

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51+531.36

О СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2005 г. В. В. Козлов, А. А. Карапетян

1. **Степень устойчивости и индексы инерции.** Рассмотрим линейную гамильтонову систему в $\mathbb{R}^{2n} = \{x\}$ со стандартной симплектической структурой. Пусть $x = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ – канонические переменные (набор импульсов и координат), а гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(Bx, x), \quad (1)$$

где B – симметрический линейный оператор. Тогда канонические уравнения записываются в виде

$$\dot{x} = Ax, \quad (2)$$

где

$$A = IB, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

В переменных p, q уравнения (2) принимают привычный вид уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Пусть A – невырожденный оператор: $|A| \neq 0$ (это эквивалентно условию $|B| \neq 0$). Тогда собственные числа оператора A могут быть трех типов: вещественные пары $\pm a$, чисто мнимые пары $\pm ib$ и четверки $\pm a \pm ib$.

Как показано в работе [1], линейная система (2) с невырожденным оператором A , допускающая интеграл в виде невырожденной квадратичной формы (1), всегда приводится к системе уравнений Гамильтона. Поэтому развиваемая ниже теория применима к этому (формально, более общему) случаю.

Степень неустойчивости u системы (2) будем называть количество корней характеристического уравнения оператора A , лежащих в правой полуплоскости, считая их кратности, а степень устойчивости s – количество пар чисто мнимых корней характеристического уравнения оператора A , считая их кратности. Обозначим через i^+ и i^- положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы (1).

Согласно теореме Томсона [2],

$$u \equiv i^- \pmod{2}. \quad (3)$$

В частности, если индекс инерции i^- (или i^+) нечетный, то число u также нечетно. Следовательно, в этом случае характеристический многочлен оператора A обязательно имеет положительный вещественный корень, и поэтому равновесие $x = 0$ неустойчиво. Более точно, классическая теорема Томсона доказана для линейных механических систем, на которые действуют дополнительные гироскопические и диссипативные силы. В системах общего вида (когда $\dot{H} \leq 0$) сравнение (3) доказано в работе [3]. Если $\dot{H} = 0$, то теорема Томсона эквивалентна следующему утверждению о степени устойчивости: s четно тогда и только тогда, когда

$$i^+ \equiv i^- \pmod{4}. \quad (4)$$

Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$|i^+ - i^-| \leq 2l,$$

где l – количество пар чисто мнимых собственных чисел оператора A с жордановыми клетками нечетного порядка.

Следствие. Имеет место неравенство

$$|i^+ - i^-| \leq 2s. \quad (5)$$

Неравенство (5) указано в работе [4] для типичного случая, когда все корни характеристического многочлена простые. Ниже теорема 1 доказывается в общем случае кратных корней с использованием теории Вильямсона вещественных нормальных форм линейных уравнений Гамильтона [5]. Тем же методом легко доказывается и теорема Томсона.

Приведем иллюстративный пример. Пусть $i^- = 1$. Тогда (по теореме Томсона) имеется вещественная пара $\pm a$ собственных значений. При этом, согласно неравенству (5), все остальные собственные значения будут чисто мнимыми. Более того, по теореме 1 в этом случае матрица A приводится к диагональному виду. Такая ситуация является типичной в случае, когда теряется положительная определенность полной энергии H .

2. Доказательство теоремы 1. По теореме Вильямсона пространство \mathbb{R}^{2n} распадается в прямую сумму косоортогональных подпространств, так что форма (1) представляется в виде суммы квадратичных форм (частичных гамильтонианов) на этих подпространствах, при этом

а) вещественной паре $\pm a$ собственных чисел порядка k отвечает частичный гамильтониан

$$H = -a \sum_{j=1}^k p_j q_j + \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1};$$

б) четверке $\pm a \pm ib$ порядка k –

$$H = -a \sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b \sum_{j=1}^k (p_{2j-1} q_{2j} - p_{2j} q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2};$$

