УДК 510.6

О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НА ТОРЕ

В. В. Козлов

1. Равномерное распределение. Пусть $\mathbb{T}^n$ — n-мерный тор с угловыми координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$, изменяющимися по $\operatorname{mod} 2\pi$. Движение на $\mathbb{T}^n$ — это гладкое отображение $t \mapsto x(t)$. Оно называется *равномерно распределенным* на $\mathbb{T}^n$ (по Вейлю), если для любой измеримой по Жордану области $D \subset \mathbb{T}^n$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\nu_D(T)}{T} = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \mathbb{T}^n},$$

где $\nu_D(T)$ — сумма длин интервалов на отрезке $[0,T]$, когда $x(t) \in D$; $\operatorname{mes} D$ — мера области D ($\operatorname{mes} \mathbb{T}^n = (2\pi)^n$).

Вейль дал следующий критерий равномерного распределения [1]:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T e^{i(m,x(t))} dt = 0$$

для всех целочисленных векторов $m \neq 0$. Он же получил следующий результат (теорема 8 из [1]): если $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — такие n многочленов от t, что $\sum m_j x_j(t) \neq \text{const}$ для всех целых m_j, не равных одновременно нулю, то движение $x_j = x_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, равномерно распределено на $\mathbb{T}^n$.

Пусть, например, $x_j = \omega_j t + x_j^0$, где $\omega_j, x_j^0 = \text{const}$. Такое движение называется условно-периодическим с частотами $(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega$ и начальными фазами $(x_1^0, \ldots, x_n^0) = x_0$. Если частоты *нерезонансны* (несоизмеримы над кольцом целых чисел), то при всех x_0 условно-периодическое движение равномерно распределено на $\mathbb{T}^n$ (теорема Боля–Серпинского–Вейля).

Пусть $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману функция и движение $x(\cdot)$ равномерно распределено. Тогда

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x(t))\, dt \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f\, d^n x\,. \tag{1}$$

Очевидно, справедливо и обратное утверждение (достаточно в качестве f взять характеристическую функцию измеримой области на $\mathbb{T}^n$).

2. Сходимость по Риссу. Кроме сходимости средних арифметических (1) (по Чезаро) можно рассматривать сходимость более общего вида. Пусть $t \mapsto \lambda(t)$ — положительная непрерывная функция, причем

$$\int\limits_0^\infty \lambda(t)\, dt = \infty\,. \tag{2}$$

Будем говорить, что $f(t) \to \overline{f}(R, \lambda)$, если

$$\int\limits_0^T \lambda(t) f(t)\, dt \Big/ \int\limits_0^T \lambda(t)\, dt \to \overline{f}.$$

Это — непрерывный аналог метода суммирования Рисса [2]. Мы укажем основные свойства (R,λ)-метода, не стремясь к законченности и полноте результатов.

Во-первых, (R,λ)-метод *линеен* и *регулярен*. Последнее означает, что если $f(t) \to \overline{f}$ в обычном смысле, то $f(t) \to \overline{f}(R,\lambda)$. Это свойство — прямое следствие правила Лопиталя.

Далее, пусть имеется еще одна функция $\mu(t) > 0$, удовлетворяющая (2). Будем говорить, что (R,λ) *включает* (R,μ), если из сходимости $f(t) \to \overline{f}(R,\mu)$ следует $f(t) \to \overline{f}(R,\lambda)$. Следующее утверждение дает достаточное условие включения.

Теорема 1. *Пусть*

$$\lambda(\tau) \int\limits_0^\tau \mu\, dt \Big/ \mu(\tau) \int\limits_0^\tau \lambda\, dt \to 0 \quad \textit{при } \tau \to \infty \tag{3}$$

и функция

$$\lambda(\tau) \int\limits_0^\tau \mu\, dt \Big/ \mu(\tau) \tag{4}$$

монотонна при $\tau \geqslant \tau_0$. Тогда (R, λ) включает (R, μ).

Пусть функции λ и μ из одного тела Харди и имеют порядок $+\infty$ относительно t:

$$\frac{\ln \lambda(t)}{\ln t} \to +\infty \quad \text{и} \quad \frac{\ln \mu(t)}{\ln t} \to +\infty$$

при $t \to +\infty$. Тогда условие (3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\dot\lambda}{\lambda} \Big/ \frac{\dot\mu}{\mu} \to 0 \qquad \left(\text{или } \frac{(\ln \lambda)^{\cdot}}{(\ln \mu)^{\cdot}} \to 0\right). \tag{5}$$

Здесь и далее точка обозначает производную по t. Если λ и μ принадлежат одному телу Харди, то условие о монотонности функции (4) при достаточно больших значениях τ заведомо выполнено.

