УДК 531.36:534.1

© 2005 г. В. В. Козлов, С. А. Поликарпов

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЯХ БИЛЛИАРДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о существовании периодических траекторий заряженной частицы в магнитном поле, когда частица движется внутри замкнутой выпуклой области, упруго отражаясь от ее границы. С помощью геометрической теоремы Пуанкаре установлено наличие бесконечного числа различных периодических траекторий при небольшой напряженности магнитного поля. Найдены условия устойчивости двузвенных траекторий в случае однородного магнитного поля.

1. Биллиард в магнитном поле. Рассмотрим движение заряженной частицы единичной массы в магнитном поле. Предположим, что линии индукции магнитного поля перпендикулярны некоторой плоскости π, в которой находится частица, а ее скорость направлена вдоль π. Тогда частица будет оставаться в плоскости π во все время движения. Ее движение описывется гамильтоновой динамической системой с функцией Гамильтона

$$H = (v_\xi^2 + v_\eta^2)/2$$

и симплектической структурой

$$\omega = dv_\xi \wedge d\xi + dv_\eta \wedge d\eta - eBc^{-1} d\xi \wedge d\eta$$

где ξ, η – декартовы координаты частицы на плоскости, v_ξ, v_η – компоненты скорости, e – заряд частицы, c – скорость света, $B(\xi, \eta)$ – индукция магнитного поля, $\wedge$ – внешнее произведение.

Важная характеристика движения – радиус Лармора – величина, вычисляемая по формуле

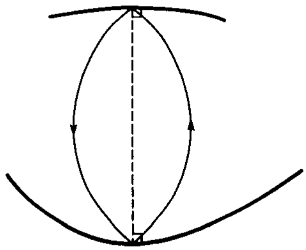
$$R = R(\xi, \eta) = vc/(e|B(\xi, \eta)|) \tag{1.1}$$

где v – величина скорости частицы.

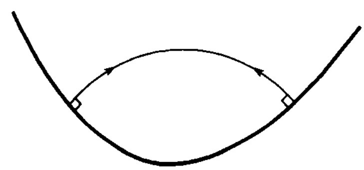
Предположим, что частица во все время движения остается внутри области, ограниченной выпуклой кривой L, отражаясь при ударе об L согласно закону абсолютно упругого удара (касательная к L компонента скорости частицы сохраняется, а нормальная меняет знак).

Индукция магнитного поля – заранее заданная однозначная функция двух переменных ξ, η. Назовем такую динамическую систему с ударами *односторонним* биллиардом. Она изучалась многими авторами (см., например, обзор [1].

Односторонний биллиард в круге – вполне интегрируемая система (кроме интеграла энергии H имеется интеграл, линейный по скоростям). Однако, если в качестве границы L взять эллипс с неравными полуосями, то соответствующая система уже не будет допускать дополнительного аналитического первого интеграла [2].



Фиг. 1



Фиг. 2

Особый интерес представляет случай, когда направление магнитного поля (знак индукции) меняется на противоположное при каждом столкновении частицы с кривой L. Такую систему назовем *двусторонним* биллиардом.

Термин *двусторонний* соответствует представлению о биллиарде как о движении частицы по сильно сплющенной поверхности σ, на которую действует магнитное поле, направленное вне (или внутрь) σ. Например, в качестве σ можно взять поверхность эллипсоида, одна из полуосей которого стремится к нулю. В действительности, магнитное поле без сингулярностей не может быть направлено всюду внутрь или вне замкнутой поверхности σ, поскольку его поток через σ всегда равен нулю. Однако в неклассических электромагнитных теориях это вполне возможно (например, теория монополя Дирака). Двусторонний биллиард дает простую (правда, вырожденную) модель магнитного монополя.

Ниже рассматривается задача о периодических замкнутых траекториях биллиардов в магнитном поле.

Положение частицы на кривой L охарактеризуем двумя величинами: s – параметром вдоль кривой L, пропорциональным натуральному параметру, и γ – синусом угла между внутренней нормалью к L и вектором скорости частицы сразу после отражения – угла отражения (ср. с [3]).

