ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 140, № 3
сентябрь, 2004

 В.В. Козлов*, Д.В. Трещев*

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются системы с конечным числом степеней свободы, потенциальная энергия которых есть конечная сумма экспонент с чисто мнимыми или вещественными показателями. К таким системам относятся обобщенные цепочки Тоды и системы с торическим конфигурационным пространством. Рассматривается задача описания всех квантовых законов сохранения, т.е. дифференциальных операторов, полиномиальных относительно дифференцирований и коммутирующих с оператором Гамильтона. Доказано, что в случае, если спектр потенциальной энергии инвариантен при отражении относительно начала координат, то такие нетривиальные операторы существуют только тогда, когда рассматриваемая система распадается в прямую сумму несвязанных подсистем. В общей ситуации (без предположения о симметрии спектра) доказано, что из наличия полного набора независимых законов сохранения следует полная интегрируемость соответствующей классической системы.

Ключевые слова: оператор Гамильтона, полиномиальный дифференциальный оператор, система с экспоненциальным взаимодействием, спектр потенциала.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – обобщенные координаты, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – сопряженные им канонические импульсы классической гамильтоновой системы. Пусть ϑ – симметричная вещественная квадратная матрица размера $n \times n$. Ей соответствует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в пространстве импульсов $\mathbb{R}^n = \{p\}$:

$$\langle p', p'' \rangle = \sum_{j,l=1}^{n} \vartheta_{jl} p'_j p''_l, \qquad p', p'' \in \mathbb{R}^n.$$

Положим

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n).$$

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка $\Theta = \langle \partial, \partial \rangle$. Если матрица ϑ единичная, то $\Theta = \Delta$ – оператор Лапласа. Далее $-\Theta$ отождествляем с кинетической

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: dtresch@mech.math.msu.su

энергией некоторой квантовой системы. Для простоты записи постоянную Планка мы положили равной единице. В общем случае матрица Θ не предполагается ни положительно определенной, ни даже невырожденной.

Рассмотрим также потенциальную энергию $\hat{v}$ – оператор умножения на функцию

$$v = \sum_{k\in\mathfrak{M}} v^k e^{(k,x)},$$

где $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}^n$ – конечное множество (спектр потенциала), а $(k,x) = \sum k_j x_j$ – операция свертки ковектора k и вектора x, представленных в сопряженных базисах, v^k – комплексные числа.

Оператором Гамильтона назовем оператор

$$\widehat{H} = -\Theta + \hat{v}. \tag{1.1}$$

Этот оператор получается из классического гамильтониана $\langle p,p\rangle + v$ применением операции квантования

$$x, p \mapsto \hat{x}, -\frac{i\partial}{\partial x}.$$

Наша основная задача – найти оператор

$$\widehat{F}(x,\partial) = \sum_{|\mu|\leqslant M} f_\mu(x)\partial^\mu, \tag{1.2}$$

$$\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n = \{0,1,2,\dots\},$$

$$|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n, \qquad \partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \times \dots \times \partial_n^{\mu_n},$$

$$f_\mu = \sum_k f_\mu^k e^{(k,x)}, \tag{1.3}$$

коммутирующий с $\widehat{H}$:

$$[\widehat{F},\widehat{H}] = 0, \tag{1.4}$$

где $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор: $[\hat{A},\widehat{B}] = \hat{A}\circ\widehat{B} - \widehat{B}\circ\hat{A}$, $\circ$ – символ композиции операторов. Оператор, коммутирующий с оператором Гамильтона, назовем квантовым первым интегралом.

В квантовой механике обычно рассматривают эрмитовы дифференциальные операторы. Хорошо известно, что если $[\widehat{H},\widehat{F}] = 0$, то среднее значение эрмитова оператора $\widehat{F}$ в любом состоянии не зависит от времени:

$$\frac{d}{dt}\int \bar{\psi}\widehat{F}\psi\, dx_1\dots dx_n = 0$$

для любой волновой функции ψ, удовлетворяющей уравнению Шредингера $i\partial\psi/\partial t = \widehat{H}\psi$. Таким образом, любой эрмитов дифференциальный оператор, коммутирующий с оператором Гамильтона, порождает закон сохранения.

Ниже рассматривается общая задача о коммутирующих операторах и не предполагается, что оператор $\widehat{F}$ эрмитов.

Наиболее интересны следующие два случая:

а) $\Theta = \Delta$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M} \subset i\mathbb{Z}^n$, $v^k = \bar{v}^{-k}$ – этот случай отвечает натуральной системе на торе (можно считать, что $x \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$), потенциал которой – тригонометрический полином;

б) $\Theta = \Delta$, $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$, $v^k \in \mathbb{R}$ – здесь мы имеем дело с квантовыми обобщенными цепочками Тоды.

Замечание 1.1. А. В случаях "а" и "б" оператор $\widehat{H}$ вещественный.

Б. Случай "а" сводится к случаю "б" заменой

$$x \mapsto ix, \qquad \mathfrak{M} \mapsto i\mathfrak{M}, \qquad v \mapsto -v, \qquad \widehat{H} \mapsto -\widehat{H}.$$

Таким образом, далее все объекты вещественные.

В. Ортогональной заменой координат x можно привести матрицу ϑ к диагональному виду. Далее путем растяжения можно добиться, чтобы на диагонали матрицы ϑ стояли ± 1 или нули. Поэтому в случае положительно определенной матрицы ϑ можно считать, что $\Theta = \Delta$.

Г. Нас интересуют лишь нетривиальные решения уравнения (1.4):

$$\widehat{F} \neq \sum_s c_s \widehat{H}^s, \qquad s \in \{0, 1, \dots\}, \qquad c_s = \mathrm{const}. \tag{1.5}$$

Однородный по переменной p многочлен

$$F_{(M)} = \sum_{|\mu|=M} f_\mu(x) p^\mu$$

называется старшим символом оператора $\widehat{F}$.

2. СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО СПЕКТРА

Определение 2.1. Назовем спектр $\mathfrak{M}$ *разделяющимся*, если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$, причем ни $\mathfrak{M}_1$, ни $\mathfrak{M}_2$ не порождают $\mathbb{R}^n$. Ортогональность понимается в смысле метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Отметим, что данному определению удовлетворяет спектр, лежащий в линейном подпространстве положительной коразмерности. В этом случае одно из множеств $\mathfrak{M}_j$ пусто.

Если спектр разделяется, то система имеет дополнительный квадратичный по ∂ интеграл. В этом случае оператор Гамильтона $\widehat{H}$ разлагается в сумму операторов $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$ вида (1.1), которые являются операторами Гамильтона отдельных подсистем исходной квантовой системы. Поскольку $[\widehat{H}_1, \widehat{H}_2] = 0$, то $[\widehat{H}, \widehat{H}_1] = [\widehat{H}, \widehat{H}_2] = 0$.

