ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 403, № 5, с. 589–592

МАТЕМАТИКА

УДК 512.83+519.248.23

ЗАМЕЧАНИЯ О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МАТРИЦ

© 2005 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 05.05.2005 г.

1. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть A и B невырожденные вещественные $(n \times n)$-матрицы, причем B симметрична: $B^T = B$. Свяжем с матрицей B квадратичную форму

$$(Bx, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть i^+, i^- – индексы инерции этой формы, (i^+, i^-) – ее сигнатура. Ясно, что $i^+ + i^- = n$. Количество собственных чисел матрицы A с положительной вещественной частью обозначим через u, а количество пар чисто мнимых собственных значений – через s.

Сначала напомним один классический результат Ляпунова[1]. Если симметрическая матрица

$$AB + BA^T \tag{1}$$

отрицательно определена, причем матрица B положительно определена, то все собственные числа матрицы A лежат в левой комплексной полуплоскости. Этот результат – частный случай более общей теоремы Островского и Шнейдера [2]: *если матрица* (1) *отрицательно определена, то* $u = i^-$.

В более общем случае отрицательно-полуопределенной матрицы (1) числа u и i^-, вообще говоря, не совпадают. Однако справедлива

Теорема 1. *Если матрица* (1) *отрицательно полуопределена, то*

$$u \equiv i^- \pmod 2.$$

Этот результат получен в работе [3]. Нас будет интересовать наиболее сложный случай, когда матрица (1) равна нулю. Тогда спектр матрицы A симметричен не только относительно вещественной, но и относительно чисто мнимой оси.

Теорема 2. *Если* $AB + BA^T = 0$, *то* n *четно и*

$$|i^+ - i^-| \le 2s_1,$$

где s_1 *– количество пар чисто мнимых собственных чисел матрицы* A *с жордановыми клетками нечетного порядка.*

Математический институт им. В.А. Стеклова, Российской Академии наук, Москва

Эта теорема выводится из результатов работы [4].

Следствие 1. $|i^+ - i^-| \le 2s$.

Следствие 2. *Пусть* $AB + BA^T = 0$ *и индекс* i^+ *(или* i^-*) равен единице.*

Тогда спектр матрицы A *состоит из пары вещественных чисел и* $\frac{n-2}{2}$ *пар чисто мнимых собственных значений с простыми элементарными делителями.*

Из теорем 1 и 2 выводится ряд других полезных следствий, суммированных в разделах 2 и 3.

2. ДОПОЛНЕНИЯ К ТЕОРЕМЕ О ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ

Хорошо известно[5], что любую матрицу можно представить (причем неоднозначно) в виде произведения симметрических матриц:

$$A = -FG. \tag{2}$$

Знак минус перед произведением поставлен из соображений удобства. Будем по-прежнему считать, что $\det A \ne 0$. Тогда, конечно, матрицы F и G также невырожденны. Ниже указаны некоторые связи между спектром матрицы A и сигнатурами (f^+, f^-) и (g^+, g^-) квадратичных форм

$$(Fx, x), \quad (Gx, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ясно, что $f^+ + f^- = g^+ + g^- = n$. Пусть r_- (r_+) – количество вещественных отрицательных (положительных) собственных значений матрицы A (считая с кратностями).

Теорема 3.

$$|f^+ + g^+ - f^- - g^-| \le 2r_-. \tag{3}$$

Если матрицы F и G положительно (или отрицательно) определены, то левая часть неравенства (3) равна $2n$. Следовательно, в этом случае $r_- = n$ и поэтому весь спектр матрицы A лежит на отрицательной вещественной полуоси. Это наблюдение легко усилить: невырожденная матрица A допускает факторизацию (2) с положительно-определенными симметрическими матрицами тогда и только тогда, когда все собственные значения A –

отрицательные вещественные числа, допускающие лишь простые элементарные делители.

Оценка (3), конечно, не является точной. Пусть, например, $F = G$. Тогда матрица A имеет n отрицательных вещественных собственных значений. К тому же неравенство (3) дает лишь $|f^+ - f^-|$ таких чисел.

Теорема 4.

$$f^+ + g^+ \equiv r_+ \pmod 2), \quad f^- + g^- \equiv r_+ \pmod 2).$$

Эти два сравнения, очевидно, эквивалентны.

3. ОБОБЩЕННЫЕ ПФАФФИАНЫ

Рассмотрим еще $(n \times n)$-матрицы блочного вида

$$A = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где K и N – кососимметрические матрицы порядков p и q соответственно $(p + q = n)$, L и M суть $(p \times q)$- и $(q \times p)$-матрицы, причем $L^T = M$, $M^T = L$. Матрица A удовлетворяет соотношению $AB + BA^T = 0$, где $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, причем $b_j = 1$, если $1 \le j \le p$, и $b_j = -1$, если $p + 1 \le j \le n$.