Замечание. Пусть $(R, \lambda(n))$ и $(R, \mu(n))$ — два обычных (дискретных) метода Рисса, причем $\sum \lambda(n) = \sum \mu(n) = \infty$. Согласно известной теореме Чезаро (теорема 14 из [2]), если

$$\frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)} \leqslant \frac{\mu(n+1)}{\mu(n)}, \tag{6}$$

то $(R, \lambda(n))$ включает $(R, \mu(n))$. Если (6) представить в эквивалентной форме

$$\frac{\lambda(n+1) - \lambda(n)}{\lambda(n)} \leqslant \frac{\mu(n+1) - \mu(n)}{\mu(n)},$$

то становится ясным (ср. с (5)), что теорема 1 — это некоторый аналог теоремы Чезаро. В отличие от теоремы 14 из [2] теорема 1 дает условие строгого включения непрерывных методов суммирования Рисса.

Доказательство теоремы 1. Положим

$$g_\lambda(\tau) = \int\limits_0^\tau \lambda f\, dt \Big/ \int\limits_0^\tau \lambda\, dt. \tag{7}$$

Тогда $\mu f = \left[g_\mu \int\limits_0^\tau \mu\, dt\right]^{\cdot}$ и, значит,

$$g_\lambda = \int\limits_0^\tau \frac{\lambda}{\mu}\left[g_\mu \int\limits_0^t \mu\, ds\right]^{\cdot} dt \Big/ \int\limits_0^\tau \lambda\, dt = \frac{\int_0^\tau \lambda g_\mu dt}{\int_0^\tau \lambda\, dt} + \frac{\int_0^\tau \left[\frac{\lambda}{\mu}\int_0^t \mu\, ds\right] \dot g_\mu dt}{\int_0^\tau \lambda\, dt}. \tag{8}$$

Пусть $f(t) \to \overline{f}(R, \mu)$. Следовательно, $g_\mu \to \overline{f}$. Так как (R, λ)-метод регулярен, то первое слагаемое в (8) стремится к $\overline{f}$. Интегрируя по частям, второе слагаемое в (8) представим в следующем виде:

$$\frac{\frac{\lambda}{\mu}\int_0^\tau \mu\, dt}{\int_0^\tau \lambda\, dt} g_\mu - \frac{\int_0^\tau g_\mu \left[\frac{\lambda}{\mu}\int_0^t \mu\, ds\right]^{\cdot} dt}{\int_0^\tau \lambda\, dt}. \tag{9}$$

Так как g_μ ограничена, то из (4) вытекает, что первое слагаемое стремится к нулю, когда $\tau \to \infty$. В силу второго предположения теоремы 1 производная $\left[\frac{\lambda}{\mu}\int\limits_0^t \mu\,ds\right]^{\cdot}$ сохраняет знак при $t \geqslant t_0$. Следовательно, интеграл в числителе второго слагаемого (9) есть $O\Bigl(\frac{\lambda}{\mu}\int\limits_0^\tau \mu\,dt\Bigr)$. Таким образом, согласно (4), второе слагаемое тоже стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Теорема доказана.

Пример 1. Положим $R_\alpha = (R, \exp t^\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$. Ясно, что R_0 является классическим методом Чезаро C. Согласно теореме 1, R_α включает R_β, если $\beta \geqslant \alpha$. Причем если $\beta > \alpha$, то R_α *строго* включает R_β. В частности, все методы R_α слабее C. Как будет показано ниже, при $\alpha \geqslant 1$ методы R_α эквивалентны обычной сходимости.

Пример 2. Положим $\lambda(t) = 1/t^\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Ограничение $\alpha \leqslant 1$ принято в силу условия (2). Обозначим (для краткости) метод суммирования $(R, t^{-\alpha})$ через R'_α. Из теоремы 1 вытекает, что R'_α включает R'_β, если $\alpha \geqslant \beta$. При $\alpha > \beta$ метод R'_α *строго* включает R'_β. В частности, при всех $\alpha \geqslant 0$ метод R'_α включает метод Чезаро $C = R'_0$.