в) чисто мнимой паре $\pm ib$ порядка $2k+1$ –

$$H = \pm \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^k (b^2 p_{2j} p_{2k-2j+2} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1} (b^2 p_{2j-1} p_{2k-2j+3} + q_{2j-1} q_{2k-2j+3}) \right] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1};$$

г) чисто мнимой паре $\pm ib$ порядка $2k$ –

$$H = \pm \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^k (b^{-2} q_{2j-1} q_{2k-2j+1} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k-1} (b^2 p_{2j+1} p_{2k-2j+1} + p_{2j+2} p_{2k-2j+2}) \right] - b^2 \sum_{j=1}^k p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=1}^k p_{2j} q_{2j-1}.$$

Найдем сигнатуры каждого из этих гамильтонианов.

В случае а) имеем

$$H = -ap_1 q_1 + \sum_{j=2}^k (p_{j-1} - ap_j) q_j = \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j \tilde{q}_j,$$

где $\tilde{p} = Cp$, $\tilde{q} = q$, а матрица C – двухдиагональная матрица с главной диагональю $(-a, \dots, -a)$ и единичной поддиагональю, $|C| \neq 0$. Отсюда получаем, что паре $\pm a$ порядка k соответствует сигнатура $\underbrace{+\dots+}_k \underbrace{-\dots-}_k$.

Следует, наверное, подчеркнуть, что здесь и далее новые переменные \tilde{p} , \tilde{q} , вообще говоря, не являются каноническими. Однако для вычисления сигнатуры это, конечно, не имеет никакого значения.

В случае b) гамильтониан H принимает вид

$$H = -a \sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b \sum_{j=1}^k (p_{2j-1} q_{2j} - p_{2j} q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2} = \sum_{j=1}^{2k} \tilde{p}_j \tilde{q}_j,$$

в котором $\tilde{p} = Cp$, $\tilde{q} = q$, где

$$C = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -a & -b & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b & -a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b & -a \end{pmatrix}, \quad |C| \neq 0.$$

Отсюда получаем, что четверке $\pm a \pm ib$ порядка k соответствует сигнатура $\underbrace{+\dots+}_{2k} \underbrace{-\dots-}_{2k}$.

В случае c) имеем

$$\begin{aligned} H &= \pm \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^k (b^2 p_{2j} p_{2k-2j+2} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1} (b^2 p_{2j-1} p_{2k-2j+3} + q_{2j-1} q_{2k-2j+3}) \right] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^j (b^2 p_j p_{2k+2-j} + q_j q_{2k+2-j}) - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1} = \\ &= \pm \sum_{j=1}^k (-1)^j (b^2 p_j p_{2k+2-j} + q_j q_{2k+2-j}) \pm \frac{1}{2} (-1)^{k+1} (b^2 p_{k+1}^2 + q_{k+1}^2) - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1} = \\ &= \pm \sum_{j=1}^k p_j ((-1)^j b^2 p_{2k+2-j} \mp q_{j+1}) \pm \sum_{j=k+2}^{2k+1} q_j ((-1)^j q_{2k+2-j} \mp p_{j-1}) \pm \frac{1}{2} (-1)^{k+1} (b^2 p_{k+1}^2 + q_{k+1}^2) = \\ &= \pm \sum_{j=1, j \neq k+1}^{2k+1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j \pm (-1)^{k+1} (\tilde{p}_{k+1}^2 + \tilde{q}_{k+1}^2), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{p}_j = p_j, \quad j = \overline{1, k}, \quad \tilde{p}_{k+1} = 2^{-1/2} q_{k+1}, \quad \tilde{p}_j = (-1)^j q_{2k+2-j} \mp p_{j-1}, \quad j = \overline{k+2, 2k+1};$$

$$\tilde{q}_j = (-1)^j b^2 p_{2k+2-j} \mp q_{j+1}, \quad j = \overline{1, k}, \quad \tilde{q}_{k+1} = 2^{-1/2} b p_{k+1}, \quad \tilde{q}_j = q_j, \quad j = \overline{k+2, 2k+1}.$$

