Математические заметки

том 78 выпуск 3 сентябрь 2005

УДК 519.21

ВЕСОВЫЕ СРЕДНИЕ, СТРОГАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ И РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В. В. Козлов

Получено усиление известной теоремы Окстоби для строго эргодических преобразований, когда привычная сходимость по Чезаро заменяется более слабой сходимостью по Риссу или Вороному с монотонно возрастающими или убывающими весовыми коэффициентами. Этот общий результат позволяет, в частности, усилить классическую теорему Вейля о равномерном распределении дробных долей значений многочлена с иррациональным коэффициентом.

Библиография: 18 названий.

1. Определения. Пусть s_n, $n \geqslant 0$, – числовая последовательность. Мы будем рассматривать весовые средние следующего вида:

$$r_n = \frac{p_0 s_0 + \dots + p_n s_n}{p_0 + \dots + p_n}, \qquad w_n = \frac{p_0 s_n + \dots + p_n s_0}{p_0 + \dots + p_n},$$

где $p_0 > 0$, $p_n \geqslant 0$ и $\sum p_n = \infty$. Числа p_n будем называть *весовыми коэффициентами* или просто *весами*.

С последовательностью r_n связан *метод* суммирования *Рисса*: если $r_n \to s$, то по определению

$$s_n \to s \qquad (R, p_n).$$

Этот метод *регулярен*: если $s_n \to s$, то $r_n \to s$. По теореме Чезаро [1, теорема 14], если $p_{n+1} \geqslant p_n$ и $\sum p_n = \infty$, то метод Чезаро (когда все веса равны между собой) *включает* метод Рисса (R, p_n). Если весовые коэффициенты p_n растут экспоненциально быстро, то (R, p_n)-метод эквивалентен обычной сходимости [1, теорема 15]. Чтобы метод Рисса (R, p_n) суммировал хотя бы некоторые расходящиеся последовательности, будем предполагать, что

$$\frac{p_n}{p_0 + \dots + p_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.1}$$

С последовательностью w_n связан *метод* суммирования *Вороного*: если $w_n \to s$, то по определению

$$s_n \to s \qquad (W, p_n).$$

Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ”, № НШ-136.2003.1.

Условие (1.1) – это критерий регулярности метода Вороного. Любые два регулярных метода Вороного *совместны*: если $s_n \to s\ (W,p_n)$ и $s_n \to s'\ (W,p'_n)$, то $s = s'$. По теореме Харди [1, теорема 23] если выполнено (1.1), последовательность весовых коэффициентов p_n не возрастает и

$$p_0 = 1, \quad p_n > 0, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \frac{p_n}{p_{n-1}}, \qquad n > 0,$$

то метод Чезаро также включает метод Вороного (W,p_n).

В эргодической теории обычно используют сходимость по Чезаро. В связи со сказанным выше возникает вопрос о том, можно ли в этой ситуации заменить метод Чезаро более слабым методом Рисса или Вороного? При положительном ответе мы бы получили более сильный вариант эргодических теорем.

В работе [2] указаны условия на линейные методы суммирования общего вида, при которых справедлива обобщенная *статистическая* эргодическая теорема. Они заведомо выполнены для методов Рисса и Вороного с монотонной последовательностью весовых коэффициентов (см. [3], где, в частности, дано простое доказательство статистической эргодической теоремы для монотонного случая).

С индивидуальной эргодической теоремой дело обстоит намного сложнее. В работе [4] теорема Биркгофа–Хинчина обобщена на случай средних Рисса, причем все $p_n \leqslant 1$ и p_n стремится к конечному пределу. Более простое доказательство указано в [5]. Однако (с точки зрения теории суммирования по Риссу) этот случай не представляет особого интереса: если $\lim p_n \neq 0$, то (R,p_n) эквивалентен методу Чезаро, если же p_n стремится к нулю *монотонно*, то (R,p_n) заведомо включает метод Чезаро. В работе [3] рассмотрена задача об усилении индивидуальной эргодической теоремы для преобразования Бернулли $x \to \{2x\}$ с использованием метода Рисса с монотонно возрастающими весами. Эта задача тесно связана с усиленными вариантами закона больших чисел. С помощью закона повторного логарифма Хинчина–Колмогорова показано, что сходимость по Чезаро можно заменить (R,p_n)-сходимостью, если p_n возрастают как $\exp[n/(\ln n)^\alpha]$, $\alpha > 1$. Не известно, справедлив ли этот результат при $\alpha = 1$.