Если одно из множеств $\mathfrak{M}_j$ пусто, то, очевидно, система имеет линейный по ∂ интеграл.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть матрица ϑ положительно или отрицательно определена, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$ и имеется нетривиальный в смысле* (1.5) *интеграл $\widehat{F}$. Тогда спектр разделяется.*

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если оператор Гамильтона* (1.1) *со знакоопределенной матрицей ϑ и симметричным спектром допускает нетривиальный полиномиальный коммутирующий с $\widehat{H}$ оператор, то найдется нетривиальный полиномиальный по ∂ оператор, коммутирующий с $\widehat{H}$, степень которого не превосходит двух.*

Действительно, если спектр не разделяется, то нетривиальных коммутирующих операторов вообще нет. Наоборот, если спектр разделяется, то (как было отмечено выше) имеется либо квадратичный, либо линейный относительно дифференцирований оператор, коммутирующий с $\widehat{H}$.

По-видимому, верно и более общее утверждение. Оператор Гамильтона (1.1) со знакоопределенной матрицей ϑ и симметричным спектром имеет $l \leqslant n$ независимых интегралов тогда и только тогда, когда спектр $\mathfrak{M}$ разделяется на l ортогональных частей, т.е.

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{M}_l, \qquad \mathfrak{M}_j \perp \mathfrak{M}_s, \qquad j, s = 1, \dots, l,$$

причем ни одно из множеств $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_j$ не порождает $\mathbb{R}^n$.

ПРИМЕР 2.1. Применим эти результаты к квантовой задаче о движении n идентичных частиц по окружности $\{x \bmod 2\pi\}$, попарно взаимодействующих друг с другом. Их динамика описывается оператором Гамильтона (1.1), где $\Theta = \Delta/(2\mu)$ (μ – масса частиц) и

$$v = \sum_{i<j} f(x_i - x_j). \tag{2.1}$$

Будем считать потенциал f парного взаимодействия тригонометрическим многочленом:

$$f(z) = \sum_{|m| \leqslant N} f_m e^{imz}, \qquad f_N \neq 0, \quad N \geqslant 1. \tag{2.2}$$

Можно считать, что частицы движутся по прямой $\mathbb{R} = \{x\}$ с периодическим парным потенциалом.

Ясно, что ввиду трансляционной симметрии кроме полной энергии $\widehat{H}$ эта система всегда допускает интеграл импульса $\widehat{\Phi} = \sum \partial_j$. Так что речь может идти об условиях существования дополнительного полиномиального оператора, независимого от $\widehat{H}$, $\widehat{\Phi}$ и коммутирующего с этими операторами. Используя интеграл импульса, можно было бы понизить число степеней свободы на единицу (перейдя, например, в барицентрическую систему отсчета). Однако мы не будем этого делать отчасти из-за желания сохранить симметрию оператора Гамильтона по отношению к координатам $x_1, \dots, x_n$.

Спектр $\mathfrak{M}$ потенциала (2.1) состоит из точек вида $(0, \dots, l, \dots, -l, \dots, 0)$, где $|l| \leqslant N$. Все они лежат в одной гиперплоскости Π, проходящей через начало координат. Это свойство – отражение факта существования линейного интеграла $\widehat{\Phi}$.

Легко заметить, что $n-1$ точек спектра

$$(N, -N, 0, \dots, 0), \quad (N, 0, -N, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad (N, 0, 0, \dots, -N)$$

линейно независимы (как векторы $\mathbb{Z}^n$) и их попарные скалярные произведения положительны. Следовательно, спектр $\mathfrak{M}$ не разделяется на гиперплоскости Π и согласно теореме 2.1 рассматриваемая система взаимодействующих частиц не допускает новых полиномиальных операторов, коммутирующих с $\widehat{H}$ и $\widehat{\Phi}$.

Отметим, что классический вариант задачи о движении взаимодействующих частиц с потенциалом (2.1), (2.2) также не допускает дополнительного интеграла в виде полинома по импульсам, независимого от интегралов энергии и суммарного импульса. Это установлено в [1] (добавление 6) с помощью техники, развитой в работе [2] и основанной на классической схеме теории возмущений.

В работе [3] высказано предположение, что теорема 2.1, а также следствие 2.1 справедливы и для классических многомерных гамильтоновых систем. Там же указаны достаточные условия (в терминах геометрии выпуклой оболочки спектра) отсутствия дополнительного полиномиального по импульсам первого интеграла, основанные на методе работы [2]. Развиваемый ниже метод, по-видимому, позволяет доказать гипотезу работы [3] в полном объеме.

Доказательство теоремы 2.1 состоит из двух частей: аналитической (разделы 4–7) и геометрической (разделы 8–10). Аналитическая часть представляет собой анализ равенства (1.4). Ее главный результат – доказательство основной леммы, формулируемой ниже. Геометрическая часть – это использование основной леммы для доказательства теоремы 2.1. Указанные две части независимы, так что при желании можно сначала прочитать доказательство теоремы, а затем доказательство основной леммы.

Перейдем к формулировке основной леммы.

Определение 2.2. Назовем $\alpha \in \mathfrak{M}$ *вершиной спектра*, если для любого натурального j и любых $k_1, \dots, k_j \in \mathfrak{M}$ равенство $j\alpha = k_1 + \dots + k_j$ возможно лишь в случае $k_1 = \dots = k_j = \alpha$.

Очевидно, если $\alpha \neq 0$ – вершина многогранника, являющегося выпуклой оболочкой $\mathfrak{M} \cup \{0\}$, то α – вершина $\mathfrak{M}$.

Определение 2.3. Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина спектра. Вектор $\beta \in \mathfrak{M}$, $\beta \neq \alpha$, назовем *присоединенным* к α, если для любого $j \in \mathbb{N}$ и любых $k_0, k_1, \dots, k_j \in \mathfrak{M}$ равенство $j\alpha + \beta = k_0 + \dots + k_j$ возможно лишь в случае, когда один из векторов k_l, $l = 0, \dots, j$, равен β, а остальные векторы равны α.

Каждому вектору $k \in \mathbb{R}^n$ сопоставим дифференциальный оператор

$$D_k = \left(k, \frac{\partial}{\partial p}\right) \equiv \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Пусть $G(\vartheta) \subset GL(n, \mathbb{R})$ – группа преобразований, сохраняющих ориентацию на $\mathbb{R}^n$ и (вообще говоря, индефинитную) метрику ϑ. Если метрика ϑ стандартная евклидова, то $G(\vartheta) = SO(n)$.

Основная лемма. *Пусть α и β – линейно независимые вершина и присоединенный к ней вектор такие, что*

$$-2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \notin \mathbb{Z}_+. \tag{2.3}$$

Пусть $g(\alpha,\beta)\subset G(\vartheta)$ – группа, образованная всеми преобразованиями из $G(\vartheta)$, оставляющими неподвижными векторы, ортогональные плоскости, натянутой на α и β. Тогда $F_{(M)}$ сохраняется при действии $g(\alpha,\beta)$ на $\mathbb{R}^n$.

Если α – изотропный вектор $\big(\langle\alpha,\alpha\rangle=0\big)$, то условие (2.3) *следует заменить на следующее: $\langle\alpha,\beta\rangle\neq 0$.*

Следствие 2.2. *Пусть спектр содержит α и β такие, как в условиях основной леммы. Пусть $\widehat{F}^{(1)},\dots,\widehat{F}^{(n)}$ – первые интегралы. Тогда их старшие символы $F^{(1)}_{(M_1)},\dots,F^{(n)}_{(M_n)}$ тождественно зависимы.*

Доказательство следствия 2.2 основано на двух простых фактах.