Нетрудно видеть, что матрица перехода невырождена. Следовательно, паре $\pm ib$ порядка $2k+1$ соответствует сигнатура $\underbrace{+\dots+}_{2k+2} \underbrace{-\dots-}_{2k}$ или $\underbrace{+\dots+}_{2k} \underbrace{-\dots-}_{2k+2}$.

d) Наконец, для чисто мнимой пары $\pm ib$ порядка $2k$ рассмотрим два случая. Если $k=2l+1$ (k нечетно), то имеем

$$H = \pm \sum_{j=1}^l (b^{-2} q_{2j-1} q_{4l-2j+3} + q_{2j} q_{4l-2j+4}) \pm \frac{1}{2} (b^{-2} q_{2l+1}^2 + q_{2l+2}^2) \mp$$

$$\begin{aligned} & \mp \sum_{j=1}^l (b^2 p_{2j+1} p_{4l-2j+3} + p_{2j+2} p_{4l-2j+4}) - b^2 \sum_{j=1}^{2l+1} p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=1}^{2l+1} p_{2j} q_{2j-1} = \\ & = \sum_{j=1}^l [q_{2j-1} (p_{2j} \pm b^{-2} q_{4l-2j+3}) + q_{2j} (-b^2 p_{2j-1} \pm q_{4l-2j+4})] + \\ & + q_{2l+1} \left(p_{2l+2} \pm \frac{1}{2} b^{-2} q_{2l+1} \right) + q_{2l+2} \left(-b^2 p_{2l+1} \pm \frac{1}{2} q_{2l+2} \right) \mp \\ & \mp \sum_{j=l+2}^{2l+1} (b^2 p_{2j-1} p_{4l-2j+5} + p_{2j} p_{4l-2j+6}) - b^2 \sum_{j=l+2}^{2l+1} p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=l+2}^{2l+1} p_{2j} q_{2j-1} = \\ & = \sum_{j=1}^l [q_{2j-1} (p_{2j} \pm b^{-2} q_{4l-2j+3}) + q_{2j} (-b^2 p_{2j-1} \pm q_{4l-2j+4})] + \\ & + q_{2l+1} \left(p_{2l+2} \pm \frac{1}{2} b^{-2} q_{2l+1} \right) + q_{2l+2} \left(-b^2 p_{2l+1} \pm \frac{1}{2} q_{2l+2} \right) + \\ & + \sum_{j=l+2}^{2l+1} [p_{2j-1} (\mp b^2 p_{4l-2j+5} - b^2 q_{2j}) + p_{2j} (\mp p_{4l-2j+6} + q_{2j-1})] = \sum_{j=1}^{4l+2} \tilde{p}_j \tilde{q}_j = \sum_{j=1}^{2k} \tilde{p}_j \tilde{q}_j, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{2j-1} &= p_{2j} \pm b^{-2} q_{4l-2j+3}, & \tilde{p}_{2j} &= -b^2 p_{2j-1} \pm q_{4l-2j+4}, & j &= \overline{1, l}, \\ \tilde{p}_{2l+1} &= p_{2l+2} \pm \frac{1}{2} b^{-2} q_{2l+1}, & \tilde{p}_{2l+2} &= -b^2 p_{2l+1} \pm \frac{1}{2} q_{2l+2}, & \tilde{p}_j &= p_j, & j &= \overline{2l+3, 4l+2}; \\ \tilde{q}_j &= q_j, & j &= \overline{1, 2l+2}, \\ \tilde{q}_{2l+2j+1} &= \mp b^2 p_{2l-2j+3} - b^2 q_{2l+2j+2}, & \tilde{q}_{2l+2j+2} &= \mp p_{2l-2j+4} - q_{2l+2j+1}, & j &= \overline{1, l}. \end{aligned}$$