В настоящей работе исследуется более простая задача об усреднении для *строго эргодических* преобразований. Пусть M – компактное метрическое пространство, T – гомеоморфизм M. По теореме Крылова–Боголюбова T сохраняет некоторую борелевскую меру на M. Если нормированная *инвариантная* относительно T борелевская мера единственна, то непрерывное преобразование T называется *строго эргодическим.*

Ясно, что строго эргодический гомеоморфизм T эргодичен по отношению к своей единственной инвариантной борелевской мере μ. Однако далеко не каждое непрерывное эргодическое преобразование будет строго эргодическим. Например, у строгого эргодического преобразования нет периодических точек. В противном случае имеется дополнительная инвариантная борелевская мера, сосредоточенная на периодической траектории гомеоморфизма T.

Укажем характерное свойство строгого эргодического преобразования (теорема Окстоби [6]): для любой непрерывной функции $f\colon M \to \mathbb{R}$

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f\,d\mu \qquad (C). \tag{1.2}$$

Символ $\rightrightarrows$ обозначает равномерную сходимость. Ввиду обратимости преобразования T соотношение (1.2) справедливо и при $n \to -\infty$.

Например, пусть T – гомеоморфизм окружности $M = \{x \bmod 2\pi\}$, сохраняющий ориентацию. Ясно, что $Tx = x + f(x)$, где f – непрерывная 2π-периодическая функция. Как показал Пуанкаре, для всех x

$$f(T^n x) \longrightarrow 2\pi\lambda \qquad (C). \tag{1.3}$$

Число λ называется *числом вращения* гомеоморфизма T. Если T не имеет периодических точек, то оно строго эргодическое (см., например, [7]). В этом случае согласно (1.2)

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_M f\,d\mu.$$

Соотношение (1.2) можно распространить на более широкий класс функций. Будем говорить, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ является *$\mathscr{R}$-интегрируемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся две непрерывные функции f_1 и f_2 такие, что

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) \qquad \text{для всех} \qquad x \in M, \tag{1.4}$$

$$\int_M (f_2 - f_1)\,d\mu < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Очевидно, что $\mathscr{R}$-интегрируемая функция ограничена и все непрерывные функции $\mathscr{R}$-интегрируемы.

Интеграл $\mathscr{R}$-интегрируемой функции определяется следующим естественным образом. Рассмотрим последовательность ε_n, стремящуюся к нулю. Соответствующие последовательности непрерывных функций, удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5), обозначим $f_1^{(n)}$ и $f_2^{(n)}$. Легко показать, что пределы последовательностей интегралов от $f_1^{(n)}$ и $f_2^{(n)}$ при $n \to \infty$ существуют и совпадают; это число будем называть *$\mathscr{R}$-интегралом* f по борелевской мере μ и обозначать через $\int_M f\,d\mu$. Нетрудно убедиться в корректности определения $\mathscr{R}$-интеграла: оно не зависит от выбора последовательностей $\varepsilon_n, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$.

Пусть, например, M является многомерным тором $\mathbb{T}^k$, а μ – стандартная борелевская мера на $\mathbb{T}^k$. В этом случае класс $\mathscr{R}$-интегрируемых функций будет совпадать с классом функций, интегрируемых по Риману.

Теорему Окстоби можно слегка обобщить.