1. Старший символ первого интеграла не зависит от x (см. предложение 4.2 ниже).

2. Производная любой функции $F^{(j)}_{(M_j)}=F^{(j)}_{(M_j)}(p)$ вдоль векторного поля, касательного к орбитам действия $g(\alpha,\beta)$ на $\mathbb{R}^n$, равна нулю.

3. ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С ПОЛНЫМ НАБОРОМ КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Следствие 2.2 из основной леммы позволяет дать исчерпывающую классификацию квантовых n-мерных систем с экспоненциальным взаимодействием (к таким системам, в частности, относятся цепочки Тоды и их обобщения [4]), которые могут допускать n попарно коммутирующих полиномиальных по ∂ дифференциальных операторов, старшие символы которых функционально независимы. Такие наборы операторов можно назвать полными. Дело в том, что не существует новых операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона, у которых старшие символы не зависят от старших символов уже имеющихся n коммутирующих операторов. Действительно, старший символ оператора, коммутирующего с оператором Гамильтона, зависит лишь от n переменных $p_1,\dots,p_n$ (см. ниже предложение 4.2).

Классический аналог указанной задачи широко обсуждался в литературе. Помимо уже упомянутых работ [4] отметим также статьи [5], в которых получен ряд интегрируемых обобщений стандартных цепочек Тоды. Окончательная классификация классических интегрируемых обобщенных цепочек Тоды получена в работе [6].

Задача о нахождении квантовых систем, допускающих полный набор независимых интегралов (законов сохранения), хорошо известна (см., например, [7] и приведенную там литературу). Естественно полагать, что такие системы редки и, в определенном смысле, более регулярны по сравнению с системами общего вида.

Верна следующая

Теорема 3.1. *Пусть квантовая система с экспоненциальным взаимодействием обладает полным набором попарно коммутирующих полиномиальных по ∂ дифференциальных операторов. Тогда соответствующая классическая система интегрируема, т.е. обладает полным набором попарно коммутирующих полиномиальных по импульсам первых интегралов.*

Искомая классификация основана на применении соотношений

$$-2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\{0,1,2,\dots\},\tag{3.1}$$

где α – *любая* вершина спектра системы и β – присоединенный к ней вектор (см. основную лемму). Задача об описании спектров $\mathfrak{M}$ со свойством (3.1) решена в работе [6] в связи с классификацией вполне интегрируемых классических гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием. Дискретные серии возможных спектров для неприводимых систем с $n\geqslant 2$ степенями свободы определяются своими *диаграммами Дынкина*. Эти диаграммы приведены в [6]. Они получаются из диаграмм простых корней градуированных алгебр Каца–Муди добавлением векторов, сонаправленных с некоторыми уже имеющимися. Добавленные векторы либо в два раза длиннее, либо в два раза короче сонаправленных с ними корневых векторов.

Вопрос о *достаточности* условий (3.1) для существования полного набора независимых полиномиальных коммутирующих операторов квантовых систем с экспоненциальным взаимодействием остается открытым. Для обычных цепочек Тоды он имеет положительное решение.

Пример 3.1. Замкнутая квантовая цепочка Тоды из трех частиц допускает три независимых самосопряженных коммутирующих оператора:

$$\begin{aligned}\widehat{H}&=-\frac{1}{2}(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)+e^{x_1-x_2}+e^{x_2-x_3}+e^{x_3-x_1},\\ \hat{I}&=i(\partial_1+\partial_2+\partial_3),\\ \widehat{F}&=i\partial_1\partial_2\partial_3+ie^{x_2-x_3}\partial_1+ie^{x_3-x_1}\partial_2+ie^{x_1-x_2}\partial_3.\end{aligned}$$

Соотношения $[\widehat{H},\hat{I}]=[\widehat{F},\hat{I}]=[\widehat{H},\widehat{F}]=0$ проверяются прямым вычислением.

Отметим, что к настоящему времени полная спектральная теория разработана лишь для *незамкнутых* цепочек Тоды (см. обзор [8], а также [9]).

4. СИМВОЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Форму (1.2) записи дифференциального оператора будем называть *стандартной*. Характерной чертой такой формы является то, что все дифференцирования отнесены вправо. Ясно, что любой дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами можно представить в стандартной форме.

Любому оператору $\widehat{F}$ вида (1.2) сопоставим его символ,

$$\widehat{F}(x,\partial)\mapsto F(x,p)=\operatorname{symb}\bigl(\widehat{F}(x,\partial)\bigr),\qquad p\in\mathbb{C}^n,$$

где F – многочлен относительно p вида

$$F(x,p)=\sum_{|\mu|\leqslant M} f_\mu(x)p^\mu. \tag{4.1}$$

В литературе F часто называется левым (или xp-) символом оператора $\widehat{F}$.

Операция symb линейна. Для любых операторов $\widehat{F},\widehat{G},\widehat{F}_0,\widehat{G}_0$, функции $u(x)$ и вектора $\mu\in\mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\begin{gathered}
\operatorname{symb}(\widehat{F}+\widehat{F}_0)\circ(\widehat{G}+\widehat{G}_0)=\operatorname{symb}(\widehat{F}\circ\widehat{G})+\operatorname{symb}(\widehat{F}\circ\widehat{G}_0)+\\
+\operatorname{symb}(\widehat{F}_0\circ\widehat{G})+\operatorname{symb}(\widehat{F}_0\circ\widehat{G}_0),\\
\operatorname{symb}(u\widehat{F}\circ\widehat{G})=u\operatorname{symb}(\widehat{F}\circ\widehat{G}),\\
\operatorname{symb}(\widehat{F}\circ\widehat{G}\circ\partial^\mu)=\operatorname{symb}(\widehat{F}\circ\widehat{G})p^\mu.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Предложение 4.1. *Пусть $\widehat{F}$ и $\widehat{G}$ – два оператора и $F(x,p)$, $G(x,p)$ – их символы. Тогда*

$$\operatorname{symb}(\widehat{F}\circ\widehat{G})=F(x,p+\partial)G(x,p). \tag{4.3}$$

Замечание 4.1. Более подробно правую часть равенства (4.3) можно записать следующим образом:

$$\sum_\mu f_\mu(x)(p+\partial)^\mu G(x,p).$$

Доказательство предложения 4.1. Согласно соотношениям (4.2) достаточно рассмотреть случай, когда $\widehat{F}=\partial^\mu$, $\widehat{G}=\hat{u}(x)$, где $u(x)$ – гладкая функция:

$$\operatorname{symb}(\partial^\mu\circ\hat{u})=(p+\partial)^\mu u.$$

Это равенство доказывается индукцией по $|\mu|$.

Следствие 4.1. *Имеют место равенства*

$$\begin{gathered}
\operatorname{symb}[\widehat{F},-\Theta]=\bigl(2\langle p,\partial\rangle+\Theta\bigr)F(x,p),\\
\operatorname{symb}[\widehat{F},\hat{v}]=\bigl(F(x,p+\partial)-F(x,p)\bigr)v(x).
\end{gathered}$$

Следствие 4.2. *Уравнение* (1.4) *равносильно следующему:*

$$\bigl(2\langle p,\partial\rangle+\Theta\bigr)F(x,p)+\bigl(F(x,p+\partial)-F(x,p)\bigr)v(x)=0. \tag{4.4}$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных относительно переменных x. Требуется найти решение вида (4.1).

