

УДК 519.248.23

## К ЗАДАЧЕ О ПОРШНЕ

© 2005 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 23.03.2005 г.

Рассматривается эволюция динамической системы, состоящей из идеального газа в цилиндрическом сосуде, разделенном массивным подвижным поршнем. Особое внимание уделено асимптотическому поведению при  $t \rightarrow \infty$ , когда система неограниченно приближается к состоянию статистического равновесия. Мы также рассмотрим родственную задачу о поршне в идеальном газе, причем поршень прикреплен к концу упругой пружины.

Как показывает опыт, в конце концов поршень остановится, причем давление газа в обеих частях сосуда станет одинаковым. С точки зрения обычной механики этот факт выглядит удивительным. Если под газом понимать идеальную сплошную среду в духе полевого подхода Эйлера, то в рассматриваемой системе, очевидно, будут происходить незатухающие колебания. Если же газ моделировать большим (но конечным) числом упруго сталкивающихся шариков, то такое финальное поведение противоречит, например, теореме Пуанкаре о возвращении. Поэтому для объяснения и описания финального поведения обычно используют приближенные статистические модели, в которых необратимость заложена уже с самого начала. Например, в работах [1–3] используется кинетическое уравнение Больцмана, в [4–6] – вероятностные подходы (включающие, в частности, случайные процессы). В этих работах акцент делается на обсуждение более нетривиальной проблемы об асимптотическом выравнивании температур слева и справа от подвижного поршня.

В нашей работе идеальный газ трактуется как бесстолкновительная сплошная среда, эволюция которой описывается классическим уравнением Лиувилля. Это предположение вполне отвечает общему статистическому подходу Гиббса, основанному на введении континуальных ансамблей невзаимодействующих механических систем. Это предположение позволяет строго сформулировать и частично доказать результаты об асимптотическом поведении поршня в идеальном газе.

Для простоты будем рассматривать одномерный газ, когда частицы движутся по прямой. Поскольку при упругом ударе двух одинаковых частиц происходит простой обмен их скоростей, то одномерный газ можно представлять себе как сплошную среду, частицы которой постоянно упруго сталкиваются друг с другом. Эта среда – естественный предельный случай системы из очень большого числа маленьких одинаковых шариков, которые упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда.

Итак, пусть одномерный идеальный газ заключен в сосуд в виде единичного отрезка  $0 \leq x \leq 1$  и разделен поршнем массы  $M$  (рис. 1). Пусть  $X, \dot{X}$  – координата и скорость поршня. Пусть  $m_1$  ( $m_2$ ) – масса газа слева (справа) от поршня, а  $\rho_1(\omega, x)$  ( $\rho_2(\omega, x)$ ) – начальная плотность распределения частиц газа по координатам  $x$  и скоростям  $\omega$ . Ясно, что функции  $\rho_1$  и  $\rho_2$  определены по  $x$  в интервалах  $[0, X]$  и  $[X, 1]$ .

Пусть  $\rho'_1(\omega, x)$ ,  $\rho'_2(\omega, x)$  – плотности газа слева и справа от поршня в момент времени  $t$ . Они находятся как решения уравнения Лиувилля с начальными (при  $t = 0$ ) условиями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . При этом надо, конечно, учитывать подвижность граничного условия отражения частиц при  $x = X$ .

Таким образом, эволюция плотности распределения описывается в нашей задаче следующим образом:

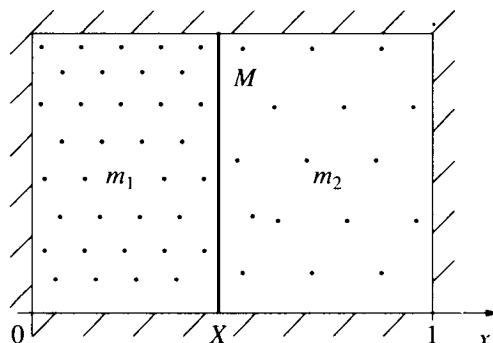


Рис. 1. Поршень в газе.

– пока нет ударов (т.е.  $x - \omega t \in (0, X)$ ), то

$$\rho'_1(\omega, x) = \rho_1(\omega, x - \omega t); \quad (1)$$

– если  $x - \omega t = 0$ , то  $\omega$  заменяется на  $-\omega$ , а  $x - \omega t$  надо заменить на  $x + \omega t$ ;

– если же  $x - \omega t = X$ , то  $\omega$  заменяется на  $-\omega + \dot{X}$  (упругий удар частицы нулевой массы о движущуюся плиту), а  $x - \omega t$  заменяется на  $x - (-\omega + \dot{X})t$ , причем скорость  $\dot{X}$  вычисляется в момент удара.