Теорема 1. *Преобразование T строго эргодическое тогда и только тогда, когда для любой $\mathscr{R}$-интегрируемой функции f*

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f\,d\mu \qquad (C).$$

Подмножество $D \subset M$ будем называть *$\mathscr{R}$-измеримым*, если его характеристическая функция $f = \mathbf{1}_D$ будет $\mathscr{R}$-интегрируемой. Положим

$$\operatorname{mes} D = \int_M \mathbf{1}_D\,d\mu.$$

Ясно, что $\operatorname{mes} M = 1$ ввиду предположения о нормированности меры μ.

В качестве функции f из теоремы 1 можно взять характеристическую функцию *любой* $\mathscr{R}$-измеримой области D. Введем последовательность s_n, $n \geqslant 0$, по следующему правилу: $s_n = 1$, если $x_k = T^k x \in D$, и $s_n = 0$ в противном случае. Пусть $\nu(n) = \sum_0^n s_k$. Тогда для строго эргодического преобразования будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{n} = \operatorname{mes} D.$$

Таким образом, траектория x_k, $k \geqslant 0$, любой точки $x \in M$ проводит в области D время, пропорциональное в среднем мере этой области. Это – общее определение *равномерно распределенной* последовательности *по Вейлю* (см., например, [8]).

Если только что введенная последовательность s_k сходится к $\operatorname{mes} D$ в смысле (R,p_n)-сходимости при любом выборе $\mathscr{R}$-измеримой области D, то последовательность точек $x_k \in M$, $k \geqslant 0$, естественно назвать (R,p_n)-*равномерно распределенной* (кратко (R,p_n)-р.р.). Аналогично вводятся (W,p_n)-равномерно распределенные последовательности.

2. Теоремы. Сначала покажем, как можно усилить теорему Окстоби с использованием методов суммирования Рисса и Вороного, *включенных* в метод Чезаро.

Теорема 2. *Пусть T – строго эргодический гомеоморфизм компактного метрического пространства M и f – $\mathscr{R}$-интегрируемая функция на M. Тогда*

а) *если $q_{n+1} \leqslant q_n$ и $\sum q_n = \infty$, то*

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f\,d\mu \qquad (W, q_n); \tag{2.1}$$

б) *если $p_{n+1} \geqslant p_n$ и выполнено* (1.1), *то*

$$f(T^n x) \rightrightarrows \int_M f\,d\mu \qquad (R, p_n). \tag{2.2}$$

Пусть, например, T – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности без периодических точек. Тогда предельное соотношение (1.3) можно усилить, заменяя метод Чезаро сколь угодно слабыми методами Рисса и Вороного. В [9] этот факт установлен в общем случае, когда у гомеоморфизма T могут быть периодические точки.

В качестве еще одного примера рассмотрим *сложный косой сдвиг* на k-мерном торе $\mathbb{T}^k = \{x_1, \dots, x_k \bmod 1\}$, задаваемый формулой

$$Tx = ((x_1+\alpha) \bmod 1, (x_2 + p_{2,1}x_1) \bmod 1, \dots, (x_k + p_{k,1}x_1, \dots, p_{k,k-1}x_{k-1}) \bmod 1), \tag{2.3}$$

где α, $p_{i,j}$ – вещественные числа. Это преобразование, очевидно, сохраняет стандартную меру на $\mathbb{T}^k$ (меру Хаара на $\mathbb{T}^k$ как на коммутативной группе Ли). Как показано в [7], если α иррационально, а $p_{j,j-1} \neq 0$ для всех $2 \leqslant j \leqslant k$, то преобразование (2.3) строго эргодично. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathbb{T}^k$ ее траектория (последовательность точек $T^n x$, $n \geqslant 0$) равномерно распределена по Вейлю.

Пусть $\pi_j \colon \mathbb{T}^k \to \{x_j \bmod 1\}$ – естественная проекция k-мерного тора на окружность:

$$\pi_j(x_1, \dots, x_k) = x_j.$$

Ясно, что каждая траектория $T^n x$, $n \geqslant 0$, при проектировании π_j переходит в последовательность точек, равномерно распределенную по $\mathrm{mod}\, 1$ (в смысле классического определения). Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве f взять функции, периодически зависящие лишь от одной переменной x_j.