Если p (или q) равно нулю, то получим обычную кососимметрическую матрицу. Хорошо известно, что определитель такой матрицы (над любым полем) нечетного порядка всегда равен нулю, а определитель кососимметрической матрицы четного порядка $2k$ есть квадрат однородной формы степени k от элементов матрицы [6]. Эта матрица называется пфаффианом кососимметрической матрицы.

Теорема 5. *Пусть матрица A (над любым полем) имеет вид* (4). *Тогда:*

1) *если $p + q$ нечетно, то* $\det A = 0$,

2) *если $p + q$ четно и равно $2k$, то*

$$\det A = (-1)^p (\widetilde{\operatorname{Pf}} A)^2, \tag{5}$$

где $\widetilde{\operatorname{Pf}}$ – однородная форма степени k от элементов матрицы A.

Следствие. *Пусть вещественная матрица A вида* (4) *невырожденна.*

Тогда $\det A > 0$ (< 0), *если p четно (нечетно).*

Форму $\widetilde{\operatorname{Pf}} A$ (которая пока определена с точностью до знака) можно назвать обобщенным пфаффианом матрицы A. Ясно, что в формуле (5) вместо $(-1)^p$ можно взять $(-1)^q$. Приведем два примера:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})^2.$$

В первом из них $p = 1$, $q = 3$, а во втором $p = q = 2$.

Обобщенный пфаффиан имеет вид

$$\widetilde{\operatorname{Pf}} A = \sum_m \mathscr{E}(m) a_{u_1 v_1} \cdots a_{u_k v_k}, \tag{6}$$

где суммирование ведется по всевозможным разбиениям m множества $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ на непересекающиеся пары $\{u_\alpha, v_\alpha\}$, причем считается, что $u_\alpha < v_\alpha$ $(1 \le \alpha \le k)$, а $\mathscr{E}(m)$ равно либо $+1$, либо -1. Будем считать, что коэффициент при произведении

$$a_{12}a_{34} \cdots a_{2k-1,2k}$$

равен $+1$. Тогда k-форма (6) определена однозначно.

Введем кососимметрическую матрицу порядка $2k$ с комплексными элементами

$$\Gamma = \begin{bmatrix} K & iL \\ -iM & N \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что $\det A = \det \Gamma$ и

$$\widetilde{\operatorname{Pf}} A = -i^p \operatorname{Pf} \Gamma.$$

Теорема 6. *Если* $\det A \ne 0$, *то*

$$|p - q| \le 2s_1, \tag{7}$$

где s_1 – количество пар чисто мнимых собственных значений матрицы A с жордановыми клетками нечетного порядка.

В частности, $|p - q| \le 2s$. Пусть, например, p (или q) равно нулю. Тогда $s = k = \frac{n}{2}$ и, следовательно, все собственные значения кососимметрической матрицы A будут чисто мнимыми.

Любопытно рассмотреть другой крайний случай, когда $p = q$ и $K = N = 0$. Тогда матрица A будет симметрической и все ее собственные значения вещественны. Отметим еще, что при $K = N = 0$ и $p \neq q$ симметрическая матрица A будет вырожденной.

Теорема 7. *Если* $\det A \neq 0$, *то спектр матрицы A инвариантен при отражениях относительно вещественной и чисто мнимой осей и*

$$r_+ \equiv p \pmod 2, \quad r_- \equiv p \pmod 2.$$

Так как здесь сумма $p + q$ четна, то в этих сравнениях p можно заменить на q.

Следствие. *Пусть* $p = 1$ (*или* $q = 1$) *и* $\det A \neq 0$.

Тогда спектр матрицы A состоит из пары вещественных чисел $\pm a$ ($a \neq 0$) и $\frac{n-2}{2}$ пар чисто мнимых собственных значений с простыми элементарными делителями.

Действительно, наличие пары вещественных собственных значений вытекает из теоремы 7, а неравенство (7) принимает вид $2s_1 \geq |1 - (n-1)| = n - 2$. Следовательно, $s_1 = \frac{n-2}{2}$. Поэтому все остальные собственные значения будут чисто мнимыми с простыми жордановыми клетками.

4. ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Некоторые из сформулированных выше результатов справедливы и для вырожденной матрицы A. При этом симметрическую матрицу B мы продолжаем считать невырожденной.

Предложение 1. *Если n четно (нечетно), то характеристический многочлен*

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

есть четная (нечетная) функция.