Аналогично эволюционирует плотность распределения  $\rho'_2$ .

Запишем дифференциально-интегральное уравнение, описывающее движение поршня:

$$M\ddot{X} = 2m_1 \int_{\dot{X}}^{+\infty} (\omega - \dot{X})^2 \rho'_1(\omega, X) d\omega - 2m_2 \int_{-\infty}^{\dot{X}} (\omega - \dot{X})^2 \rho'_2(\omega, X) d\omega. \quad (2)$$

В этой формуле справа стоит разность давлений на поршень, движущийся со скоростью  $\dot{X}$ , со стороны газа, расположенного по обе стороны от поршня. Сама формула для давления идеального газа на стенку является вполне классической, ее вывод можно найти, например, в [7]. Таким образом, уравнения (1), (2) (дополненные уравнениями для  $\rho'_1$  и  $\rho'_2$ ) полностью описывают эволюцию рассматриваемой системы.

**З а м е ч а н и е.** Схожее с (2) уравнение имеется в [8]. Его эвристический вывод использует ББГКИ – цепочку уравнений. Подчеркнем, что в рамках рассматриваемого подхода (2) является строгим уравнением.

### ПОРШЕНЬ НА ПРУЖИНЕ

Рассмотрим сначала похожую, но более простую задачу о поршне, прикрепленном к упругой пружине (рис. 2). Его уравнение движения имеет вид

$$M\ddot{X} + kX = -2m \int_{-\infty}^{\dot{X}} (\omega - \dot{X})^2 \rho'(\omega, X) d\omega. \quad (3)$$

Справа стоит давление со стороны газа на поршень в момент времени  $t$ ,  $\rho'(\omega, x)$ ,  $X \leq x \leq 1$ , – плотность распределения частиц газа,  $m$  – масса газа, а  $k$  – коэффициент упругости пружины. Плотность  $\rho'$  находится из уравнения Лиувилля для бильярда с подвижной левой границей аналогично (1).

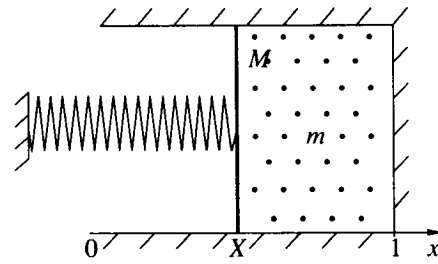


Рис. 2. Поршень на пружине.

В качестве начальной плотности следует брать такую, чтобы сходился интеграл

$$\int_{X(0)-\infty}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \rho d\omega dx.$$

Если мы умножим его на  $\frac{m}{2}$ , то получим кинетическую энергию идеального газа.

Сумма полной механической энергии поршня и кинетической энергии газа не меняется со временем. Это обстоятельство полезно использовать для контроля точности численных расчетов.

Несложно показать, что стационарные состояния (неподвижные точки) системы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(\omega, X) &= \bar{\rho}(\omega) - \\ &\text{произвольная четная по } \omega \text{ функция,} \\ X = \Delta &= -\frac{2m}{k} \int_{-\infty}^0 \omega^2 \bar{\rho}(\omega) d\omega = \text{const.} \end{aligned} \quad (4)$$

Как показывают численные расчеты, при  $t \rightarrow \infty$  система асимптотически приближается к некоторому стационарному состоянию вида (4), т.е. система стремится к статистическому равновесию, причем:

- 1°)  $X(t) \rightarrow \Delta = \text{const}$ ,  $\dot{X}(t) \rightarrow 0$ ;
- 2°) плотность  $\rho'$  слабо сходится к стационарной плотности  $\bar{\rho}(\omega)$ , четной по скорости  $\omega$ .

Как показано в [9], для бильярдов с неподвижными границами слабый предел плотности распределения всегда существует и является первым интегралом уравнения движения. Было бы желательно дать строгое доказательство свойств 1° и 2°.

На рис. 3 показан характерный вид фазовой траектории поршня (здесь  $M = 1$ ;  $k = 1$ ;  $m = 1$ ;  $\rho_0(\omega, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2}$ ;  $X(0) = 0$ ,  $\dot{X}(0) = 0$ ).