Положим

$$F_{(m)}=\sum_{|\mu|=m} f_\mu(x)p^\mu.$$

Тогда $F = \sum_{m=0}^{M} F_{(m)}$.

Однородная форма степени m разложения (4.4) по p имеет вид

$$2\langle p,\partial\rangle F_{(m-1)} + \Theta F_{(m)} + \sum_{r>0} F_{(m+r)}^{(r)}(x,p)(\partial)v(x) = 0, \tag{4.5}$$

где $F_{(j)}$ считается равным нулю, если $j \notin \{0,1,\dots,M\}$, $F_{(s)}^{(r)}(\partial)$ – однородная форма степени r по ∂ при разложении Тейлора $F_{(s)}(x,p+\partial) - F_{(s)}(x,p)$ по формальной переменной ∂ в точке $\partial = 0$.

Для любого $k \in \mathbb{R}^n$ определим его порядок $\operatorname{ord} k$ относительно спектра $\mathfrak{M}$. Порядок вектора k есть наименьшее $J \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ такое, что для некоторых $k_1,\dots,k_J \in \mathfrak{M}$

$$k = k_1 + \dots + k_J.$$

Порядок нуля считаем равным нулю.

Замечание 4.2. А. Из-за конечности спектра $\operatorname{ord} k = +\infty$ для почти любого $k \in \mathbb{R}^n$.

Б. Пусть α – вершина спектра. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\operatorname{ord}(j\alpha) = j$.

В. Пусть α – вершина спектра и β – присоединенный к ней вектор. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\operatorname{ord}\bigl((j-1)\alpha + \beta\bigr) = j$.

Пусть Π_j – пространство функций вида

$$\Psi(p,k) = \sum_{\operatorname{ord} k = j} \psi_k(p) e^{(k,x)}.$$

Положим $\widetilde{\Pi}_l = \bigcup_{l \leqslant j} \Pi_j$. Определим естественную проекцию $\pi_j \colon \widetilde{\Pi}_j \to \Pi_j$.

Предложение 4.2. *Пусть F – символ первого интеграла. Тогда*

$$F_{(M-s)} \in \widetilde{\Pi}_{[s/2]}, \tag{4.6}$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. В частности, $F_{(M)}$ не зависит от x.

Более того, функции

$$\Phi_{(M-s)} = \pi_{[s/2]} F_{(M-s)} \in \Pi_{[s/2]}$$

с четными $s = 2j$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$2\langle p,\partial\rangle \Phi_{(M-2j-2)} + \pi_j\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_l} \Phi_{(M-2j)}(x,p)\partial_{x_l} v(x)\right) = 0. \tag{4.7}$$

Доказательство. Сначала проверим (4.6). Используем индукцию по s.

При $m = M+1$ формула (4.5) имеет вид $2\langle p,\partial\rangle F_{(M)}(p,x) = 0$, откуда с учетом (1.3) и (4.1) получаем $F_{(M)} = F_{(M)}(p)$. Следовательно, формула (4.6) выполняется при $s = 0$.

Теперь предположим, что соотношение (4.6) имеет место при всех $s = 0,1,\dots,s_0$. Согласно (4.5)

$$2\langle p,\partial\rangle F_{(M-s_0-1)} = -\Theta F_{(M-s_0)} - \sum_{r>0} F^{(r)}_{(M-s_0+r)}(x,p)(\partial)v(x). \tag{4.8}$$

Пусть s_0 четное. Тогда

$$F_{(M-s_0)} \in \widetilde{\Pi}_{s_0/2}, \qquad F^{(r)}_{(M-s_0+r)} \in \widetilde{\Pi}_{[(s_0-r)/2]} \subset \widetilde{\Pi}_{s_0/2-1}, \qquad r>0.$$

Имея в виду равенство $\big[(s_0+1)/2\big] = s_0/2$, получаем (4.6).

Пусть теперь s_0 нечетное. Тогда

$$F_{(M-s_0)} \in \widetilde{\Pi}_{(s_0-1)/2}, \qquad F^{(r)}_{(M-s_0+r)} \in \widetilde{\Pi}_{[(s_0-r)/2]} \subset \widetilde{\Pi}_{(s_0-1)/2}, \qquad r>0.$$

Следовательно, $F_{(M-s_0-1)} \in \widetilde{\Pi}_{(s_0+1)/2} = \widetilde{\Pi}_{[(s_0+1)/2]}$.

Равенства (4.7) получаем, применяя оператор π_j к (4.8), где $s_0+1 = 2j+2$.

5. ВЕРШИНЫ И ВЕКТОРЫ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НИМ

5.1. Пусть α – вершина спектра. Тогда (согласно предложению 4.2) при $j \geqslant 1$

$$2\langle p,\partial\rangle\big(F^{j\alpha}_{(M-2j)}e^{j(\alpha,x)}\big) = -\sum_l \frac{\partial}{\partial p_l}\big(F^{(j-1)\alpha}_{(M-2j+2)}e^{(j-1)(\alpha,x)}\big)\frac{\partial}{\partial x_l}\big(v^\alpha e^{(\alpha,x)}\big), \tag{5.1}$$

где $F^k_{(s)} = F^k_{(s)}(p)$ – коэффициент при $e^{(k,x)}$ функции $F_{(s)}$. Отсюда легко следует

Предложение 5.1. *Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина. Тогда при $j = 1,2,\dots,[(M+1)/2]$*

$$F^{j\alpha}_{(M-2j)} = \frac{(v^\alpha)^j}{(-2)^j j!}A^j F_{(M)}, \tag{5.2}$$

где оператор A имеет вид

$$A = \frac{1}{\langle p,\alpha\rangle}D_\alpha, \qquad D_\alpha = \left\langle \alpha, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle.$$

Выражения (5.2) должны быть многочленами относительно p. Это накладывает существенные ограничения на $F_{(M)}$.

5.2. Аналогично, используя индукцию и равенство (5.1), можно легко доказать следующее

Предложение 5.2. *Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина и β – присоединенный к α вектор. Тогда при $j = 1, 2, \ldots, [(M+1)/2]$*

$$F^{(j-1)\alpha+\beta}_{(M-2j)} = \frac{(v^\alpha)^{j-1} v^\beta}{(-2)^j \langle p, (j-1)\alpha + \beta \rangle} G_{j-1} F_{(M)}, \tag{5.3}$$

где операторы G_j находятся из следующих рекуррентных соотношений:

$$G_0 = D_\beta, \qquad G_j = D_\alpha \frac{1}{\langle p, (j-1)\alpha + \beta \rangle} G_{j-1} + D_\beta \frac{1}{j!} A^j, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Выражения (5.3) должны быть многочленами относительно p. Это налагает еще ряд ограничений на $F_{(M)}$.

5.3. Далее нам также понадобится следующее простое замечание.

