, то оценка (4.5) совпадает с неравенством (3.2), в котором Γ надо заменить на $N\Gamma$.

Уравнение (4.1) имеет еще одно решение

$$Y = -M^{-1}\Gamma + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \cdots ,$$

которое также сходится при условии (4.6). Эти два решения соответствуют двум различным вихревым плоскостям линейной гамильтоновой системы (1.1).

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: при условии (3.3) ряд $\sum_1^\infty X_k$ сходится к решению матричного уравнения (2.1), удовлетворяющему неравенству (3.2).

При малых значениях $\varepsilon > 0$ гамильтоновы дифференциальные уравнения (2.5) и (2.6) имеют следующий вид:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, M^{-1}\Gamma x + O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad \dot{x} = -\sqrt{\varepsilon}\,\Gamma^{-1}Px + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{4.7}$$

Их гамильтонианы — это квадратичные формы

$$-\frac{1}{2\varepsilon}(\Gamma M^{-1}\Gamma x, x) + \frac{1}{2}(Px, x) + O(\varepsilon), \qquad \frac{1}{2}(Px, x) - \frac{\varepsilon}{2}(P\Gamma^{-1}M\Gamma^{-1}Px, x) + O(\varepsilon).$$

При $\varepsilon \to 0$ сигнатуры этих форм совпадают с сигнатурами квадратичных форм

$$-(\Gamma M^{-1}\Gamma x, x) \quad \text{и} \quad (Px, x) \tag{4.8}$$

соответственно.

В частности, пусть матрица M положительно определена (как в задачах механики), а потенциальная энергия имеет в положении равновесия $x = 0$ строгий максимум. Тогда обе квадратичные формы (4.8) являются определенными (первая положительно, а вторая отрицательно). Следовательно, в этом случае при больших значениях N положение равновесия будет устойчивым. Это — хорошо известный результат о гироскопической стабилизации.

Таким образом, при больших N задача об устойчивости сводится к исследованию второго из уравнений (4.7)

$$\Gamma\dot{x} = -Px,$$

имеющего очевидную гамильтонову природу.

§5. Строение вихревых инвариантных плоскостей

Обсудим кратко условия существования и строение вихревых инвариантных плоскостей линейной гамильтоновой системы общего вида

$$J\dot{z} = -Bz, \qquad z \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{5.1}$$

где J — единичная симплектическая матрица ($J^{-1} = -J$), а B — невырожденная симметрическая матрица, порождающая гамильтониан $H = (Bz, z)/2$. Векторное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ имеет естественную симплектическую структуру — невырожденную 2-форму

$$\omega(z', z'') = (Jz', z''), \qquad \omega(z', z'') = -\omega(z'', z').$$

Обобщая определение из §2, будем называть проходящую через начало координат плоскость Σ *вихревой*, если ограничение $\widetilde{\omega} = \omega|_\Sigma$ — невырожденная 2-форма (для любого ненулевого $x \in \Sigma$ найдется такой вектор $y \in \Sigma$, что $\widetilde{\omega}(x, y) \neq 0$). В частности, n четно и пара $(\Sigma, \widetilde{\omega})$ сама будет n-мерным симплектическим пространством.

Пусть Σ_1 есть n-мерная плоскость (не обязательно вихревая), а плоскость Σ_2 ей косоортогональна:

$$\Sigma_2 = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : \omega(z, x) = 0 \ \text{для всех} \ x \in \Sigma_1\}. \tag{5.2}$$

Так как оператор J невырожденный, то $\dim \Sigma_2 = n$. Плоскости Σ_1 и Σ_2 двойственны друг другу: в определении (5.2) их можно поменять местами. Если плоскость Σ_1 лагранжева, то, очевидно, $\Sigma_2 = \Sigma_1$.

Лемма 3. *Если Σ_1 — вихревая плоскость, то*

1) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{0\}$,

2) *плоскость* Σ_2 *также вихревая.*

Действительно, пусть $z \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ и $z \neq 0$. Тогда вектор $z \in \Sigma_1$ кососортогонален всем векторам из Σ_1. Однако это противоречит невырожденности формы $\widetilde{\omega}$. Далее, пусть плоскость Σ_2 не вихревая. Тогда найдется ненулевой вектор $z \in \Sigma_2$, кососортогональный всем векторам из Σ_2. Поскольку $\mathbb{R}^{2n} = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и плоскость Σ_2 кососортогональна Σ_1, то вектор z кососортогонален всем векторам из $\mathbb{R}^{2n}$. Но это противоречит свойству невырожденности симплектической структуры ω.

Теорема 9. *Пусть Σ_1 и Σ_2 — двойственные вихревые плоскости. Если Σ_1 — инвариантная плоскость гамильтоновой системы, то тем же свойством обладает Σ_2 и наоборот.*

Таким образом, вихревые инвариантные плоскости линейных гамильтоновых систем встречаются парами. Это наблюдение обобщает результат § 2 о двух решениях квадратного матричного уравнения (2.1). Легко проверить, что вихревые плоскости $\{\dot{x} = Ax\}$ и $\{\dot{x} = A'x\}$ кососортогональны относительно стандартной симплектической структуры в $\mathbb{R}^{2n} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$. Теорему 9 можно рассматривать как симплектический аналог теоремы Виета.

Доказательство теоремы 9. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — базисы в n-мерных векторных пространствах Σ_1 и Σ_2.