Положим еще $\mu(t) = (t \ln^\gamma t)^{-1}$, где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Согласно теореме 1, каждый метод (R, μ) включает *все* методы R'_α. Отметим еще, что сила (R,μ)-метода суммирования возрастает с увеличением γ. Аналогично обстоит дело с (R,μ)-методами, когда $\mu = (t \ln t \ln \ln^\gamma t)^{-1}$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Число повторных логарифмов может быть любым.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\lambda(\tau) \Big/ \int\limits_0^\tau \lambda\,dt \geqslant c = \mathrm{const} > 0 \tag{10}$$

и $f, \dot f$ *ограничены. Тогда из сходимости* $f(t) \to \overline{f}(R,\lambda)$ *вытекает, что* $f(t) \to \overline{f}$ *(в обычном смысле).*

Для дискретного метода Рисса (R, p_n) достаточное условие эквивалентности обычной сходимости имеет вид (теорема 15 из [2])

$$p_{n+1} \Big/ \sum_{k=1}^n p_k \geqslant c > 0.$$

Условие (10) — непрерывный аналог этого условия.

Для функций λ из тела Харди бесконечного порядка относительно t условие (10) эквивалентно следующему: $\dot\lambda/\lambda \geqslant c$. В частности, все методы R_α из примера 1 при $\alpha \geqslant 1$ эквивалентны обычной сходимости.

В известных тауберовых теоремах Винера предполагается, что функция f ограничена и медленно колеблется [2]. Последнее свойство заведомо выполнено при условии ограниченности производной.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\tau \mapsto g(\tau)$ — функция из (7) и $g(\tau) \to \overline{f}$ при $\tau \to \infty$. Дифференцируя (7), получаем

$$\nu \dot g = f - g, \tag{11}$$

где $\nu(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \int\limits_0^t \lambda\,ds > 0$. Введем новое время z по формуле $\nu^{-1}dt = dz$. Покажем, что $z \to \infty$, когда $t \to \infty$. Действительно, это свойство эквивалентно расходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{dt}{\nu(t)} = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda(t)}{\int\limits_0^t \lambda\,ds}\,dt,$$

что очевидно ввиду предположения теоремы 2.

Обозначая штрихом дифференцирование по z, представим (11) в виде равенства

$$g' = f - g. \tag{12}$$

Так как функции f и g ограничены (первая по предположению теоремы 2, а вторая в силу условия о (R,λ)-сходимости f), то g' ограничена. Докажем, что $g'' = f' - g'$ также ограничена. Для этого достаточно установить ограниченность производной $f' = \nu \dot f$. Но это вытекает из ограниченности $\dot f$ и неравенства (10): $\nu \leqslant c^{-1}$.

Итак, функция $g(z)$ имеет предел при $z \to \infty$, а вторая производная $g''(z)$ ограничена. Следовательно, $g'(z) \to 0$ (см., например, [3]). Но тогда из (12) вытекает, что $f(z) \to \overline{f}$. Что и требовалось.

Замечание. Полезно рассмотреть еще (R, t^α)-методы ($\alpha > 0$), которые занимают промежуточное место между методом Чезаро C и $(R, \exp t^\beta)$-методами ($0 < \beta < 1$) из примера 1. Однако при всех α они эквивалентны методу Чезаро. Покажем, например, что (R, t) включает C. Положим

$$g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f\,ds, \tag{13}$$

и пусть $g(t) \to \overline{f}$ при $t \to \infty$. Из (13) вытекает, что $(gt)^{\cdot} = f$ и, следовательно,

$$\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau tf\,dt = \frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau t(gt)^{\cdot}dt = 2g(\tau) - \frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau tg\,dt. \tag{14}$$

Ввиду регулярности методов Рисса второе слагаемое стремится к $-\overline{f}$ при $\tau \to \infty$. Следовательно, предел (14) существует и равен $\overline{f}$. Аналогично доказывается, что C включает (R, t).

3. Типы равномерного распределения. Движение $x : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n$ будем называть (R, λ)-равномерно распределенным (кратко (R, λ)-рр), если для любой измеримой по Жордану области $D \subset \mathbb{T}^n$

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau \lambda(t)f(x(t))\,dt\Big/\int_0^\tau \lambda(t)\,dt = \operatorname{mes} D/\operatorname{mes}\mathbb{T}^n, \tag{15}$$

где f — характеристическая функция области D. Интеграл слева — это средняя взвешенная доля времени, в течение которого точка $x(t)$ находится в области D. Если $\lambda(t) = 1$, то получаем определение равномерного распределения по Вейлю.

