ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 553–555

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.933

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛИ, КАСАЮЩЕЙСЯ ТОЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2005 г. В. В. Козлов

1. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – набор векторных полей, линейно независимых во всех точках $\mathbb{R}^n = \{x\}$ (или в некоторой области $\mathbb{R}^n$, где эти поля рассматриваются). Предположим, что эти поля порождают *разрешимую* алгебру Ли g относительно обычной операции коммутирования $[\,,\,]$:

$$[v_1, v_j] = c_{1,j}^1 v_1, \tag{1_1}$$

$$[v_2, v_j] = c_{2,j}^1 v_1 + c_{2,j}^2 v_2, \quad \ldots, \tag{1_2}$$

$$[v_n, v_j] = c_{1,j}^1 v_1 + c_{2,j}^2 v_2 + \ldots + c_{n,j}^n v_n. \tag{1_n}$$

Здесь $c_{i,j}^k$ – структурные постоянные алгебры g.

Классическая теорема Ли утверждает, что дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

интегрируется в квадратурах (см. [1]; более современное изложение см. в [2, 3]). Более точно, все его решения можно найти с помощью "алгебраических операций" (включая обращение функций) и "квадратур" – вычисления интегралов известных функций одной переменной. Это определение носит локальный характер. Алгебре g соответствует n-мерная разрешимая группа Ли G, которая свободно действует на $\mathbb{R}^n$. Соотношения (1) означают, что преобразования из группы G переводят траектории системы (2) в траектории того же уравнения. Другими словами, разрешимая группа G "переставляет" траектории дифференциального уравнения (2). Ли рассматривал свою теорему как аналог теории Галуа для обычных алгебраических уравнений. Однако более естественным аналогом теории Галуа является теория Пикара–Вессио, изучающая расширения дифференциальных полей путем присоединения решений линейных дифференциальных уравнений (см., например, [4]).

Тем не менее теорема Ли – один из ключевых результатов в проблеме точного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Достаточно упомянуть, что в простейшем коммутативном случае из нее сразу же вытекает известная теорема Лиувилля об интегрируемости дифференциальных уравнений Гамильтона с полным набором независимых инволютивных первых интегралов (см. [3]).

Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Каждое из n дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = v_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

интегрируется в квадратурах.

Укажем одно из следствий теоремы 1. Пусть $w_1, \ldots, w_{n-1}$ – набор почти всюду независимых и коммутирующих векторных полей в $\mathbb{R}^n$, причем

$$[v, w_j] = \lambda_j w_j, \quad \lambda_j = \text{const}. \tag{4}$$

Тогда уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

интегрируется в квадратурах. Действительно, если положить $v_1 = w_1, \ \ldots, \ v_{n-1} = w_{n-1}, \ v_n = v$, то будут выполняться коммутационные соотношения (1).

Заметим, что условие (4) влечет за собой свойство вмороженности интегральных кривых поля w_j в фазовый поток системы (5). Таким образом, система уравнений допускает явное интегрирование, если имеется $n-1$ независимых коммутирующих векторных полей, интегральные кривые которых вморожены в фазовый поток этой системы. Правда, надо иметь в виду, что свойство вмороженности, вообще говоря, не предполагает постоянства коэффициентов λ_j. Однако для точной интегрируемости необходимо считать λ_j константами.

При $j = 1$ теорема 1 совпадает с теоремой Ли, а в другом крайнем случае $j = n$ геометрический смысл условий (1) совсем иной. Рассмотрим k-мерное распределение плоскостей в $\mathbb{R}^n = \{x\}$, порожденное линейными комбинациями линейно независимых векторов $v_1(x), \ldots, v_k(x)$. Ввиду коммутационных соотношений (1) это распределение интегрируемо (по теореме Фробениуса). Значит, все $\mathbb{R}^n$ расслоено на k-мерные интегральные многообразия σ^k этого распределения. Пусть многообразие $\sigma^k(x)$ содержит точку $x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что $\sigma^1(x) \subset \sigma^2(x) \subset \ldots \subset \sigma^n(x) = \mathbb{R}^n$. Соотношения (1) показывают, что каждое интегральное многообразие σ^k вморожено в фазовый поток системы (3) (когда $j = n$). Таким образом, интегрируемая в квадратурах система (3) (когда $j = n$) допускает флаг вмороженных интегрируемых распределений.

2. Доказательство теоремы 1 основано на индуктивном применении теоремы о выпрямлении векторного поля. Пусть $v_j^1, \ldots, v_j^n$ – компоненты поля v_j. Так как (согласно предположениям) векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы, то $v_j \neq 0$ всюду в $\mathbb{R}^n$. Поэтому в малой окрестности каждой точки $\mathbb{R}^n$ можно так выбрать локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$, что поле v_1 имеет компоненты $1, 0, \ldots, 0$. Из соотношения (1_1) вытекает, что в этих координатах компоненты $v_j^2, \ldots, v_j^n$ не зависят от x_1 и $v_j^1 = c_{1,j}^1 x_1 + \tilde{v}_j^1(x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим теперь $n-1$ векторных полей $\tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n$ в $\mathbb{R}^{n-1} = \{x_2, \ldots, x_n\}$ с компонентами $\tilde{v}_j = (v_j^2, \ldots, v_j^n)$. Их коммутаторы удовлетворяют соотношениям (1), в которых надо положить $c_{2,j}^1 = \ldots = c_{n,j}^1 = 0$. Снова применим теорему о выпрямлении к полю $\tilde{v}_2$. В некоторых локальных координатах (обозначим их снова $x_2, \ldots, x_n$) его компоненты имеют вид $1, 0, \ldots, 0$. Из соотношений $[\tilde{v}_2, \tilde{v}_j] = c_{2,j}^2 \tilde{v}_2$ вытекает, что $v_j^3, \ldots, v_j^n$ не зависят от x_2 (и от x_1 тоже), а $v_j^2 = c_{2,j}^2 x_2 + \tilde{v}_j^2(x_3, \ldots, x_n)$ и т.д.