Если же $k = 2l$ (k четно), то имеем

$$\begin{aligned} H &= \pm \sum_{j=1}^l (b^{-2} q_{2j-1} q_{4l-2j+1} + q_{2j} q_{4l-2j+2}) \mp \frac{1}{2} (b^2 p_{2l+1}^2 + p_{2l+2}^2) \mp \\ & \mp \sum_{j=1}^{l-1} (b^2 p_{2j+1} p_{4l-2j+1} + p_{2j+2} q_{4l-2j+2}) - b^2 \sum_{j=1}^{2l} p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=1}^{2l} p_{2j} q_{2j-1} = \\ & = \sum_{j=1}^l [q_{2j-1} (p_{2j} \pm b^{-2} q_{4l-2j+1}) + q_{2j} (-b^2 p_{2j-1} \pm q_{4l-2j+2})] + \\ & + p_{2l+1} \left(\mp \frac{1}{2} b^2 p_{2l+1} - b^2 q_{2l+2} \right) + p_{2l+2} \left(\mp \frac{1}{2} p_{2l+2} + q_{2l+1} \right) \mp \\ & \mp \sum_{j=l+2}^{2l} (b^2 p_{2j-1} p_{4l-2j+3} + p_{2j} p_{4l-2j+4}) - b^2 \sum_{j=l+2}^{2l} p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=l+2}^{2l} p_{2j} q_{2j-1} = \\ & = \sum_{j=1}^l [q_{2j-1} (p_{2j} \pm b^{-2} q_{4l-2j+1}) + q_{2j} (-b^2 p_{2j-1} \pm q_{4l-2j+2})] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ p_{2l+1} \left(\mp \frac{1}{2} b^2 p_{2l+1} - b^2 q_{2l+2} \right) + p_{2l+2} \left(\mp \frac{1}{2} p_{2l+2} + q_{2l+1} \right) + \\
 &= \sum_{j=l+2}^{2l} [p_{2j-1} (\mp b^2 p_{4l-2j+3} - b^2 q_{2j}) + p_{2j} (\mp p_{4l-2j+4} + q_{2j-1})] = \sum_{j=1}^{4l} \tilde{p}_j \tilde{q}_j = \sum_{j=1}^{2k} \tilde{p}_j \tilde{q}_j,
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{p}_{2j-1} = p_{2j} \pm b^{-2} q_{4l-2j+1}, \quad \tilde{p}_{2j} = -b^2 p_{2j-1} \pm q_{4l-2j+2}, \quad j = \overline{1, l}, \quad \tilde{p}_j = p_j, \quad j = \overline{2l+1, 4l};$$

$$\tilde{q}_j = q_j, \quad j = \overline{1, 2l}, \quad \tilde{q}_{2l+1} = \mp \frac{1}{2} b^2 p_{2l+1} - b^2 q_{2l+2}, \quad \tilde{q}_{2l+2} = \mp \frac{1}{2} p_{2l+2} + q_{2l+1},$$

$$\tilde{q}_{2l+2j+1} = \mp b^2 p_{2l-2j+1} - b^2 q_{2l+2j+2}, \quad j = \overline{1, l-1}, \quad \tilde{q}_{2l+2j+2} = \mp p_{2l-2j+2} + q_{2l+2j+1}, \quad j = \overline{1, l-1}.$$

Можно проверить, что в обоих случаях матрица перехода невырождена. Таким образом, получаем, что паре $\pm ib$ порядка $2k$ соответствует сигнатура $\underbrace{+\dots+}_{2k} \underbrace{-\dots-}_{2k}$.

Результаты вычислений представлены в следующей таблице.