Замечание. (R, p_n)-равномерно распределенные последовательности точек на $\mathbb{T}^n$ рассматривал сам Вейль в работе [1]. Он исследовал два случая: (A) p_n монотонно возрастают, как степени n, и (B) p_n монотонно убывают, причем $\sum p_n = \infty$. Вейль доказал (теорема 10 из [1]), что при этих предположениях дробные части значений многочленов хотя бы с одним иррациональным коэффициентом в целых точках будут (R, p_n)-рр. Однако этот результат не дает ничего нового (по сравнению с теоремой 9 из [1]), поскольку в случае A (R, p_n)-метод эквивалентен методу Чезаро, а в случае B он включает метод Чезаро. На самом деле интерес представляют случаи, когда p_n возрастают, например, как $\exp n^\alpha$, $\alpha < 1$.

Точно так же, как у Вейля [1], доказываются следующие два критерия (R, λ)-рр. Во-первых, в формуле (15) характеристическую функцию f можно заменить любой интегрируемой по Риману функцией, только при этом $\operatorname{mes} D$ справа в (15) следует заменить на интеграл от f по всему тору $\mathbb{T}^n$. Во-вторых, для (R, λ)-рр достаточно проверить, что

$$\int_0^\tau \lambda(t)e^{i(m,x(t))}dt\Big/\int_0^\tau \lambda(t)\,dt \to 0 \tag{16}$$

при $\tau \to \infty$ для всех $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

В работе [4] показано, что нерезонансные условно-периодические движения являются (R, λ)-рр на $\mathbb{T}^n$ при условии, что $\lambda(t)$ монотонно возрастает и

$$\lambda(t)\Big/\int_0^t \lambda\,ds \to 0$$

при $t \to \infty$. Это — усиление теоремы Боля–Серпинского–Вейля, поскольку при сделанных предположениях (R, λ)-метод, очевидно, слабее метода Чезаро и при надлежащем выборе функции λ он сколь угодно мало отличается от обычной сходимости.

Лемма 1. *Пусть функции $t \mapsto \lambda(t)$ и $t \mapsto \varphi(t)$ таковы, что $\dot\varphi \neq 0$ и отношение $\lambda/\dot\varphi$ монотонно при $t \geqslant a$. Тогда*

$$\int_0^\tau \lambda(t)e^{i\varphi(t)}dt = \text{const} + O\Big(\frac{\lambda(t)}{\dot\varphi(t)}\Big).$$

Действительно, полагая $x = \varphi(t)$ в интервале $[a, \infty)$, получим

$$\int_a^\tau \lambda(t) e^{i\varphi} dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\tau)} \frac{\lambda}{\dot\varphi}\Big|_x e^{ix} dx = \text{const} + \frac{\lambda(\tau)}{i\dot\varphi(\tau)} e^{i\varphi(\tau)} - \frac{1}{i} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\tau)} \Big(\frac{\lambda}{\dot\varphi}\Big|_x\Big)' e^{ix} dx. \tag{17}$$

Здесь штрих — производная по x. Последний интеграл в этой формуле, очевидно, равен

$$\int_a^\tau \Big(\frac{\lambda}{\dot\varphi}\Big)^{\cdot} e^{i\varphi(t)} dt. \tag{18}$$

Ввиду предположения о монотонности производная $(\lambda/\dot\varphi)^{\cdot}$ сохраняет знак. Следовательно, (18) есть $O(\lambda/\dot\varphi) + \text{const}$. Сопоставляя это наблюдение с (17), получаем требуемое.

Теорема 3. *Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — такие n многочленов, что никакая их целочисленная нетривиальная комбинация не сводится к константе. Если*

$$\lambda(\tau) \Big/ \int_a^\tau \lambda(t)\, dt \to 0 \tag{19}$$

и функции λ и t принадлежат одному телу Харди, то движение

$$x_p = x_p(t), \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \tag{20}$$

является (R, λ)-рр на $\mathbb{T}^n$.