В результате в новых локальных координатах система (3) принимает следующий вид:

$$\dot{x}_1 = c_{1,j}^1 x_1 + \tilde{v}_j^1(x_2, \ldots, x_n), \quad \dot{x}_2 = c_{2,j}^2 x_2 + \tilde{v}_j^2(x_3, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \dot{x}_n = v_j^n(x_n). \tag{6}$$

Эта система легко интегрируется в явном виде. Действительно, решения последнего уравнения определяются из обращения формулы

$$t = \int \frac{dx_n}{v_j^n},$$

а остальные уравнения системы (6) (если идти снизу вверх) принимают вид $\dot{x} = \lambda x + f(t)$, $\lambda = \mathrm{const}$, и интегрируются в квадратурах.

Нам осталось показать, что выпрямление векторного поля v_1 (а также полей $\tilde{v}_2, \ldots$) осуществляется явно с использованием квадратур. Действительно, поле v_1 удовлетворяет классической теореме Ли о точном интегрировании, причем это утверждение доказывается явным предъявлением $n-1$ независимых первых интегралов (см., например, [3]). Однако если эти интегралы известны, то выпрямление траекторий далее осуществляется конструктивно с помощью простых замен переменных. Возможность выпрямления полей $\tilde{v}_2, \ldots$ (определенных в $\mathbb{R}^{n-1}, \ldots$) доказывается аналогично, поскольку каждое из них также удовлетворяет теореме Ли.

3. Теорему 1 можно применить к гамильтоновым системам, что приводит к обобщению теоремы Лиувилля о полной интегрируемости. Пусть $\mathbb{R}^{2n} = \{p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\}$ – фазовое пространство, $\{\,,\,\}$ – стандартная скобка Пуассона. Предположим, что в $\mathbb{R}^{2n}$ заданы n гладких функций

$$F_1, \ldots, F_n, \tag{7}$$

градиенты которых независимы во всех точках пространства $\mathbb{R}^{2n}$ (или в некоторой его подобласти). Предположим, что линейные комбинации функций (7) порождают n-мерную разрешимую алгебру Ли относительно операции коммутирования $\{\,,\,\}$:

$$\{F_1, F_j\} = c_{1,j}^1 F_1, \quad \{F_2, F_j\} = c_{2,j}^1 F_1 + c_{2,j}^2 F_2, \ldots, \quad \{F_n, F_j\} = c_{n,j}^1 F_1 + c_{n,j}^2 F_2 + \ldots + c_{n,j}^n F_n.$$

Пусть $M_c = \{p, q : F_1(p,q) = c_1, \ldots, F_n(p,q) = c_n\}$ – n-мерное интегральное многообразие в $\mathbb{R}^{2n}$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$.

Теорема 2. *Если*

$$c_{1,j}^1 c_1 = 0, \quad c_{2,j}^1 c_1 + c_{2,j}^2 c_2 = 0, \ldots, \quad c_{n,j}^1 c_1 + c_{n,j}^2 c_2 + \ldots + c_{n,j}^n c_n = 0 \tag{8}$$

для всех j, то

1) M_c – инвариантное многообразие для гамильтоновых систем с гамильтонианами $F_1, \ldots, F_n$;

2) траектории каждой из этих гамильтоновых систем на M_c находятся с помощью квадратур.

Если алгебра интегралов коммутативна ($c_{i,j}^k = 0$), то наборы констант $c_1, \ldots, c_n$ могут быть произвольными. В этом случае теорема 2 переходит в классическую теорему Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем с полным набором независимых первых интегралов.

В работе [5] теорема 2 доказана в частном случае, когда в качестве гамильтониана выбирается функция F_1. В общем случае доказательство аналогично. Из условий (8) вытекает, что попарные скобки Пуассона $\{F_i, F_j\}$ обращаются в нуль на M_c. Следовательно, независимые гамильтоновы поля $V_1, \ldots V_n$, порождаемые функциями Гамильтона $F_1, \ldots, F_n$, a) касаются M_c, b) в точках M_c удовлетворяют коммутационному соотношению (1).

Остается применить к этим полям локальную теорему 1, вводя локальные координаты на M_c, что и требовалось.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-2001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли. М.; Л., 1940.
2. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.
3. *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995.
4. *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. М., 1959.
5. *Козлов В.В., Колесников Н.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. 1979. № 6. С. 88–91.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
18.11.2004 г.