Предложение 5.3. *Пусть выражения* (5.2) *и* (5.3) *являются многочленами относительно p при $j = 1, 2, \ldots, [(M+1)/2]$. Тогда при целых $j > [(M+1)/2]$ правые части равенств* (5.2) *и* (5.3) *тождественно равны нулю.*

Доказательство. Степень d многочленов (5.2) и (5.3) равна $d = M - 2j$. При $j = [(M+1)/2]$ имеем

$$d = \begin{cases} 0, & \text{если } M \text{ четное}, \\ -1, & \text{если } M \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Это означает, что при нечетном M и $j = [(M+1)/2]$ выражения (5.2) и (5.3) равны нулю, а при четном не зависят от p. Остается воспользоваться равенством (5.4).

5.4. Далее важную роль играет следующая

Техническая лемма. *Произведем с операторами G_s следующие действия. Сначала представим их в стандартном виде, т.е. как сумму одночленов вида*

$$q(p) D^l_\alpha \qquad \text{или} \qquad q_*(p) D^l_\alpha D_\beta$$

(*все дифференцирования отнесены вправо*). *Затем положим $\langle p, s\alpha + \beta \rangle = 0$. Получившиеся операторы обозначим G^0_s. Тогда*

$$G^0_s = \frac{(-1)^s}{s!\, \langle p, \alpha \rangle^{2s}} \prod_{j=0}^{s-1} \left\langle \alpha, \beta + \frac{j}{2}\alpha \right\rangle D_{s\alpha+\beta}. \tag{5.5}$$

При $s = 0$ произведение в (5.5) *следует считать равным единице.*

Поразительным является тот факт, что при вычислении G^0_s операторы дифференцирования порядка выше первого взаимно уничтожились, а операторы дифференцирования первого порядка свелись к $D_{s\alpha+\beta}$ с некоторым коэффициентом.

Доказательство технической леммы содержится в разделе 7.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина спектра и вектор $\beta \in \mathfrak{M}$ присоединен к ней, причем выполнены условия* (2.3). *Тогда*

$$D_{j\alpha+\beta}F_{(M)}(p)|_{\langle p,j\alpha+\beta\rangle=0}=0, \qquad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{6.1}$$

Доказательство. Согласно предложению 5.2 выражения (5.3) – многочлены. Следовательно, при $s=0,1,\dots,[(M-1)/2]$

$$G_sF_{(M)}(p) \quad \text{делится на} \quad \langle p, s\alpha+\beta\rangle. \tag{6.2}$$

С учетом предложения 5.3 условия (6.2) выполняются при всех $s\in\mathbb{Z}_+$.

Применяя техническую лемму, получим:

$$D_{s\alpha+\beta}F_{(M)}(p) \quad \text{делится на} \quad \langle p, s\alpha+\beta\rangle, \qquad s\in\mathbb{Z}_+. \tag{6.3}$$

Здесь мы воспользовались тем, что согласно (2.3) коэффициенты перед $D_{s\alpha+\beta}$ в (5.5) отличны от нуля.

Теперь докажем основную лемму. Пусть L – двумерная плоскость, натянутая на векторы α и β. Тогда $\mathbb{R}^n=L\oplus L^\perp$.

Зафиксируем ортогональную проекцию $p_\perp$ вектора p на $L^\perp$. Тогда множество решений уравнения $\langle p, a\alpha+b\beta\rangle=0$ – прямая $l_{a,b}$, параллельная L и проходящая через точку $p=p_\perp$. Множество $\mathbf{l}$ прямых $l_{a,b}$ изоморфно одномерному вещественному проективному пространству с однородными координатами a, b.

Множество $Z\subset\mathbf{l}$ точек a, b, для которых

$$D_{a\alpha+b\beta}F_{(M)}(p)\big|_{p\in l_{a,b}}=0, \tag{6.4}$$

является алгебраическим подмногообразием в $\mathbf{l}$. Согласно лемме 6.1 множество Z содержит бесконечно много точек вида $b/a\in\mathbb{Z}_+$. Следовательно, Z совпадает с $\mathbf{l}$. Итак, (6.4) выполняется для любых a, b и $p_\perp$.

Для любого p вектор $v(p)=-\langle p,\beta\rangle\alpha+\langle p,\alpha\rangle\beta$ перпендикулярен p, поэтому

$$D_{v(p)}F_{(M)}\equiv 0.$$

Остается заметить, что группа $g(\alpha,\beta)$ изоморфна фазовому потоку, порожденному векторным полем $v(p)$.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕХНИЧЕСКОЙ ЛЕММЫ

Прежде всего переформулируем лемму в более удобном виде. А именно, произведем в операторах G_s замену $\widetilde{\beta} = \beta + s\alpha$. Операторы G_s примут вид

$$G_0 = D_{\tilde{\beta}}, \qquad G_s = \sum_{l=0}^{s} B_l \circ D_{\tilde{\beta}-j\alpha} \frac{1}{(j-l)!} \circ A^{j-l}, \qquad s > 0, \tag{7.1}$$

где

$$B_0 = 1, \qquad B_l = D_\alpha \circ \frac{1}{\langle p, \tilde{\beta} - \alpha \rangle} D_\alpha \circ \frac{1}{\langle p, \tilde{\beta} - 2\alpha \rangle} \dots D_\alpha \circ \frac{1}{\langle p, \tilde{\beta} - l\alpha \rangle}, \qquad l > 0.$$

Теперь техническую лемму можно сформулировать следующим образом.

Лемма 7.1. *Произведем с операторами G_s следующие действия. Сначала представим их в стандартном виде. Затем положим $\langle p, \tilde{\beta} \rangle = 0$. Получившиеся операторы обозначим G_s^0. Тогда*

$$G_s^0 = \frac{(-1)^s}{s! \langle p, \alpha \rangle^{2s}} \prod_{j=0}^{s-1} \left\langle \alpha, \tilde{\beta} - \left(s - \frac{j}{2} \right) \alpha \right\rangle D_{\tilde{\beta}}.$$

Доказательство. Далее для краткости тильды над β опустим. Положим

$$a = \langle \alpha, \alpha \rangle, \qquad b = \langle \alpha, \beta \rangle,$$
$$q_0 = 1, \qquad q_s = \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{j}{2} a - b \right), \qquad s \in \mathbb{N}.$$

Нам понадобятся следующие предложения.

Предложение 7.1. *Приведем операторы B_l к стандартному виду и положим $\langle p, \beta \rangle = 0$. Тогда получившиеся операторы оказываются следующими*:

$$B_l^0 = \sum_{j=0}^{l} \frac{(-1)^{l-j}}{j!\,(l-j)!\,\langle p, \alpha \rangle^{2j}} \frac{q_{2j}}{q_j} A^{l-j}.$$

Предложение 7.2. *Приведем операторы $B_l D_\alpha$ к стандартному виду и положим $\langle p, \beta \rangle = 0$. Тогда получившиеся операторы оказываются следующими*:

$$B_l^+ = \frac{(-1)^l}{l!} \langle p, \alpha \rangle A^{l+1} + \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^{l-j} b}{(j+1)!\,(l-j-1)!\,\langle p, \alpha \rangle^{1+2j}} \frac{q_{2j+1}}{q_{j+1}} A^{l-j}.$$

Предложения 7.1 и 7.2 доказываются по индукции.