Действительно,

$$f(\lambda) = \det(A^T - \lambda E) = \det(-B^{-1}AB - \lambda E) =$$
$$= (-1)^n \det B^{-1}(A + \lambda E)B = (-1)^n f(-\lambda).$$

Следствие. *Если вещественная матрица A имеет собственное значение λ, то числа $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ также будут ее собственными значениями.*

Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ будем называть изотропным, если

$$(Bx, x) = 0. \tag{8}$$

Предложение 2. *Собственный вектор матрицы A с ненулевым вещественным собственным значением будет изотропным.*

Действительно, пусть $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тогда

$$\lambda(Bx, x) = (Ax, Bx) = (BAx, x) =$$
$$= \frac{1}{2}((BA + A^TB)x, x) = 0.$$

Теорема 8. *Пусть n четно, p (q) нечетно и $Ax \neq 0$ для всех изотропных $x \neq 0$.*

Тогда матрица A имеет пару ненулевых вещественных собственных чисел с изотропными собственными векторами.

Пример. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & \\ a_n & & & \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=2}^{n} a_j^2 \neq 0. \tag{9}$$

Эта матрица имеет вид (4), причем $p = 1$, $q = n - 1$.

При всех $n \geq 3$ матрица A будет вырожденной, однако она имеет вещественную пару собственных значений

$$\pm(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко проверить, что $Ax \neq 0$ для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, удовлетворяющих условию

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^2. \tag{10}$$

Правда, наличие вещественной пары собственных значений у матрицы (9) вытекает из теоремы 8 только при четных n.

Если n нечетно, то матрицы A и A^T будут вырожденными (теорема 5). Следовательно, найдется ненулевой вектор α такой, что $A^T\alpha = 0$. Пусть $\Pi = \{x: (\alpha, x) = 0\}$ – гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ и g – ограничение квадратичной формы (Bx, x) на Π. Будем предполагать, что Π не касается конуса (8). Тогда g – невырожденная квадратичная форма. Пусть (p', q') – ее сигнатура. Ввиду невырожденности, $p' + q' = n - 1$. Из теоремы 8 вытекает

Следствие. *Пусть n нечетно, $Ax \neq 0$ для всех изотропных векторов $x \neq 0$ и p' (q') нечетно.*

Тогда матрица A имеет пару ненулевых вещественных собственных чисел с изотропными собственными векторами из плоскости Π.

Так как

$$(\alpha, Ax) = (A^T\alpha, x) = 0,$$

то оператор A отображает гиперплоскость Π в себя. Пусть A' есть $(n-1)\times(n-1)$-матрица оператора A в некотором базисе подпространства Π, B' – невырожденная симметрическая матрица квадратичной формы g в том же базисе. Легко показать, что

$$A'B' + B'(A')^T = 0.$$

Остается воспользоваться теоремой 8.

Для матрицы (9) вектор α имеет вид

$$(0, b_2, \ldots, b_n), \quad \sum b_i^2 \neq 0,$$

причем $\sum a_j b_j = 0$. Следовательно, гиперплоскость $\Pi = \{x: b_2x_2 + b_3x_3 + \cdots + b_nx_n = 0\}$ не касается конуса (10) и сигнатура квадратичной формы g равна $(1, n-2)$. Таким образом, вещественную пару собственных значений матрицы (9) при нечетном n дает нам следствие из теоремы 8.

В заключение укажем идею доказательства теоремы 8. Пусть Λ^{n-2} – пересечение конуса (8) с единичной сферой $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Так как $AB + BA^T = 0$, то векторное поле Ax касается конуса (8). Пусть $v(x)$ – ортогональная проекция вектора Ax на касательную плоскость к Λ в точке x. Поскольку $Ax \neq 0$ при $x \in \Lambda$, то v – гладкое касательное поле на четномерном многообразии Λ. Несложно проверить, что с точки зрения топологии Λ есть прямое произведение двух сфер размерности $p-1$ и $q-1$. Согласно предположению, числа $p-1$ и $q-1$ четные. Следовательно, эйлерова характеристика Λ отлична от нуля. Но тогда касательное поле v имеет хотя бы одну точку покоя на Λ. В этой точке векторы Ax и x коллинеарны: $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Так как $Ax \neq 0$, то $\lambda \neq 0$. Существование второго вещественного собственного значения $-\lambda$ вытекает из предложения 1. Что и требовалось.

Автор благодарен С. В. Болотину и Д. В. Трещеву за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта CRDF (RU–M1–2583–M0–04).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
2. *Ostrowski A., Schneider H.* // J. Math. Anal. Appl. 1962. V. 4. P. 72–84.
3. *Козлов В. В.* // ПММ. 1993. Т. 57. В. 5. С. 14–19.
4. *Козлов В. В., Карапетян А. А.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 186–192.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
6. *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966.