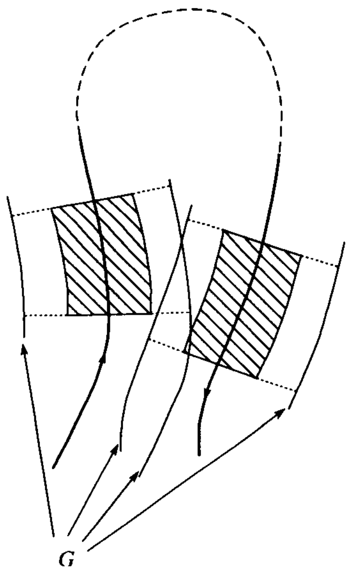
Следуя описанному ранее подходу [4], определим последовательность точек s^1, s^2, ..., s^n, задающую периодическую n-звенную траекторию биллиарда (параметр s^i соответствует i-й точке соударения частицы с L). Пусть $s^2 - s^1$, $s^3 - s^2$, ..., $s^n - s^{n-1}$, $s_*^1 - s^n$ заключены между 0 и 2π, где $s_*^1 = s^1 \mathrm{mod} 2\pi$ (s_*^1 – координата точки, где траектория замыкается).

Скажем, что траектория биллиарда совершает k оборотов вокруг границы L, если $s_*^1 - s^1 = 2\pi k$. Число k определяет геометрические типы замкнутых траекторий. Ясно, что двузвенная траектория биллиарда (когда $n = 2$) совершает один оборот вокруг кривой L.

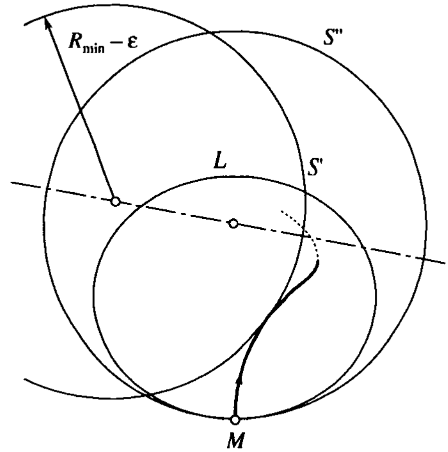
В дальнейшем особый интерес будет представлять случай, когда магнитное поле однородно, т.е. его индукция не зависит от положения частицы на плоскости. В этом случае между двумя соударениями с границей частица движется по дуге окружности радиуса Лармора (1.1), который также не зависит от положения частицы.

Двузвенная периодическая траектория одностороннего биллиарда в однородном магнитном поле состоит из двух дуг, симметрично расположенных относительно стягивающей их хорды. Ясно, что эта хорда должна быть перпендикулярна кривой L в точках пересечения (фиг. 1).

В двустороннем биллиарде двузвенная траектория представляет собой дугу окружности радиуса Лармора, которая перпендикулярна кривой L в точках пересечения. Заряженная частица пробегает эту дугу в обоих направлениях (фиг. 2).



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Условия существования периодических траекторий. Зафиксируем постоянную энергии, пусть $H = \text{const} > 0$. В фазовом пространстве рассматриваемой системы с упругими ударами уровень энергии D – трехмерное многообразие с краем. Его край D – кольцо, соответствующее положению частицы на границе L. Рассматривается общий случай, когда магнитное поле неоднородно. Считается, что его индукция B – гладкая функция декартовых координат ξ, η.

Как и ранее [5], кривую L можно определить с помощью формул Френе, задав начальные координаты векторов сопутствующего базиса в точках кривой и ее кривизну. При таком задании кривизна кривой L будет всюду положительной.

В каждой точке замкнутой области, ограниченной кривой L, вычислим радиус Лармора (1.1) и пусть $R_{\min}$ – наименьшее из полученных значений.

Лемма. Пусть радиус кривизны кривой L всюду меньше $R_{\min}$. Тогда траектория частицы, выпущенная трансверсально из точки на кривой L, пересекает ее вновь, причем также трансверсально.

Доказательство. Выпустим частицу из некоторой точки M на кривой L трансверсально к границе. Рассмотрим геометрическое место G центров окружностей радиуса $R_{\min} - \varepsilon$, где ε достаточно мало, касающихся траектории частицы. Согласно условию леммы, G образовано двумя гладкими кривыми [1] и образует границу криволинейной полосы шириной $2(R_{\min} - \varepsilon)$, осью (средней линией) которой является траектория частицы (фиг. 3).