Так как для любого $j \in \mathbb{Z}$

$$D_\beta \circ \langle p, \alpha\rangle^j = \frac{b}{a} D_\alpha \circ \langle p, \alpha\rangle^j - \frac{b}{a}\langle p, \alpha\rangle^j D_\alpha + \langle p, \alpha\rangle^j D_\beta,$$

то верны следующие равенства:

$$D_\beta \circ A^l = \frac{b}{a} D_\alpha \circ A^l - \frac{b}{a} A^l \circ D_\alpha + A^l \circ D_\beta, \qquad l = 0, 1, \ldots. \tag{7.2}$$

С учетом тождеств (7.2) равенства (7.1) переписываются в виде

$$G_j = \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{(j-l)!}\left(\frac{b - ja}{a} B_l D_\alpha A^{j-l} - \frac{b}{a} B_l \circ A^{j-l} \circ D_\alpha + B_l \circ A^{j-l} \circ D_\beta\right).$$

Таким образом,

$$G_s^0 = R_1 + R_2 + R_3,$$

где

$$R_1 = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{(s-l)!} \frac{b - sa}{a} B_l^+ \circ A^{s-l}, \qquad R_2 = -\sum_{l=0}^{s} \frac{1}{(s-l)!} \frac{b}{a} B_l^0 \circ A^{s-l} \circ D_\alpha,$$

$$R_3 = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{(s-l)!} B_l^0 \circ A^{s-l} \circ D_\beta.$$

Доказательство леммы завершается применением следующего предложения.

Предложение 7.3. *Справедливы следующие равенства*:

$$R_1 = -R_2 = \frac{b}{a} \frac{1}{s!\,\langle p, \alpha\rangle^{2s}} \frac{q_{2s}}{q_s} D_\alpha, \qquad R_3 = \frac{1}{s!\langle p, \alpha\rangle^{2s}} \frac{q_{2s}}{q_s} D_\beta.$$

Предложение 7.3 доказывается прямым вычислением с использованием предложений 7.1, 7.2. Проверим, например, последнее равенство:

$$R_3 = \sum_{l=0}^{s} \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{(s-l)!} \frac{(-1)^{l-j}}{j!\,(l-j)!\,\langle p, \alpha\rangle^{2j}} \frac{q_{2j}}{q_j} A^{s-j} D_\beta =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!\,\langle p, \alpha\rangle^{2j}} \frac{q_{2j}}{q_j} A^{s-j} D_\beta \sum_{l=j}^{s} \frac{(-1)^{l-j}}{(s-l)!\,(l-j)!}.$$

Так как внутренняя сумма (сумма по l) отлична от нуля только при $j = s$, то следует положить $j = l = s$, откуда и следует требуемая формула для R_3.

8. ЛЕММЫ О ПРИСОЕДИНЕННОМ ВЕКТОРЕ

В этом разделе начинается геометрическая часть доказательства. Везде далее полагаем

$$\mathfrak{C} = \operatorname{conv}\bigl(\mathfrak{M} \cup \{0\}\bigr),$$

где $\operatorname{conv}(S)$ – выпуклая оболочка множества S.

Кроме того, так как согласно условиям теоремы 2.1 матрица ϑ положительно или отрицательно определена, можно считать, что $\vartheta = \pm E_n$, где E_n – единичная матрица порядка n. Имея в виду возможность замены $\widehat{H}$ на $-\widehat{H}$, можно считать, что $\vartheta = E_n$. Поэтому далее считаем, что $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – стандартное евклидово скалярное произведение и группа $G(\vartheta)$, сохраняющая метрику ϑ, есть $SO(n)$.

Лемма 8.1. *Пусть α – вершина многогранника $\mathfrak{C}$, а I – его ребро, содержащее α. Тогда I содержит вектор $\beta \in \mathfrak{M}$, присоединенный к α.*

Доказательство. В качестве β возьмем ближайший к α элемент множества $I \setminus \{\alpha\}$. Пусть

$$k_1 + \dots + k_{s+1} = s\alpha + \beta, \qquad k_1, \dots, k_{s+1} \in \mathfrak{M}. \tag{8.1}$$

Покажем, что один из векторов k_j равен β. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – гиперплоскость такая, что $\Lambda \cap \mathfrak{C} = I$. Так как многогранник $\mathfrak{C}$ выпуклый, указанная гиперплоскость существует. Тогда для любого $k \in \mathfrak{M}$ проекция k на нормаль ν к Λ меньше либо равна проекции α на ν, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $k \in I$.

Проецируя (8.1) на ν, получаем, что $k_1, \dots, k_{s+1} \in I$. Далее, проецируя (8.1) на I, получаем требуемое утверждение.

Определение 8.1. Назовем ребро I с концами α_1 и α_2 *положительным*, если $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle > 0$.

Следствие 8.1. *Пусть α и β те же, что в лемме 8.1. Если I положительное, то $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$.*

Пусть $\nu_1, \dots, \nu_m$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда в $\mathbb{R}^n$ определено отношение лексикографического порядка $\prec$. Для вектора $u = \sum u_j \nu_j \in \mathbb{R}^n$ скажем, что $0 \prec u$, если в последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n$ первое ненулевое число положительно. Скажем, что $u \prec v$, если $0 \prec v - u$.

Отношение $\prec$, определенное таким образом, очевидно, согласовано с линейной структурой на $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{llll} \text{если} & u \prec v, & \text{то} & u + w \prec v + w, \\ \text{если} & u \prec v \ \text{ и } \ \lambda > 0, & \text{то} & \lambda u \prec \lambda v. \end{array}$$

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ отношение лексикографического порядка $\prec$, соответствующее некоторому базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Лемма 8.2. *Пусть α – максимальный относительно $\prec$ вектор в спектре $\mathfrak{M}$. Тогда α – вершина.*

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство, содержащее α, а β – максимальный вектор среди векторов $k \in \mathfrak{M}$ таких, что $k \notin \Lambda$. Тогда β присоединен к α.

Доказательство. Пусть

$$k_1 + \dots + k_s = s\alpha, \qquad k_1, \dots, k_s \in \mathfrak{M}.$$

Так как $k_j \preccurlyeq \alpha,\ j = 1, \dots, s$, имеем $k_1 = \dots = k_s = \alpha$.

Теперь предположим, что выполняется равенство (8.1). Его правая часть не лежит в Λ. Следовательно, один из векторов k_j (можно считать, что k_1) не лежит в Λ. Тогда $k_1 \preccurlyeq \beta,\ k_l \preccurlyeq \alpha,\ l = 2, \dots, s$. Отсюда следует, что $k_1 = \beta$.

Определение 8.2. Назовем вершину α многогранника $\mathfrak{C}$ *правильной*, если α – единственная точка пересечения $\mathfrak{C}$ и плоскости, перпендикулярной вектору α и проходящей через точку α. Вершину спектра α в этом случае тоже будем называть *правильной*.

Лемма 8.3. *Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – правильная вершина и $\Lambda \subset \mathbb{R}$ – линейное подпространство, содержащее α. Предположим, что существует вектор $k \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$ такой, что $\langle \alpha, k \rangle > 0$. Тогда существует присоединенный к α вектор $\beta \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$ такой, что $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим ортогональный базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что $e_1 = \alpha_1$ и $e_2, \dots, e_l \in \Lambda$, где $l = \dim \Lambda$. Так как вершина α правильная, то вектор α максимален относительно соответствующего отношения $\prec$ среди векторов из $\mathfrak{M}$. Пусть β – максимальный вектор из $k \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$.