Таблица 1

Собств. число	Порядок	Сигнатура
$\pm a$	k	$\underbrace{+\dots+}_k \underbrace{-\dots-}_k$
$\pm a \pm ib$	k	$\underbrace{+\dots+}_{2k} \underbrace{-\dots-}_{2k}$
$\pm ib$	k нечет.	$\underbrace{+\dots+}_{k+1/k-1} \underbrace{-\dots-}_{k-1/k+1}$
$\pm ib$	k чет.	$\underbrace{+\dots+}_k \underbrace{-\dots-}_k$

Пусть l – количество пар чисто мнимых собственных чисел оператора A с нечетными кратностями, k_1, \dots, k_l – кратности этих чисел, причем k_1, \dots, k_{l_1} – кратности собственных чисел, которым соответствуют сигнатуры вида $\underbrace{+\dots+}_{k+1} \underbrace{-\dots-}_{k-1}$, а k_{l_1+1}, \dots, k_l – кратности собственных чисел, которым соответствуют сигнатуры вида $\underbrace{+\dots+}_{k-1} \underbrace{-\dots-}_{k+1}$; m – количество пар

чисто мнимых собственных чисел оператора A с четными кратностями и k'_1, \dots, k'_m – кратности этих чисел. Тогда положительный и отрицательный индексы инерции i^+ и i^- квадратичной формы (1) равны

$$i^\pm = u + \sum_{i=1}^{l_1} (k_i \pm 1) + \sum_{i=l_1+1}^l (k_i \mp 1) + \sum_{i=1}^m k'_i,$$

а степень устойчивости равна $s = \sum_{i=1}^l k_i + \sum_{i=1}^m k'_i$. Очевидно, что степень устойчивости s четна тогда и только тогда, когда l четно. Рассмотрим разность индексов инерции

$$i^+ - i^- = 2l_1 - 2(l - l_1) = 4l_1 - 2l,$$

откуда заключаем, что, во-первых, $|i^+ - i^-| \leq 2l \leq 2s$ (так как $l_1 \leq l \leq s$), таким образом доказана теорема 1, а, во-вторых, $i^+ - i^- \equiv 0 \pmod{4}$ в том и только в том случае, когда l четно. Поскольку $s \equiv l \pmod{2}$, то степень устойчивости s четна тогда и только тогда, когда выполнено (4).

Отметим еще, что из формул для индексов инерции легко вытекает теорема Томсона (3). Действительно, для этого достаточно вспомнить, что целые числа k_i (k'_i) нечетные (четные).

3. Приложение к задаче о гироскопической стабилизации. Рассмотрим уравнение движения механической системы, находящейся под действием гироскопических и потенциальных сил

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + Pz = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

где $\Gamma^t = -\Gamma$, $P^t = P$. Слагаемое $-\Gamma \dot{z}$ называется гироскопической силой, а $-Pz$ – потенциальной силой, действующей на рассматриваемую систему с n степенями свободы. Сигнатура соответствующего гамильтониана (полной энергии $H = (1/2)(\dot{z}, \dot{z}) + (1/2)(Pz, z)$) имеет вид $\underbrace{+ \dots +}_{n+n-u} \underbrace{- \dots -}_u$. Здесь u – степень неустойчивости линейной системы в отсутствие ги-

роскопических сил (u – степень неустойчивости по Пуанкаре – определяется матрицей P), соответственно $n - u$ – степень устойчивости в отсутствие гироскопических сил. Согласно неравенству (5), получаем, что $|i^+ - i^-| = |2n - 2u| \leq 2s$, откуда $n - u \leq s$, где s – степень устойчивости линейной системы, описываемой уравнением (6). Таким образом, приходим к следующему важному утверждению.

Теорема 2. При добавлении гироскопических сил степень устойчивости системы не уменьшается.

Этот результат дополняет классическую теорему Томсона о возможности гироскопической стабилизации системы с четной степенью неустойчивости по Пуанкаре (см. [2]).