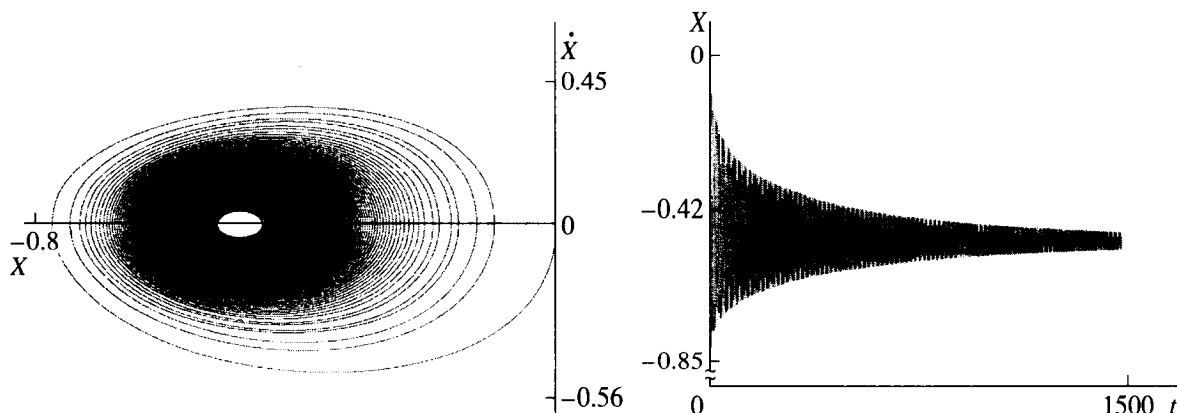


Рис. 3. Поршень с пружиной.

Предельная величина растяжения пружины (4) может быть записана следующим образом:

$$\Delta = -\frac{2E_+}{kl_+},$$

где  $E_+$  – энергия газа в предельном состоянии,  $l_+ = 1 - \Delta$  – расстояние от поршня до стенки сосуда (“объем” сосуда в равновесном состоянии).

Полагая  $X = \Delta + \xi$ , линеаризуем уравнение (3):

$$M\ddot{\xi} + \kappa\dot{\xi} + k\xi = 0, \tag{5}$$

где

$$\kappa = -4m \int_{-\infty}^0 \omega \bar{\rho}(\omega) d\omega > 0,$$

поскольку  $\bar{\rho}$  – четная неотрицательная функция с положительным интегралом по вещественной прямой. Уравнение (5) описывает малые затухающие колебания с коэффициентом вязкого трения  $\kappa$ . Положим, например,

$$\bar{\rho}(\omega) = \frac{e^{-\omega^2/2\sigma}}{l_+ \sqrt{2\pi\sigma}}. \tag{6}$$

Тогда

$$\kappa = \frac{4m\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2\pi}l_+}.$$

Поскольку дисперсия для распределения Максвелла пропорциональна абсолютной температуре, то коэффициент трения возрастает с увеличением температуры газа в равновесном предельном состоянии.

Конечно, предельное распределение  $\bar{\rho}$  вовсе не обязательно должно быть максвелловским. Однако усреднение с произвольной четной плот-

ностью  $\bar{\rho}(\omega)$  приводит к обычным уравнениям состояния для идеального газа (см. [7]).

### ЗАДАЧА О ПОРШНЕ

Численные расчеты показывают, что при  $t \rightarrow \infty$  газ с поршнем также стремится к равновесному статистическому состоянию:  $X(t) \rightarrow \bar{X} = \text{const}$ ,  $\dot{X}(t) \rightarrow 0$ , а плотности  $\rho'_1$  и  $\rho'_2$  слабо сходятся к функциям  $\bar{\rho}_1$  и  $\bar{\rho}_2$ , зависящим лишь от квадрата скорости частицы  $\omega^2$ . На рис. 4 показан характерный вид фазовой траектории поршня для этого случая (здесь  $M = 1$ ;  $m_1 = 1$ ;  $\rho_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2}$ ;  $m_2 = 2$ ;

$$\rho_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2}; X(0) = 0.5; \dot{X}(0) = 0).$$

Полагая в уравнении (2)  $\dot{X} \equiv 0$  и заменяя плотности  $\rho'_1$  и  $\rho'_2$  их слабыми пределами, получаем

$$m_1 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \bar{\rho}_1 d\omega = m_2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \bar{\rho}_2 d\omega. \tag{7}$$

Таким образом, точка  $x = \bar{X}$  делит отрезок  $[0, 1]$  с одномерным газом на две половинки с одинаковыми давлениями. Равенство (7) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\frac{E_1}{l_1} = \frac{E_2}{l_2}, \tag{8}$$

где  $E_k$  ( $k = 1, 2$ ) – кинетические энергии газов слева и справа от поршня, а  $l_k$  ( $k = 1, 2$ ) – их “объемы”, расстояния от поршня до концов отрезка. Внутренние энергии  $E_k$  пропорциональны абсолютным температурам. Но из равенства (8) никак