Согласно лемме 8.2 вектор β присоединен к α. Так как $\beta \succcurlyeq k$, то $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$.

Лемма 8.4. *Пусть $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – линейное пространство, натянутое на несколько вершин многогранника $\mathfrak{C}$, причем остальные вершины лежат в $\Lambda^\perp$. Предположим, что существует вектор $k \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$, не перпендикулярный Λ. Тогда найдется вершина спектра $\alpha \in \Lambda$ и присоединенный к ней вектор β такие, что*

$$\beta \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda, \qquad \langle \alpha, \beta \rangle > 0. \tag{8.2}$$

Доказательство. Рассмотрим многогранник $\operatorname{conv}(\mathfrak{M} \cap \Lambda)$. Его размерность (как многообразия с краем) равна d, где $d = \dim \Lambda$ (иначе спектр разделяется).

Пусть векторы $h_1, \dots, h_J$ являются перпендикулярами, опущенными из начала координат на его $(d-1)$-мерные грани $f_1, \dots, f_J$ (или их продолжения). Заметим, что основание хотя бы одного из перпендикуляров h_j лежит строго внутри соответствующей грани. Действительно, этим свойством обладает самый короткий перпендикуляр.

Можно считать, что номер j, о котором говорится выше, равен единице. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – вершины $\operatorname{conv}(\mathfrak{M} \cap \Lambda)$, лежащие в грани f_1. Так как векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ порождают Λ, найдется $i \in \{1, \dots, N\}$ такой, что $\langle \alpha_i, k \rangle \neq 0$. Меняя, если необходимо, k на $-k$, имеем $\langle \alpha_i, k \rangle > 0$. Далее считаем, что $i = 1$.

Вектор α_1 максимален в $\mathfrak{M}$ относительно отношения $\prec$, соответствующего некоторому ортогональному базису $e_1, \dots, e_n$, где $e_1 = h_1$ и $e_1, \dots, e_d \in \Lambda$.

Положим $\beta = \max_{\xi \in \mathfrak{M}, \xi \notin \Lambda} \xi$, где максимум берется относительно $\prec$. Так как $\beta \succcurlyeq k$ и $\langle \alpha_1, k \rangle > 0$, имеем $\langle \alpha_1, \beta \rangle > 0$.

Вектор β присоединен к $\alpha = \alpha_1$: это доказывается так же, как и в лемме 8.2.

9. ЛЕММА О ПОРОЖДЕНИИ

Далее для любого линейного подпространства $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ мы используем обозначение $g(\Lambda) \subset SO(n)$ для подгруппы всех сохраняющих ориентацию ортогональных преобразований, оставляющих на месте векторы, лежащие в $\Lambda^\perp$ – ортогональном дополнении к Λ.

Лемма 9.1. *Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{R}^n$ – два не ортогональных друг другу линейных подпространства размерности, большей или равной двум. Тогда группы $g(\Lambda_1)$ и $g(\Lambda_2)$ порождают $g(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$.*

Доказательство. Пространства Λ_1 и Λ_2 содержат подпространства $L_1 \subset \Lambda_1$ и $L_2 \subset \Lambda_2$ такие, что L_1 и L_2 двумерны и не ортогональны друг другу. Тогда $g(L_1)$ и $g(L_2)$ порождают $g(L_1 \oplus L_2)$, если верно следующее

Предложение 9.1. *Лемма* 9.1 *справедлива в случае, когда* $\dim \Lambda_1 = \dim \Lambda_2 = 2$.

Найдутся две последовательности подпространств $\Pi_0, \dots, \Pi_s$ и $\pi_1, \dots, \pi_s$ такие, что выполнены следующие условия:

1) $L_1 \oplus L_2 = \Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \dots \subset \Pi_s = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$;
2) $\dim \Pi_{j+1} = \dim \Pi_j + 1,\ j = 0, \dots, s-1$;
3) $\Pi_{j+1} = \Pi_j \oplus \pi_{j+1},\ j = 0, \dots, s-1$;
4) $\dim \pi_j = 2,\ j = 1, \dots, s$;
5) для любого $j \in \{1, \dots, s\}$ пространство π_j лежит или в Λ_1, или в Λ_2.

Предположим, что верно следующее

Предложение 9.2. *Лемма* 9.1 *справедлива в случае, когда* $\dim \Lambda_2 = 2$ *и* $\dim \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 = \dim \Lambda_1 + 1$.

Тогда лемма 9.1 будет доказана путем последовательного применения предложения 9.2, в котором берется $\Lambda_1 = \Pi_j$ и $\Lambda_2 = \pi_{j+1},\ j = 0, \dots, s-1$.

Итак, остается доказать предложения 9.1 и 9.2. Основным инструментом, используемым в доказательстве этих предложений, является теорема Рашевского–Чжоу [10]. Эта теорема утверждает, в частности, следующее.

Пусть G_1 и G_2 – две связные подгруппы в конечномерной группе Ли G и $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}$ – соответствующие алгебры Ли. Пусть минимальная подалгебра, содержащая $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, совпадает с $\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда G_1 и G_2 порождают связную подгруппу $\widetilde{G} \subset G$, соответствующую алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Согласно этой теореме достаточно проверить, что алгебры Ли $\mathfrak{g}(\Lambda_1)$, $\mathfrak{g}(\Lambda_2)$ групп $g(\Lambda_1)$, $g(\Lambda_2)$ порождают алгебру Ли $\mathfrak{g}(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$ группы $g(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$.

Доказательство предложения 9.1. Имеем два случая:
а) $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = 0$;
б) $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq 0$.

Случай "б" получается, если в предложении 9.2 положить $\dim \Lambda_1 = 2$, так что ограничимся лишь случаем "а". Здесь можно считать, что размерность объемлющего пространства $n = 4$, причем Λ_1 натянуто на два первых базисных вектора ортонормированного базиса. Тогда $\mathfrak{g}(\Lambda_1) \subset so(4)$ – одномерное подпространство, порожденное матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Пусть векторы-столбцы $u, v \in \mathbb{R}^4$ образуют базис в Λ_2. Тогда $\mathfrak{g}(\Lambda_2) \subset so(4)$ – одномерное подпространство, порожденное матрицей

$$A_2 = uv^{\mathrm{T}} - vu^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & d \\ -a & 0 & e & f \\ -c & -e & 0 & b \\ -d & -f & -b & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Так как $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2 = \mathbb{R}^4$, имеем $b \neq 0$. Так как Λ_1 и Λ_2 не перпендикулярны друг другу, по крайней мере один из коэффициентов c, d, e, f отличен от нуля. Остается воспользоваться следующим предложением.

Предложение 9.3. *Пусть a, b, c, d, e, f – вещественные числа, причем*

$$b \neq 0, \qquad c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \neq 0.$$

Тогда минимальная алгебра Ли, содержащая матрицы (9.1) *и* (9.2), *есть* $so(4)$.

Предложение 9.3 проверяется прямым вычислением.