Заменим теперь в уравнении (6) матрицу гироскопических сил Γ на $\mu\Gamma$, $\mu \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случай, когда $P < 0$: потенциальная энергия $(1/2)(Pz, z)$ принимает максимальное значение в положении равновесия $z = 0$. Если $|\Gamma| \neq 0$, то при достаточно больших значениях μ равновесие $z = 0$ становится устойчивым [6, 7]. Поскольку матрица Γ кососимметрична, то в этом случае n четно.

Теорема 3. Пусть n нечетно и $\text{rank } \Gamma = n - 1$. Тогда при $\mu \geq \mu_0$ степень неустойчивости системы (6) равна 1.

Так как n нечетно и $P < 0$, то (по теореме Томсона) $u \geq 1$. Теорема 3 утверждает, что для неособых матриц гироскопических сил при достаточно больших значениях параметра μ степень неустойчивости принимает минимально возможное значение $u = 1$.

Доказательство теоремы 3. Кроме интеграла энергии H система (6) допускает интеграл

$$F = \frac{1}{2}(P^{-1}\dot{z}, \dot{z}) - (\Gamma P^{-1}\dot{z}, z) + \frac{1}{2}((E - \Gamma P^{-1}\Gamma)z, z).$$

Здесь E – единичная $n \times n$ -матрица. Заменим Γ на $\mu\Gamma$ и рассмотрим квадратичный интеграл

$$\Phi = 2H - 2F/\mu^{3/2} = (\dot{z}, \dot{z}) + (Pz, z) - \mu^{1/2}(P^{-1}\Gamma z, \Gamma z) + O(\mu^{-1/2}).$$

Прежде всего заметим, что при больших μ эта квадратичная форма невырождена. Действительно, определитель $|\sqrt{\mu}\Gamma P^{-1}\Gamma + P|$ – многочлен относительно $\sqrt{\mu}$, значение которого отлично от нуля при $\mu = 0$. Следовательно, этот определитель не обращается в нуль при $\mu \geq \mu_0$. Далее, согласно предположению, квадратичная форма $-(P^{-1}\Gamma z, \Gamma z)$ неотрицательна и обращается в нуль лишь на одномерном подпространстве $\ker \Gamma$, где форма (Pz, z) отрицательно определена. Значит, при больших значениях μ отрицательный индекс инерции невырожденного квадратичного интеграла Φ равен 1. Воспользуемся теперь следующим результатом работы [1]: линейной заменой переменных систему (6) можно представить в виде линейных уравнений Гамильтона, причем роль гамильтониана будет играть невырожденный квадратичный интеграл Φ . Остается воспользоваться неравенством (5).

Замечание. В работах [8, 9] для гамильтоновой системы вида (6) установлено неравенство

$$u \leq i^-, \quad (7)$$

где i^- – отрицательный индекс инерции невырожденной потенциальной энергии $(1/2)(Pz, z)$. С учетом соотношений $i^+ + i^- = 2n$ и $u + s = n$ неравенство (7) эквивалентно неравенству (5).

В работе [10] содержится уточнение неравенства (7). Оно основано на обобщении теоремы Понтрягина о самосопряженных операторах в пространствах с индефинитной метрикой. Наш подход, применяемый к линейным гамильтоновым системам общего вида, использует теорию Вильямсона нормальных форм.

Авторы благодарны А.А. Шкаликову за обсуждение затронутых в статье вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-01059) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ 136.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В. // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М., 1955.
3. Козлов В.В. // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 14–19.
4. Козлов В.В. // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 371–383.
5. Williamson J. // Amer. J. of Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.
6. Лахаданов В.М. // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.
7. Карпетян А.В. // Теор. i примен. мех. 1994. V. 20. P. 89–93.
8. Wimmer H.K. // Linear Algebra and Appl. 1974. V. 8. P. 337–343.
9. Lancaster P., Tismenetsky M. // Linear Algebra and Appl. 1983. V. 52/53. P. 479–496.
10. Shkalikov A.A. // Operator Theory: Advances and Applications. 1996. V. 87. P. 358–385.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22.03.2004 г.