Действительно, полагаем $\varphi(t) = (m, x(t))$. В силу предположения о нерезонансности φ — многочлен степени $\geqslant 1$. В частности, $\dot\varphi(t) \neq 0$ при достаточно больших t. Поскольку λ и $\dot\varphi(t)$ из одного тела Харди, то их отношение $\lambda/\dot\varphi$ (элемент того же тела) будет монотонной функцией при $t \geqslant t_0$. Теперь следует воспользоваться критерием (16) о (R, λ)-рр и леммой 1.

Условия теоремы 3 заведомо выполнены, если, например, $\lambda = \exp t^\alpha$, $\alpha < 1$. Таким образом, теорема 3 — усиление известного результата Вейля (теорема 8 из [1]) о равномерном распределении движения (18) на $\mathbb{T}^n$ в обычном смысле (когда $\lambda = 1$).

В связи с теоремой 3 отметим пока не решенную задачу. Пусть у многочлена $\varphi(z)$ хотя бы один из коэффициентов (кроме свободного) иррационален. Верно ли, что последовательность дробных долей $\{\varphi(n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, будет (R, p_n)-рр, если p_n не убывают и $p_n \Big/ \sum\limits_{k=1}^n p_k \to 0$? Для многочленов первой степени этот результат хорошо известен [5].

4. Распределение логарифмов. Пусть сначала $n = 1$. Движение $x = \ln t$, $t \geqslant a > 0$, не является рр на окружности по Вейлю. Действительно,

$$\frac{1}{\tau} \int_a^\tau e^{i \ln t} dt = \frac{e^{i \ln \tau}}{1 + i} + \frac{\text{const}}{\tau},$$

что осциллирует и не стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Наоборот, при всех $\varepsilon > 0$ движение $x = \ln^{1+\varepsilon} t$ будет рр по Вейлю на окружности $\mathbb{T} = \{x \bmod 2\pi\}$.

С другой стороны, поскольку при всех целых $m \neq 0$

$$\int_a^\tau \frac{e^{im \ln t}}{t} dt = \frac{e^{i \ln \tau}}{im} + \text{const} = O(1),$$

то движение $x = \ln t$ будет $(R, 1/t)$-рр на $\mathbb{T}^1$. Конечно, $(R, 1/t)$-метод сильнее метода Чезаро. Стоит отметить, что логарифмическое движение не является $(R, 1/t^\alpha)$-рр на $\mathbb{T}^1$ для всех $\alpha < 1$. Напомним (пример 2 из п. 2), что $(R, 1/t^\alpha)$-метод слабее $(R, 1/t)$-метода, если $\alpha < 1$.

Эти замечания можно обобщить. Справедлива

Теорема 4. *Если функция $t\lambda(t)$ монотонна при $t \geqslant t_0$ и*

$$\tau\lambda(\tau) \Big/ \int\limits_0^\tau \lambda(t)\,dt \to 0,$$

то движение $x_p = \omega_p \ln t$ с рационально несоизмеримыми ω_p будет (R, λ)-рр на $\mathbb{T}^n$.

Ясно, что условиям теоремы удовлетворяют функции $\lambda(t) = 1/t$ и $\lambda(t) = (t \ln^\gamma t)^{-1}$ при всех $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Теорема 4 легко доказывается с помощью критерия (16) и леммы 1.

Аналогичное утверждение справедливо и для повторных логарифмов. Например, функция $\ln\ln t$ будет $(R, (t\ln t)^{-1})$-рр на $\mathbb{T} = \{x \bmod 2\pi\}$.

В заключение этого пункта приведем поучительный пример, относящийся к дискретному равномерному распределению. Сначала напомним хорошо известное свойство распределения первых цифр в десятичной записи степени двойки:

$$\frac{\nu_p(n)}{n} \to \lg\frac{p+1}{p}.$$

Здесь $\nu_p(n)$ — число n первых членов последовательности 2^k, $k \geqslant 1$, начинающихся с цифры p. Упростим задачу, заменив 2^k на k. Рассмотрим аналогичный вопрос о том, с какой частотой числа в натуральном ряду начинаются с цифры p. Ясно, что десятичное разложение n начинается с p, если $p \cdot 10^k \leqslant n < (p+1) \cdot 10^k$ при некотором $k \geqslant 0$. Логарифмируя это неравенство, получаем $k + \lg p \leqslant \lg n < k + \lg(p+1)$. Переходя к дробным частям, получаем неравенства $\lg p \leqslant \{\lg n\} < \lg(p+1)$. Хорошо известно, что последовательность $\{\lg n\}$, $n \geqslant 1$, всюду плотна на отрезке $[0,1]$, но не является рр по mod 1 (Френель, см. [6]). Следовательно, в данном случае отношение $\nu_p(n)/n$ (средняя частота появления цифры p) вообще не имеет предела, когда $n \to \infty$.