Рассматриваемая полоса может иметь самопересечения, однако в условиях леммы траектория частицы не может пересечь ее границу. Покажем это.

Для некоторого положения частицы на траектории проведем окружность S' радиуса $R_{\min} - \varepsilon$, касающуюся траектории (фиг. 4). Заметим, что центр окружности S' принадлежит G. Проведем также окружность S'' того же радиуса, что и S', касающуюся кривой L в точке M. Согласно условию леммы кривая L пересекается с окружностью S' только один раз [1]. Траектория частицы пересекается с окружностью S' также лишь один раз. В противном случае один из образов отрезка траектории между пересечениями с S' при сдвиге вдоль прямой, соединяющей центры S' и S'', коснется S'' изнутри.

Таким образом, при движении частицы площадь той части плоскости π, в которую частица не может попасть (это полоса, которую "заметает" отрезок длины $R_{\min} - \varepsilon$, в середине которого находится частица, двигающийся вместе с частицей вдоль траектории, оставаясь перпендикулярным траектории), увеличивается со скоростью, не меньшей, чем $v(R_{\min} - \varepsilon)$, в то время как область движения частицы ограничена кривой L.

Итак, будучи выпущенной трансверсально к кривой L, частица за конечное время должна вновь оказаться на L, причем касание кривой L исключается условием леммы, что и требовалось.

Основной результат составляет

Теорема 1. В условиях леммы для любого $n > 1$ и любого $k < n$, взаимно простого с n, существуют, по крайней мере, две различные n-звенные периодические траектории одностороннего биллиарда, совершающие k оборотов вокруг границы L. В случае двустороннего биллиарда утверждение теоремы остается в силе для любого четного n.

В случае однородного магнитного поля ($B = \mathrm{const}$) был указан [1] более слабый вариант теоремы 1: утверждается, что в условиях теоремы при $n > 2$ имеется хотя бы одна периодическая n-звенная траектория одностороннего биллиарда. Она отвечает точке максимума некоторой функции от n переменных (которая отвечает действию по Якоби на некотором классе замкнутых кривых) на компактном многообразии с кусочно-гладкой границей. Однако приведенные в [1] аргументы нельзя признать строгими. Было дано [6] полное вариационное доказательство теоремы 1 в отсутствие магнитного поля, и оно использует нетривиальные топологические идеи.

В общем случае, когда магнитное поле неоднородное, можно применить вариационную теорию С.П. Новикова, касающуюся существования замкнутых траекторий необратимых систем с компактным двумерным конфигурационным многообразием (в нашем случае это многообразие гомеоморфно двумерной сфере) [7–9]. Укажем достаточное условие существования хотя бы одной замкнутой траектории частицы единичной массы в однородном магнитном поле, которое дает теория С.П. Новикова

$$\lambda v < eBc^{-1}\sigma \tag{2.1}$$

Здесь λ – длина границы L, а σ – площадь, заключенная внутри L. Условие (2.1) годится как для одностороннего, так и для двустороннего биллиарда. Например, если L – окружность радиуса r, то неравенство (2.1) принимает вид $r > 2R$, где R – радиус Лармора (1.1). При этих же предположениях условие теоремы 1 сводится к неравенству $r < R$.

Доказательство теоремы 1 основано на применении геометрической теоремы Пуанкаре (ср. с [3]). Рассмотрим отображение последования в силу рассматриваемой динамической системы $T : \partial D \to \partial D$. В силу леммы отображение T непрерывно и взаимно однозначно. Из сохранения 2-формы ω в силу гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом H следует сохранение 2-формы площади $d\gamma \wedge ds$ в силу отображения T. Кроме того, заметим, что

$$T : (s, 1) \to (s, 1) \quad \text{и} \quad T : (s, -1) \to (s + 2\pi, -1)$$

Ясно, что отображение T не может иметь инвариантных точек, не лежащих на границе кольца. Поэтому рассмотрим композиции степеней отображения T и вращений кольца R_{-k} вокруг центра на угол $-2\pi k$, где $k < n$ и число k взаимно просто с n. Поскольку R_{-k}, очевидно, является непрерывным, взаимно однозначным и сохраняющим площадь отображением кольца на себя, то композиции $R_{-k}T^n$ удовлетворяют всем условиям геометрической теоремы Пуанкаре [3, 4] и, следовательно, имеют два ряда геометрически различных инвариантных точек

$$U, T(U), T^2(U), \ldots, T^{n-1}(U); \quad V, T(V), T^2(V), \ldots, T^{n-1}(V)$$