Положим теперь $x = 0$. Можно доказать (см. [7], [10]), что

$$\pi_k(T^n x)\big|_{x=0} = \{P(n)\}, \tag{2.4}$$

где $P(z)$ – многочлен от z степени k, причем коэффициент при z^k иррационален, если α иррационально. Верно и обратное утверждение: для любого многочлена P степени k с иррациональным коэффициентом при старшей степени найдется сложный косой сдвиг k-мерного тора вида (2.3), у которого число α иррационально, $p_{j,j-1} \neq 0$ и справедлива формула (2.4). Отсюда (по Фюрстенбергу [7]) вытекает замечательный результат Вейля о равномерном распределении дробных частей многочлена со старшим иррациональным коэффициентом. Первоначальное доказательство Вейля основано на совершенно других идеях (см. [11]). Общий случай, когда имеется иррациональный коэффициент при z^k, $k \geqslant 1$, легко сводится к этому случаю.

Используя теорему 2, редукцию Фюрстенберга и условие строгой эргодичности косого сдвига (2.3), приходим к следующему усилению теоремы Вейля.

Теорема 3. *Пусть $P(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$ – многочлен, у которого один из коэффициентов $a_0, \dots, a_{k-1}$ – иррациональное число. Тогда*

а) *если $q_{n+1} \leqslant q_n$ и $\sum q_n = \infty$, то последовательность $\{P(n)\}$ будет (W, q_n)-р.р.;*

б) *если $p_{n+1} \geqslant p_n$ и выполнено (1.1), то последовательность $\{P(n)\}$ будет (R, p_n)-р.р.*

Замечание. Г. Вейль привел обобщение своей теоремы о равномерном распределении дробных частей многочлена с использованием метода Рисса (R, p_n), у которого весовые коэффициенты p_n либо монотонно убывают, либо монотонно возрастают как степени n [11, теорема 10]. Однако, этот результат ничего нового не дает, поскольку в первом случае (R, p_n)-метод включает метод Чезаро, а во втором – (R, p_n)-метод эквивалентен методу Чезаро.

Используя обобщенный критерий Вейля равномерного распределения (см. [8]), получаем

Следствие. *При указанных в теореме 3 предположениях относительно многочлена $P(z)$ и весовых коэффициентов*

$$e^{2\pi i P(n)} \to 0 \quad (W, q_n), \qquad e^{2\pi i P(n)} \to 0 \quad (R, p_n). \tag{2.5}$$

Было бы интересным найти прямые доказательства этих предельных соотношений. В непрерывном случае они доказываются достаточно просто [12]. Для многочлена первой степени соотношения (2.5) фактически содержатся в работах [13], [14].

В заключение этого пункта дополним теорему Окстоби одним утверждением, касающемся поведения суммы

$$\sigma_n(x) = f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x), \qquad x \in M. \tag{2.6}$$

Теорема 4. *Пусть T – строго эргодический гомеоморфизм компактного метрического пространства M и f – непрерывная функция на M. Тогда найдется точка x_+ (соответственно x_-) на M такая, что*

$$\sigma_n(x_+) - n\int_M f\,d\mu \geqslant 0 \qquad \left(\text{соответственно}\quad \sigma_n(x_-) - n\int_M f\,d\mu \leqslant 0\right)$$

для всех целых n.

Это утверждение – обобщение одной старой теоремы Боля об интегралах квазипериодических функций [15]. Задача, рассмотренная Болем, очевидно, сводится к анализу эргодических сдвигов многомерного тора. Боль предполагал дополнительно, что суммы (2.6) неограничены как функции от n. Однако в [16] показано, что это условие является лишним.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда*

а) *если $q_{k+1} \geqslant q_k$, то*

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_k f(T^{n-k}x_\pm) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_k\right)\int_M f\,d\mu \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

для всех n;

б) *если $p_{k+1} \leqslant p_k$, то*

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k f(T^k x_\pm) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k\right)\int_M f\,d\mu \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \tag{2.7}$$

для всех n.