Введем последовательность чисел x_n, которые равны 1, если десятичное разложение n начинается с p, и 0 в противном случае. Таким образом, $\nu_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Можно показать, что $x_n \to \lg\frac{p+1}{p}$ $(R, 1/n)$ (см., например, [4]).

Ту же задачу можно рассмотреть для чисел $\lg n$. В этом случае x_n не имеет предела в смысле $(R, 1/n)$-сходимости, однако

$$x_n \to \lg\frac{p+1}{p}\left(R, \frac{1}{n\ln n}\right).$$

5. Теорема о знакопостоянстве интегралов с весом. Пусть $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция с нулевым средним значением, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — набор постоянных частот (необязательно резонансный). Рассмотрим интеграл

$$I(\tau, x_0) = \int\limits_0^\tau f(\omega_1 t + x_1^0, \ldots, \omega_n t + x_n^0)\,dt.$$

В [7] доказано, что при этих предположениях всегда найдется набор начальных фаз $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $f(x_0) = 0$, для которых $I(\tau, x_0) \geqslant 0$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Аналогичное утверждение, конечно, справедливо и для неравенства $I(\tau, x_0) \leqslant 0$. Этот результат допускает обобщение.

Теорема 5. *Пусть $\lambda(t) > 0$ — невозрастающая функция. Тогда при сделанных выше предположениях*

$$\int\limits_0^\tau \lambda(t) f(\omega t + x_0)\,dt \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

при всех τ для некоторых начальных фаз x_0, таких, что $f(x_0) = 0$.

Теорема 5 вытекает из следующего простого утверждения, представляющего самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть непрерывная функция $f(t)$ такова, что*

$$\int\limits_0^\tau f(t)\,dt \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \tag{21}$$

при всех τ и $\lambda(t) \to 0$ — невозрастающая функция. Тогда $\int\limits_0^\tau \lambda(t) f(t)\,dt \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ при всех τ.

Доказательство. Поскольку функция λ монотонна, то по теореме Бонне (вторая теорема о среднем) найдется $\xi \in [0, \tau]$, такое, что

$$\int_0^\tau \lambda f\,dt = \lambda(0)\int_0^\xi f\,dt + \lambda(\tau)\int_\xi^\tau f\,dt. \tag{22}$$

Положим для краткости

$$a = \int_0^\xi f\,dt, \qquad b = \int_\xi^\tau f\,dt. \tag{23}$$

Согласно предположению, $a + b \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ и $\lambda(0) \geqslant \lambda(\tau)$. Следовательно, если $b < 0$, то $\lambda(0)a + \lambda(\tau)b = \lambda(0)a - \lambda(\tau)|b| \geqslant \lambda(0)a - \lambda(0)|b| = \lambda(0)(a+b) \geqslant 0$. Аналогично рассматривается случай, когда интеграл (21) неположителен.

Следствие 1. *Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{T}^n$ с нулевым средним и $p > 1$. Тогда найдется $x_0 \in \mathbb{T}^n$, такое, что $\int_0^\tau f(\omega t^p + x_0)\,dt \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ для всех τ.*

Достаточно выполнить замену переменной по формуле $t^p = z$. Неясно, останется ли справедливым это утверждение, если заменить $\omega_k t^p$ на произвольные многочлены от времени t.

Следствие 2. *Пусть f — непрерывная функция с нулевым средним и произведение $e^z\lambda(e^z)$ не возрастает. Тогда найдется $x_0 \in \mathbb{T}^n$, такое, что*

$$\int_1^\tau \lambda(t) f(\omega \ln t + x_0)\,dt \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

при всех τ.

Достаточно перейти к новому переменному $z = \ln t$. В частности, следствие 2 имеет место для $\lambda = 1/t$. Если не накладывать ограничений на функцию λ, то свойство знакоопределенности теряется. Например, при всех x_0 интеграл $\int_1^\tau \cos(\ln t + x_0)\,dt$ бесконечно много раз меняет знак, когда $\tau \to \infty$.