Все эти точки инвариантны под действием $R_{-k}T^n$ и поворачиваются на угол $2\pi k$ под действием T^n. При этом каждому ряду точек соответствует замкнутая n-звенная траектория биллиарда, совершающая k оборотов вокруг кривой L.

Ясно, что двусторонний биллиард может иметь только замкнутые траектории с четным количеством звеньев. А для определения отображения последования в случае двустороннего биллиарда необходимо рассматривать две его итерации: T_+, соответствующую движению частицы по одной стороне поверхности, и T_-, соответствующую движению по обратной стороне (при изменении направления магнитной индукции).

3. Условия устойчивости двузвенных траекторий биллиарда в однородном магнитном поле. Вопрос об орбитальной устойчивости двузвенных траекторий одностороннего биллиарда в однородном магнитном поле (соответственно двустороннего биллиарда в "почти" однородном магнитном поле) сводится к изучению устойчивости неподвижной точки соответствующего двукратно примененного отображения последования (ОП) T^2 (композиции $T_- \circ T_+$).

В плоскости движения частицы введем декартовы координаты (ξ, η) и рассмотрим итерацию отображения последования. Пусть в окрестности начальной точки дуги траектории между двумя соударениями кривая L задается уравнением $\eta = \Phi(\xi)$, а рядом с конечной точкой – уравнением $\eta = \Psi(\xi)$.

ОП удобно записать в координатах (ξ, γ), где γ – синус угла отражения.

Для декартовых координат центра окружности Лармора (ξ_c, η_c), по дуге которой движется частица от соударения с кривой Φ до соударения с кривой Ψ, справедливы формулы

$$\begin{aligned}
\xi_c &= \xi_s - \tilde{R}(\xi_s)\left(\sqrt{1-\gamma_s^2} + \gamma_s \Phi'(\xi_s)\right) \\
\eta_c &= \Phi(\xi_s) + \tilde{R}(\xi_s)\left(\gamma_s - \sqrt{1-\gamma_s^2}\,\Phi'(\xi_s)\right) \\
\tilde{R}(\xi_s) &= R/\sqrt{1+(\Phi'(\xi_s))^2}
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Здесь ξ_s, γ_s – координаты, описывающие положение частицы на кривой Φ, R – радиус Лармора.

Итерация ОП задается формулами

$$(\xi_i - \xi_c)^2 + (\Psi(\xi_i) - \eta_c)^2 = R^2, \quad \gamma_i = \frac{\eta_c - \Psi(\xi_i) + (\xi_i - \xi_c)\Psi'(\xi_i)}{R\sqrt{1+(\Psi'(\xi_i))^2}} \qquad (3.2)$$

Координаты (ξ_i, γ_i) описывают положение частицы на кривой Ψ.

Рассмотрим случай одностороннего биллиарда (фиг. 5). Пусть двузвенная периодическая траектория соединяет точки с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$, и при этом

$$\Phi(\xi) = -l + a_{21}\xi^2/2 + O_3(\xi), \quad \Psi(\xi) = l - a_{22}\xi^2/2 + O_3(\xi)$$

Предположим также, что $a_{21} > 0$, $a_{22} > 0$ и $a_{21} > a_{22}$. Ясно, что

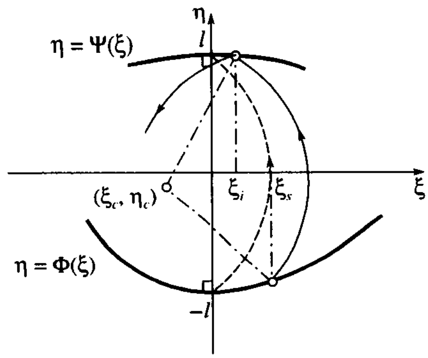
$$a_{21} = 1/R_1, \quad a_{22} = 1/R_2$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны кривых Φ и Ψ в точках с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$ соответственно.