Докажем, например, (2.7). Согласно преобразованию Абеля и теореме 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} p_k f(T^k x_\pm) &= (p_0 - p_1)\sigma_1(x_+) + \cdots + (p_{n-2} - p_{n-1})\sigma_{n-1}(x_+) + p_{n-1}\sigma_n(x_+)\\ &\geqslant [(p_0 - p_1) + \cdots + (n-1)(p_{n-2} - p_{n-1}) + np_{n-1}]\int_M f\,d\mu\\ &= (p_0 + \cdots + p_{n-1})\int_M f\,d\mu,\end{aligned}$$

что и требовалось.

С другой стороны, если непрерывная функция f не постоянна, то для почти всех $x \in M$ разность

$$\sigma_n(x) - n\int f\,d\mu \tag{2.8}$$

бесконечно много раз меняет знак при $n \to \infty$. Это есть следствие одного общего результата, установленного в работе [17] для общих эргодических преобразований. Интересно отметить, что множество точек $x \in M$, для которых разность (2.8) меняет знак лишь конечное число раз, может оказаться всюду плотным в M. Соответствующий пример для эргодического поворота окружности указан в [16]. В этом примере f – непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция.

Теорема об осцилляциях разности (2.8) обобщена в работе [18] для средних Рисса (Вороного) с неубывающими (невозрастающими) весами. Непрерывный аналог этого результата получен ранее в [12].

3. Доказательства. Сначала докажем теорему 2 для непрерывных функций. Воспользуемся следующим известным результатом: функции вида

$$f(x) = g(Tx) - g(x), \tag{3.1}$$

где g – непрерывная функция на M, всюду плотны (в метрике равномерной сходимости) в линейном пространстве непрерывных функций с нулевым средним, т.е.

$$\int_M f\,d\mu = 0$$

(см., например, [10]). Для определенности далее рассмотрим средние Рисса. После подстановки (3.1) ввиду монотонности весовых коэффициентов будем иметь

$$\frac{\left|\sum_0^n p_k f(T^k x)\right|}{\sum_0^n p_k} = \frac{\left|\sum_0^n p_k (g(T^{k+1}x) - g(T^k x))\right|}{\sum_0^n p_k} \leqslant \frac{2p_n\|g\|}{\sum_0^n p_k}, \tag{3.2}$$

где $\|g\| = \max|g(x)|$ – норма в пространстве непрерывных функций. Ясно, что правая часть (3.2) равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$ согласно условию (1.1).

Далее, если $f = \mathrm{const}$, то (2.2), очевидно, выполнено. Вычитая из произвольной непрерывной функции f ее среднее значение по мере μ, аппроксимируем ее функциями вида (3.1): для заданного $\varepsilon > 0$ найдем непрерывную функцию $f_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(Tx) - g_\varepsilon(x)$ такую, что

$$\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Поэтому

$$\left\|\frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k}\right\| = \left\|\frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k} - \frac{\sum_0^n p_k f_\varepsilon(T^k x)}{\sum_0^n p_k}\right\| + \left\|\frac{\sum_0^n p_k f_\varepsilon(T^k x)}{\sum_0^n p_k}\right\|. \tag{3.4}$$

Первое слагаемое справа, очевидно, меньше ε ввиду неравенства (3.3). Согласно уже доказанному, второе слагаемое также не превосходит ε при $n \geqslant N(\varepsilon)$. Следовательно, при $n \geqslant N(\varepsilon)$ правая часть (3.4) не превосходит 2ε для всех $x \in M$.