Поскольку эти пространства кососортогональны, то

$$(Ja_i, b_j) = 0 \tag{5.3}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{z : (Jb_1, z) = \cdots = (Jb_n, z) = 0\}, \\ \Sigma_2 &= \{z : (Ja_1, z) = \cdots = (Ja_n, z) = 0\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Пусть Σ_1 — инвариантная плоскость линейной системы (5.1). Тогда

$$(Jb_j, z)^{\cdot} = (Jb_j, JBz) = -(Bb_j, z) = 0$$

в точках из Σ_1. Следовательно,

$$-Bb_j = \sum \lambda_{j,k} Jb_k, \qquad \lambda_k \in \mathbb{R},$$

или, что то же самое,

$$JBb_j = \sum \lambda_{j,k} b_k. \tag{5.5}$$

Согласно лемме 3, векторы $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^{2n}$. Поэтому

$$JBa_j = \sum \mu_{j,s} a_s + \sum æ_{j,r} b_r. \tag{5.6}$$

Отсюда с учетом (5.3) получаем соотношение

$$\sum æ_{j,r}(b_r, Jb_i) = (JBa_j, Jb_i) = -(a_j, Bb_i) = (Ja_j, JBb_i) = \Big(Ja_j, \sum \lambda_{i,k} b_k\Big) = 0.$$

Следовательно,

$$\Big(\sum æ_{j,r} b_r, Jb_i\Big) = 0$$

для всех i. Так как Σ_2 — вихревая плоскость, то $\sum æ_{j,r} b_r = 0$ и поэтому все $æ_{j,r}$ равны нулю. Но тогда (5.6) будут иметь вид (5.5). Эти соотношения означают инвариантность плоскости Σ_2. Что и требовалось.

Рассмотрим типичный случай, когда спектр линейной гамильтоновой системы (5.1) простой. Пусть спектр содержит r вещественных пар, s пар чисто мнимых собственных значений и f комплексных четверок. Ясно, что

$$n = s + r + 2f.$$

Теорема 10. *Пары вихревых n-мерных инвариантных плоскостей существуют тогда и только тогда, когда*

$$n = 2n_1 + 4m_1 = 2n_2 + 4m_2, \tag{5.7}$$

где n_j, m_j — целые неотрицательные числа, такие, что

$$n_1 + n_2 = s + r, \qquad m_1 + m_2 = f. \tag{5.8}$$

Количество различных пар инвариантных вихревых плоскостей равно количеству различных разбиений числа n вида (5.7) с ограничениями (5.8).

Покажем, как строятся вихревые инвариантные плоскости из теоремы 10. Для этого снова воспользуемся теорией Вильямсона нормальных форм линейных гамильтоновых систем. В случае простого спектра фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$ распадается в прямую сумму кософртогональных инвариантных подпространств размерности 2 или 4 так, что гамильтониан представляется в виде суммы квадратичных форм на этих подпространствах. Эти квадратичные формы — частичные гамильтонианы. Простой вещественной паре собственных чисел $\pm a$ соответствует частичный гамильтониан $a(p^2 - q^2)/2$, чисто мнимой паре $\pm ib$ — частичный гамильтониан $b(p^2 + q^2)/2$, а четверке собственных чисел — гамильтониан

$$a(p_1 q_1 + p_2 q_2) + b(p_1 q_2 - p_2 q_1). \tag{5.9}$$

Чтобы получить первую инвариантную вихревую плоскость, надо в выражениях n_1 частичных гамильтонианов для вещественных и чисто мнимых пар положить $p = q = 0$ и в выражениях m_1 частичных гамильтонианов для комплексных четверок положить $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$. Остальные канонические переменные будут координатами на искомой n-мерной плоскости. Аналогично строится вторая (двойственная) вихревая инвариантная плоскость с очевидной заменой n_1 и m_1 на n_2 и m_2. Доказательство того факта, что других инвариантных вихревых плоскостей нет, выглядит несколько громоздко и здесь не приводится.

Вместо этого рассмотрим простой пример. Пусть $n = 2$ и спектр гамильтоновой системы является комплексной четверкой. В этом случае либо m_1, либо m_2 равно единице. Но тогда, согласно (5.7), $n \geqslant 4$ и (по теореме 10) гамильтонова система вообще не допускает вихревых инвариантных плоскостей.

Как уже говорилось, гамильтониан приводится к виду (5.9). Непосредственным вычислением проверяется, что эта гамильтонова система допускает ровно две инвариантные плоскости: $p_1 = p_2 = 0$ и $q_1 = q_2 = 0$. Однако обе они лагранжевы.

Литература

1. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1998.
2. *Williamson J.* On an algebraic problem, concerning the normal forms of linear dynamical systems. Amer. J. Math., **58**, №1, 141–163 (1936).
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Наука, М., 1967.
4. *Козлов В. В., Карапетян А. А.* О степени устойчивости. Дифференциальные уравнения, **41**, №2, 186–192 (2005).
5. *Козлов В. В.* Линейные системы с квадратичным интегралом. Прикл. матем. мех., **56**, вып. 6, 900–906 (1992).
6. *Гельфанд С. И.* О числе решений квадратного уравнения. В сб.: Глобус. Общематематический семинар, вып. 1, МЦНМО, М., 2004, с. 124–133.
7. *Козлов В. В.* Спектр линейной гамильтоновой системы и симплектическая геометрия комплексного пространства Артина. Докл. РАН, **393**, №24, 453–455 (2003).

Математический институт им. В. А. Стеклова
email: kozlov@pran.ru

Поступило в редакцию
24 июня 2005 г.