6. Теорема об осцилляциях. Пусть теперь $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — непостоянная аналитическая функция с нулевым средним значением, а частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально независимы. Как доказано в [8], если $f(x_0) \neq 0$, то интеграл

$$\int_0^\tau f(\omega t + x_0)\,dt \tag{24}$$

бесконечно много раз меняет знак, когда $\tau \to \infty$. При $n = 1$ это очевидно, а при $n = 2$ доказано в [7]. Положим

$$I(\tau) = \int_0^\tau \lambda(t) f(\omega t + x_0)\,dt. \tag{25}$$

Теорема 6. *Пусть $\lambda(t) > 0$ — неубывающая функция. Если все нули функции (25) простые, то их бесконечно много.*

Доказательство теоремы 6 опирается на результат работы [8]. Ввиду аналитичности нули функции I изолированы. Следовательно, функция $I(\tau)$ осциллирует, бесконечно много раз меняя знак, когда $\tau \to \infty$. Грубо говоря, если $\lambda(t)$ возрастает вместе с t, то интеграл (25) осциллирует быстрее интеграла (24).

Замечание. Если функция λ убывает, то интеграл I может иметь лишь конечное число нулей. Простым примером служит классический интеграл Френеля

$$\int_0^\tau \cos t^2 dt. \tag{26}$$

Заменой $t^2 = z$ они приводятся к виду (25), причем λ монотонно стремится к нулю. Хорошо известно, что интеграл (26) имеет всего один простой нуль $\tau = 0$.

Лемма 3. *Пусть* τ_1 *— первый положительный нуль аналитической функции*

$$\int_0^\tau f(t)\,dt \tag{27}$$

и λ *— положительная неубывающая функция. Тогда интеграл* $I(\tau) = \int_0^\tau \lambda(t)f(t)\,dt$ *обращается в нуль на отрезке* $(0, \tau_1]$.

Доказательство. Примем для определенности, что в интервале $(0, \tau_1)$ функция (27) положительна. Ввиду предположения об аналитичности $f(t) > 0$ при малых $t > 0$. Но тогда $I(\tau) > 0$ при малых $\tau > 0$. Поскольку λ монотонна, то можно воспользоваться теоремой Бонне (в обозначениях (22) и (23), где $\tau = \tau_1$):

$$I(\tau_1) = \lambda(0)a + \lambda(\tau_1)b. \tag{28}$$

Число ξ (в (22) и (23)) лежит на отрезке $[0, \tau_1]$. Можно считать, что $\xi \in (0, \tau_1)$, ибо в противном случае $\lambda(t) = \text{const}$ и заключение леммы тривиально. Но тогда $a > 0$, поскольку (по предположению) τ_1 — *первый* положительный нуль функции (27). С другой стороны, $a + b = 0$. Следовательно, $b < 0$ и (с учетом неравенств $\lambda(\tau_1) \geqslant \lambda(0) > 0$) из (28) вытекает, что $I(\tau_1) \leqslant 0$. Что и требовалось.

Доказательство теоремы 5 совсем простое. Пусть $\overline{\tau}$ — простой нуль интеграла I. Согласно [8], функция $\int_{\overline{\tau}}^{\tau} f(\omega t + x_0)\,dt$ имеет нуль $\tau' > \overline{\tau}$, поскольку $f(\omega\overline{\tau} + x_0) \neq 0$. По лемме 3 в интервале $(\overline{\tau}, \tau']$ обязательно найдется нуль интеграла $I(\tau)$. Что и требовалось.

Было бы интересным выяснить вопрос об осцилляциях функции $I(\tau)$ в предположении, что $f(x_0) \neq 0$. Несколько более простая задача: верно ли, что если λ — неубывающая функция, то для почти всех начальных фаз x_0 функция $I(\tau)$ осциллирует?

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 99–01–01096 и 01–01–22004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* О равномерном распределении чисел по модулю один // Избранные труды. М.: Наука, 1984. 58–93.
2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М: ИЛ, 1951.
3. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.
4. *Козлов В.В.* О равномерном распределении // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2001. 96–99.
5. *Tsuji M.* On the uniform distribution of numbers mod 1 // J. Math. Soc. Japan. 1952. 4. 313–322.
6. *Гашков С.Г., Чубариков В.Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М.: Наука, 1996.
7. *Козлов В.В.* Об интегралах квазипериодических функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1978. № 1. 106–115.
8. *Мощевитин Н.Г.* О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условно-периодической функции // Матем. заметки. 1995. **58**, вып. 5. 723–735.

Поступила в редакцию
18.04.03