Пусть теперь функция f $\mathscr{R}$-интегрируема. Тогда согласно (1.4) для всех n и всех x

$$\frac{\sum_0^n p_k f_1(T^k x)}{\sum_0^n p_k} \leqslant \frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k} \leqslant \frac{\sum_0^n p_k f_2(T^k x)}{\sum_0^n p_k}.$$

Согласно уже доказанному левая и правая части этого неравенства отличаются от $\bar f_1$ и $\bar f_2$ не более, чем на ε при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$; здесь и далее черта для краткости обозначает интеграл по мере μ по всему M.

Далее, $\bar f_1 \leqslant \bar f \leqslant \bar f_2$ и $\bar f_2 - \bar f_1 \leqslant \varepsilon$ (согласно (1.5)). Поэтому $\bar f_2 - \bar f \leqslant \varepsilon$, $\bar f - \bar f_1 \leqslant \varepsilon$. Следовательно, при $n \geqslant n_0$

$$\left|\frac{\sum_0^n p_k f(T^k x)}{\sum_0^n p_k} - \int_M f\,d\mu\right| \leqslant 3\varepsilon,$$

что и требовалось.

Эти рассуждения использовали круг идей, лежащих в основе известного доказательства Рисса статистической эргодической теоремы и доказательства Вейля равномерного распределения дробных частей значений линейной функции. Укажем еще один путь доказательства теоремы 2, намеченный в краткой заметке [9].

Докажем, например, соотношение (2.1):

$$\frac{q_n f(x) + \cdots + q_0 f(T^n x)}{q_0 + \cdots + q_n} \rightrightarrows \int_M f\,d\mu. \tag{3.5}$$

Положим $T^n x = z$ или, что то же самое, $x = T^{-n} z$. Тогда (3.5) принимает вид

$$f(T^{-n} z) \rightrightarrows \int_M f\,d\mu \qquad (R, q_n), \tag{3.6}$$

Так как q_n не возрастают и $\sum q_n = \infty$, то (R, q_n)-метод включает метод Чезаро. Поэтому (3.6) является следствием теоремы Окстоби (с учетом того, что T^{-1} также строго эргодическое преобразование M).

Однако z зависит не только от x, но и от n. Таким образом, простой ссылки на теорему о включении методов Рисса недостаточно. Надо доказать больше: если последовательность непрерывных функций $s_n(x)$, $x \in M$, *равномерно* сходится к $s(x)$ по Чезаро, то $s_n(x) \rightrightarrows s(x)\ (R, q_n)$.

Докажем это в интересующем нас случае, когда $s_n(x) = f(T^n x)$. Пусть

$$t_m = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_m}{m}, \qquad u_m = \frac{q_0 s_0 + q_1 s_1 + \cdots + q_m s_m}{q_0 + q_1 + \cdots + q_m}. \tag{3.7}$$

Тогда

$$u_m = \sum c_{m,n} t_n, \tag{3.8}$$

где

$$c_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{n(q_n - q_{n+1})}{\sum_0^m q_j}, & \text{если } n < m, \\ \dfrac{m q_m}{\sum_0^m q_j}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n > m. \end{cases}$$

Так как $\sum_0^m q_j \to 0$, то

$$c_{m,n} \to 0 \tag{3.9}$$

при $m \to \infty$ и фиксированном n. Далее, $c_{m,n} \geqslant 0$ (поскольку веса q_n не возрастают) и

$$\sum_{n \geqslant 0} c_{m,n} = 1. \tag{3.10}$$

Для доказательства (3.10) достаточно в (3.7) положить $s_j = 1$. Тогда $t_m = 1$ и $u_m = 1$; подставляя эти значения в (3.8), получим (3.10).

Пусть $a = \max_M |f(x)|$. Тогда $|t_m| \leqslant a$ для всех $m \geqslant 0$. Нам уже известно, что $t_m(x) \rightrightarrows s(x)$ и что $u_m(x) \to s(x)$ для каждого $x \in M$. Вычитая из обеих частей (3.8) $s(x)$ и используя (3.10), приходим к выводу, что нам достаточно доказать утверждение в случае, когда $s(x) \equiv 0$.