Доказательство предложения 9.2. Можно считать, что размерность объемлющего пространства $n = \dim \Lambda_1 + 1$, причем Λ_1 натянуто на первые $n-1$ базисных векторов ортонормированного базиса. Тогда $\mathfrak{g}(\Lambda_1)$ состоит из всевозможных кососимметрических матриц, имеющих нулевые последний столбец и последнюю строку.

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ – базис в Λ_2. Алгебра $\mathfrak{g}(\Lambda_2)$ одномерна и порождена матрицей

$$A = uv^{\mathrm{T}} - vu^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} * & w \\ w^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \neq w \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Остается воспользоваться следующим предложением.

Предложение 9.4. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство, натянутое на первые $n-1$ базисных векторов. Тогда минимальная алгебра Ли, содержащая алгебру Ли группы $g(L)$ и матрицу A, есть $so(n)$.*

Предложение 9.4 проверяется прямым вычислением.

10. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.1

Рассмотрим многогранник $\mathfrak{C}$. Его положительные ребра разбиваются на несколько классов эквивалентности $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_s$. Два ребра входят в один класс тогда и только тогда, когда от одного до другого можно пройти по положительным ребрам. Если положительных ребер нет, то считаем, что классов $\mathbf{I}_j$ тоже нет.

Рассмотрим некоторый класс $\mathbf{I}_j$. Каждому из ребер, лежащих в нем, соответствуют вершина α и присоединенный вектор β такие, что $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ (лемма 8.1).

Каждому классу $\mathbf{I}_j$ соответствует $L_j \subset \mathbb{R}^n$ – минимальное линейное подпространство, содержащее ребра из $\mathbf{I}_j$. Соответствующие группы $g(\alpha, \beta)$ порождают $g(L_j)$ (лемма 9.1).

Заметим, что линейное пространство L_0, порожденное векторами $\alpha_1, \dots, \alpha_K$, идущими из начала координат в вершины $\mathfrak{C}$, не лежащие в $L_1 \cup \dots \cup L_s$, таково, что

$$L_1 \oplus \dots \oplus L_s \oplus L_0 = \mathbb{R}^n.$$

Если это не так, то $\mathfrak{M}$ лежит в подпространстве $\mathbb{R}^n$ положительной коразмерности, т.е. спектр разделяется.

Любая из вершин α_j правильная (иначе из нее выходило бы положительное ребро). Рассмотрим некоторое фиксированное $j \in \{1, \dots, K\}$. Если для любого $k \in \mathfrak{M}$ имеем $\langle \alpha_j, k \rangle = 0$, то спектр разделяется. Следовательно, можно считать, что существует вектор $k_0 \in \mathfrak{M}$ такой, что $\langle \alpha_j, k_0 \rangle > 0$ (здесь мы воспользовались симметрией спектра). Согласно лемме 8.3 найдется вектор β_j, присоединенный к α_j, такой, что $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle > 0$.

Пусть l_j – двумерная плоскость, натянутая на α_j, β_j, и $g_j = g(\alpha_j, \beta_j) \equiv g(l_j)$ – соответствующая подгруппа в $SO(n)$. Тогда

$$\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_s \oplus l_1 \oplus \dots \oplus l_K,$$

причем символ $F_{(M)}$ остается инвариантным при действии групп $g(L_1), \dots, g(L_s)$, $g(l_1), \dots, g(l_K)$.

Пусть Λ_1 и Λ_2 – два пространства из набора $L_1, \dots, L_s, l_1, \dots, l_K$. Если Λ_1 и Λ_2 не ортогональны, то соответствующие группы $g(\Lambda_1)$ и $g(\Lambda_2)$ порождают $g(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$. Тогда пространства Λ_1 и Λ_2 можно заменить на $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$.

Объединяя пространства таким способом (пока это возможно), в конце концов получим следующее разложение $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_N,$$

где:

а) подпространства Q_j попарно ортогональны;

б) каждое подпространство Q_j порождается вершинами многогранника $\mathfrak{C}$;

в) группы $g(Q_j)$ сохраняют символ $F_{(M)}$.

Теперь воспользуемся леммой 8.4. В качестве Λ возьмем Q_1. Вектор k, о котором говорится в лемме 8.4, существует, так как иначе спектр разделяется. Из условий (8.2) следует, что вектор β не ортогонален некоторому Q_j, $j \neq 1$. Пусть $Q_{j_1}, \dots, Q_{j_s}$ – пространства, не ортогональные β. Тогда группы $g(Q_1), g(Q_{j_1}), \dots, g(Q_{j_s})$ и $g(\alpha, \beta)$ порождают $g(Q_1 \oplus Q_{j_1} \oplus \dots \oplus Q_{j_l})$. Мы уменьшили число слагаемых в разложении $\mathbb{R}^n$. Действуя далее по индукции, получаем, что символ $F_{(M)}$ инвариантен относительно действия $SO(n)$.

Итак, мы доказали, что в случае неразделяющегося спектра $F_{(M)} = c_M \langle p, p \rangle^{M/2}$, $c_M = \mathrm{const}$. Но тогда оператор

$$\widehat{\Phi} = \widehat{F} - c_M \widehat{H}^{M/2}$$

является полиномиальным относительно дифференцирований оператором, коммутирующим с $\widehat{H}$, причем степень $\widehat{\Phi}$ меньше M. Далее повторяем рассуждения для $\widehat{\Phi}$ вместо $\widehat{F}$ и т.д. Доказательство теоремы 2.1 закончено.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 02-01-00400, 02-01-01059, гранта Президента РФ МД-261.2003.01 и INTAS 00-221.

Список литературы

[1] *В. В. Козлов*. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[2] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев*. Матем. сб. 1988. Т. 135. № 1. С. 119–138.

[3] *В. В. Козлов*. Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 5. С. 597–599.

[4] *M. Adler, P. van Moerbeke*. Adv. Math. 1980. V. 38. P. 267–317; *O. I. Bogoyavlensky*. Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. № 3. P. 201–209.

[5] *M. Adler, P. van Moerbeke*. Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 83–106; *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov*. Invent. Math. 1976. V. 37. № 2. P. 93–108; 1979. V. 54. № 3. P. 261–269.

[6] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 51. № 3. С. 537–556.

[7] *С. Гравель*. ТМФ. 2003. Т. 137. № 1. С. 97–107.

[8] *М. А. Ольшанецкий, А. М. Переломов, А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский*. Интегрируемые системы. II. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 86–226.

[9] *B. Kostant*. Quantization and representation theory. In: Representation Theory of Lie Groups. London Math. Soc. Lect. Notes Ser. V. 34. Eds. M. F. Atiyah, G. L. Luke. New York: Cambridge Univ. Press, 1979. P. 287–316; *М. А. Семенов-Тян-Шанский*. Квантовые цепочки Тоды. Теоремы разложения и рассеяние. Препринт ЛОМИ, 1984; *R. Goodman, N. R. Wallach*. Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 355–386; 1984. V. 94. P. 177–217.

[10] *П. К. Рашевский*. Учен. записки Моск. пед. ин-та им. К. Либктехта. Сер. физ. -матем. наук. 1938. № 2. С. 83–94.

Поступила в редакцию 15.XII.2003 г.,
после доработки 2.II.2004 г.