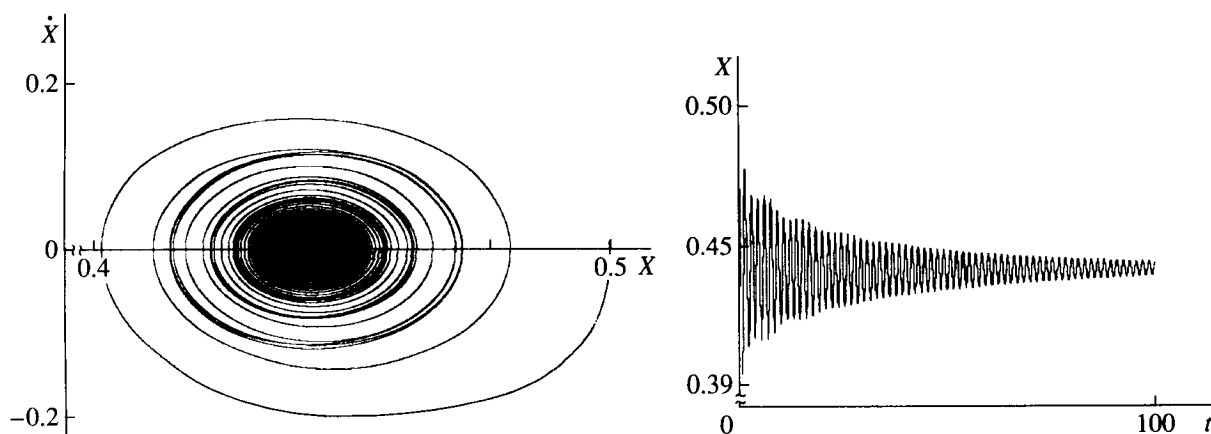


Рис. 4. Поршень между двумя газами.

нельзя вывести равенство температур слева и справа от поршня.

При условии (7) и малых значениях скорости поршня  $\dot{X}$  уравнение (2) можно линеаризовать:

$$M\ddot{X} + \kappa\dot{X} = 0, \quad (9)$$

где

$$\kappa = 4m_1 \int_0^{\infty} \omega \bar{\rho}_1(\omega) d\omega - 4m_2 \int_{-\infty}^0 \omega \bar{\rho}_2(\omega) d\omega > 0$$

есть эффективный коэффициент вязкого трения. Из (9) видно, что скорость поршня убывает экспоненциально быстро и поршень до своей полной остановки проходит конечный путь. Интересно отметить, что в ящике с неподвижными стенками плотность бесстолкновительной среды выравнивается с еще большей скоростью [10].

Особый интерес представляет случай, когда  $m_1 = 0$  или  $m_2 = 0$ : весь газ находится справа или слева от поршня. Может показаться, что тогда поршень будет совершать незатухающие колебания, упруго ударяясь о боковую стенку цилиндрического сосуда. Однако и в этом случае колебания поршня будут затухающими и при  $t \rightarrow \infty$  поршень остановится, прижавшись к одной из стенок сосуда. В полном объеме это утверждение пока строго не доказано. Однако оно становится почти очевидным, если предположить, что  $\dot{X}$  мало, и заменить плотность  $\rho'$  ее слабым пределом  $\bar{\rho}(\omega)$ . В этом случае задача сводится к изучению подскоков в вязкой среде тяжелого шарика, упруго

ударяющегося о неподвижную горизонтальную плиту. Ясно, что со временем высота подскоков и скорость шарика убывают до нуля.

Автор дружески благодарит А.А. Килина за проведенные численные расчеты, а также А.В. Борисова и И.С. Мамаева за полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-136.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Piasecki J., Gruber Ch. // *Physica A*. 1999. V. 265. P. 463–472.
2. Gruber Ch., Piasecki J. // *Physica A*. 1999. V. 268. P. 412–423.
3. Gruber Ch., Frachebourg L. // *Physica A*. 1999. V. 272. P. 392–428.
4. Holley R. // *Ztschr. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.* 1971. Bd. 17. S. 181–219.
5. Durr D., Goldstein S., Lebowitz J.L. // *Commens Math. Phys.* 1981. V. 78. № 4. P. 507–530.
6. Лебовиц Л., Синай Я., Чернов Н. // *УМН*. 2002. Т. 57. В. 6. С. 3–86.
7. Козлов В.В. *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
8. Lebowitz J.L., Piasecki J., Sinai Ya. // In: *Hard Ball Systems and the Lorentz Gas*. B.: Springer, 2000. P. 217–227.
9. Козлов В.В., Трещев Д.В. // *ТМФ*. 2003. Т. 134. № 3. С. 388–400.
10. Kozlov V.V. // *Reg. and Chaot. Dynamics*. 2001. V. 6. № 3. P. 235–251.