Так как $t_n(x) \rightrightarrows 0$, то $|t_n(x) < \varepsilon|$ при $n > N(\varepsilon)$. Оценим правую часть (3.8):

$$|u_m| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} c_{m,n}t_n\right| + \left|\sum_{n=N}^{\infty} c_{m,n}t_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} c_{m,n}\right|a + \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\right|\varepsilon = \left|\sum_{n=0}^{N} c_{m,n}\right|a + \varepsilon.$$

Согласно (3.9) при уже выбранном значении ε первая сумма справа (обозначим ее через σ) стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, $|\sigma| < \varepsilon$ для всех $m \geqslant M(\varepsilon, N) = M(\varepsilon)$. Поэтому при $m \geqslant M(\varepsilon)$

$$|t_m(x)| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось.

Наконец, докажем теорему 4. Без ущерба общности будем рассматривать непрерывные функции с нулевым средним значением. Пусть сначала функция f имеет вид (3.1). Тогда, очевидно,

$$\sigma_n(x) = g(x) - g(T^n x).$$

Если x_+ – точка максимума непрерывной функции g на компакте M, то $\sigma_n(x_+) \geqslant 0$ для всех целых n. В общем случае найдется последовательность непрерывных функций $f_m\colon M \to \mathbb{R}$, $m \geqslant 1$, вида (3.1), равномерно сходящаяся к функции f. Согласно уже доказанному, найдутся точки $x_m \in M$ такие, что

$$\sigma_n^m(x_m) = f_m(x_m) + \dots + f_m(T^{n-1}x_m) \geqslant 0$$

для всех n. Ввиду компактности M из последовательности x_m можно выделить подпоследовательность x_{m_k}, сходящуюся к некоторой точке x_+. Для любого фиксированного n

$$0 \leqslant \sigma_n^{m_k}(x_{m_k}) = \sum_{j=0}^{n-1}\Big(f_{m_k}(T^j x_{m_k}) - f(T^j x_{m_k})\Big) + \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x_{m_k})$$
$$\to \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x_+) = \sigma_n(x_+)$$

при $k \to \infty$, что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
[2] Hanson D. L., Pledger G. On the mean ergodic theorem for weighted averages // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 1969. V. 13. №13. P. 141–149.
[3] Козлов В. В. Суммирование расходящихся рядов и эргодические теоремы // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 2002. Т. 22. С. 142–168.
[4] Baxter G. An ergodic theorem with weighted averages // J. Math. Mech. 1964. V. 13. №3. P. 481–488.
[5] Chacon R. V. Ordinary means imply recurrent means // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 796–797.

[6] Oxtoby J. C. Ergodic sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1952. V. 58. №2. P. 116–136.
[7] Furstenberg H. Strict ergodicity and transformation of the torus // Amer. J. Math. 1961. V. 83. №4. P. 573–601.
[8] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
[9] Козлов В. В., Мадсен Т. Числа вращения Пуанкаре и средние Рисса и Вороного // Матем. заметки. 2003. Т. 74. №2. С. 314–315.
[10] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
[11] Вейль Г. О равномерном распределении чисел по модулю один // Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 58–93.
[12] Козлов В. В. О равномерном распределении на торе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2004. №2. С. 22–29.
[13] Cigler J. Methods of summability and uniform distribution mod 1 // Compos. Math. 1964. V. 16. P. 44–51.
[14] Doroidar A. F. A note on the generalized uniform distribution (mod 1) // J. Natur. Sci. Math. 1971. V. 11. P. 185–189.
[15] Bohl P. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie // J. Reine Angew. Math. 1906. V. 131. №4. P. 268–321.
[16] Козлов В. В. Об интегралах квазипериодических функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1978. №1. С. 106–115.
[17] Halász G. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976. V. 28. №3–4. P. 289–395.
[18] Сорокин А. А. Об осцилляциях средних Рисса и Вороного // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2005. №2. С. 13–17.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
31.03.2005