Двукратно примененное ОП имеет неподвижную точку, которая в координатах (ξ, γ) имеет вид $(0, l/R)$.

Введем обозначения

$$c_1 = 1 - 2la_{21}, \quad c_2 = 1 - 2la_{22}, \quad d = 2lR/\sqrt{R^2 - l^2}$$



Фиг. 5

Используя формулы (3.1), (3.2), найдем в линейном приближении выражения для (ξ_i, γ_i)

$$\left\| \begin{matrix} \xi_i \\ \gamma_i + \frac{l}{R} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} c_1 & d \\ \frac{c_1 c_2 - 1}{d} & c_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_s \\ \gamma_s - \frac{l}{R} \end{matrix} \right\| + O_2 \qquad (3.3)$$

Для следующей итерации ОП T, возвращающей частицу на кривую Ф, справедливы формулы, аналогичные (3.1), (3.2). С их помощью получим

$$\left\| \begin{matrix} \xi_f \\ \gamma_f - \frac{l}{R} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} c_2 & d \\ \frac{c_1 c_2 - 1}{d} & c_1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_i \\ \gamma_i + \frac{l}{R} \end{matrix} \right\| + O_2 \qquad (3.4)$$

Здесь (ξ_f, γ_f) – координаты частицы, снова находящейся на кривой Ф.

Из формул (3.3), (3.4) получим известный [1] результат: в случае одностороннего биллиарда неподвижная точка $(0, l/R)$ двукратно примененного ОП имеет гиперболический тип при выполнении одного из условий $R_1 < 2l < R_2$ или $2l > R_1 + R_2$. Если же выполняется одно из условий $0 < 2l < R_1$ или $R_2 < 2l < R_1 + R_2$, то неподвижная точка имеет эллиптический тип. Было также отмечено [1], что полученные неравенства полностью совпадают с условиями устойчивости, справедливыми для двузвенной траектории "обычного" биллиарда (при движении частицы по инерции) (см. [4]).

Рассмотрим теперь случай двустороннего биллиарда (фиг. 6). Пусть двузвенная периодическая траектория по-прежнему соединяет точки с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$. Однако теперь

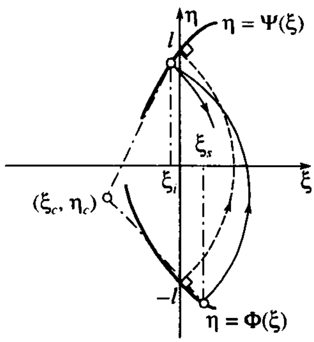
$$\Phi(\xi) = -l - a_1\xi + a_{21}\xi^2/2 + O_3(\xi), \quad \Psi(\xi) = l + a_1\xi - a_{22}\xi^2/2 + O_3(\xi)$$

Здесь $a_1 > 0$. Как и в случае одностороннего биллиарда предположим, что $a_{21} > 0$, $a_{22} > 0$ и $a_{21} > a_{22}$.

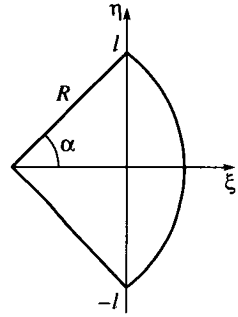
Кроме того, справедливы формулы

$$\cos^2\alpha = 1/(1 + a_1^2), \quad \sin\alpha = l/R$$

где α – половина угла, опирающегося на дугу окружности – двузвенную периодическую траекторию (фиг. 7).



Фиг. 6



Фиг. 7

Радиусы кривизны R_1 и R_2 кривых Φ и Ψ в точках с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$ можно вычислить по формулам

$$1/R_1 = a_{21}(a_1^2+1)^{-3/2}, \quad 1/R_2 = a_{22}(a_1^2+1)^{-3/2}$$

соответственно.

Композиция $T_- \circ T_+$ имеет неподвижную точку $(\xi, \gamma) = (0, 0)$.

Введем обозначения

$$p_1 = \frac{1-2la_{21}-a_1^4}{(1+a_1^2)^2}, \quad p_2 = \frac{1-2la_{22}-a_1^4}{(1+a_1^2)^2}$$

$$q_1 = \frac{2l}{1+a_1^2}, \quad q_2 = \frac{p_1p_2-(1-a_1^4)^2}{q_1} - \frac{2l}{R^2}$$

Итерация отображения $T^+ : (\xi_s, \gamma_s) \to (\xi_i, \gamma_i)$ задается формулами (3.1), (3.2). Из них получим

$$\left\| \begin{matrix} \xi_i \\ \gamma_i \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} p_1 & q_1 \\ q_2 & p_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_s \\ \gamma_s \end{matrix} \right\| + O_2 \tag{3.5}$$

Для итерации отображения T_-, возвращающей частицу на кривую Φ, имеем

$$\left\| \begin{matrix} \xi_f \\ \gamma_f \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} p_2 & q_1 \\ q_2 & p_1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_i \\ \gamma_i \end{matrix} \right\| + O_2 \tag{3.6}$$

Здесь (ξ_f, γ_f) – координаты частицы, снова находящейся на кривой Φ.

Вычислим след произведения матриц из формул (3.5), (3.6)

$$\tau = 2\left(\frac{2(2l\cos\alpha)^2}{R_1R_2} + 2(2l\cos\alpha)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{a_1^2-1}{a_1^2+1} + \frac{a_1^4-6a_1^2+1}{(a_1^2+1)^2}\right) \tag{3.7}$$

Обозначим

$$\varrho = \frac{1}{2}(R_1+R_2)\cos 2\alpha + \sqrt{R_1R_2+\frac{1}{4}(R_1-R_2)^2\cos^2 2\alpha}$$

Теорема 2. В случае двустороннего биллиарда неподвижная точка (0, 0) композиции $T_- \circ T_+$ является

1) при $0 < \alpha < \pi/4$ гиперболической, если

$$R_1 \cos 2\alpha < 2l \cos\alpha < R_2 \cos 2\alpha \quad \text{или} \quad 2l\cos\alpha > \varrho$$

эллиптической, если

$$0 < 2l\cos\alpha < R_1 \cos 2\alpha \quad \text{или} \quad R_2 \cos 2\alpha < 2l\cos\alpha < \varrho$$

2) при $\alpha = \pi/4$ гиперболической, если

$$\sqrt{2}l > \sqrt{R_1 R_2}$$

эллиптической, если

$$0 < \sqrt{2}l < \sqrt{R_1 R_2}$$

3) при $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ гиперболической, если

$$2l\cos\alpha > \varrho$$

эллиптической, если

$$0 < 2l\cos\alpha < \varrho$$

Доказательство основано на анализе следа произведения матриц линеаризации (3.7). Указанные условия при ослаблении магнитного поля ($R \to \infty$, $\alpha \to 0$) переходят в условия устойчивости двузвенной траектории обычного биллиарда (при движении частицы по инерции) (см. [4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01059) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-136.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robnik M.* Regular and chaotic billiard dynamics in magnetic fields // Nonlinear Phenomena and Chaos. Bristol; Boston: Adam Hilger, 1986. P. 303–330.
2. *Козлова Т.В.* Неинтегрируемость вращающегося эллиптического биллиарда // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 87–91.
3. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927. *Биркгоф Д.* Динамические системы. Ижевск: Изд. дом "Удмурт. ун-т", 1999. 407 с.
4. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
5. *Поликарпов С.А.* О периодических траекториях биллиарда в однородном поле тяжести // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 2002. № 5. С. 42–45.
6. *Трещев Д.В.* К вопросу о существовании периодических траекторий бильярда Биркгофа // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1987. № 5. С. 72–75.
7. *Новиков С.П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. Вып. 5. С. 3–49.
8. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 1. С. 26–28.
9. *Тайманов И.А.* Несамопересекающиеся замкнутые экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1991. Т. 55. № 2. С. 367–383.

Москва
e-mail: kozlov pran.ru

Поступила в редакцию
27.I.04