ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2004, том 395, № 2, с. 169–173

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 531.19

СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ПО ГИББСУ И ПУАНКАРЕ В СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

© 2004 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 05.12.2003 г.

1. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Основной объект исследования – идеальный газ как бесстолкновительная сплошная среда в сосуде, который имеет форму прямоугольного параллелепипеда

$$\Pi_n = \{z_1, z_2, \ldots, z_n: 0 \le z_k \le l_k;\ 1 \le k \le n\}.$$

Особый интерес, конечно, представляет собой случай, когда $n = 3$. Однако развиваемая ниже теория не зависит от размерности n. Бесстолкновительность означает, что частицы не сталкиваются друг с другом: они движутся равномерно и прямолинейно, упруго отражаясь от границы сосуда П. Мы предполагаем, что совокупность частиц образует континуум. Более точно, частицы газа распределены по пространству и по скоростям, причем плотность такого распределения – измеримая и суммируемая функция.

Эту модельную задачу впервые рассмотрел Пуанкаре в работе [1]. Кстати сказать, при $n = 1$ модель Пуанкаре вполне соответствует обычным представлениям о газе как о большом числе маленьких одинаковых шариков, упруго сталкивающихся друг с другом. Дело в том, что при упругом соударении одинаковых шаров, двигающихся по одной прямой, происходит простой обмен их скоростей.

Можно стать на другую точку зрения, восходящую к Гиббсу. Будем рассматривать простую динамическую систему – частицу в параллелепипеде П, упруго отражающуюся от границы $\partial\Pi$. Однако ее начальное положение и скорость можно задать с ошибкой, распределенной по определенному закону. Другими словами, состояние такой системы – случайное событие. Соответствующая плотность распределения вероятностей эволюционирует со временем и удовлетворяет классическому уравнению Лиувилля, которое можно считать уравнением неразрывности в модели Пуанкаре.

Основное наблюдение Пуанкаре состоит в том, что независимо от начального распределения бесстолкновительный газ необратимо при $t \to \pm\infty$ стремится равномерно заполнить весь объем прямоугольного ящика с зеркальными стенками. Точная формулировка этого замечательного результата и его доказательство даны в [2] (см. также [3]).

Можно стать на более общую точку зрения и включить это наблюдение Пуанкаре в общую концепцию, связанную со слабой сходимостью вероятностных мер и статистическим (тепловым) равновесием гамильтоновых динамических систем.

Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ – положение точки, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ – ее скорость. Совокупность состояний (z, v), где $z \in \Pi^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, составляет фазовое пространство Г. Далее, пусть $\rho(z, v)$ – плотность начального распределения газа. Можно считать, что $\rho \in L_1(\Gamma)$, хотя в ряде случаев удобно предполагать, что $\rho \in L_p(\Gamma)$, где $1 \le p < \infty$. Начальная плотность распределения ρ переносится фазовым потоком и становится функцией времени t: $\rho_t(z, v)$. Она удовлетворяет уравнению Лиувилля и однозначно определяется начальным условием $\rho_0 = \rho$.

Будем говорить, что ρ_t слабо сходится к функции $\bar\rho$, если при $t \to \infty$

$$\int_\Gamma \rho_t \varphi\, d^n z\, d^n v \to \int_\Gamma \bar\rho \varphi\, d^n z\, d^n v \tag{1}$$

для любой функции $\varphi \in L_q(\Gamma)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Случай $p = 1$ соответствует $q = \infty$. Напомним, что класс L_∞ составляют измеримые и существенно ограниченные функции. Функция $\bar\rho(z, v)$ принадлежит $L_p(\Gamma)$, является первым интегралом рассматриваемой системы, неотрицательна и удовлетворяет (как и ρ) естественному условию нормировки

$$\int_\Gamma \bar\rho\, d^n z\, d^n v = 1.$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Ее можно представить как среднее Биркгофа

$$\bar{\rho}(z_0, v_0) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \rho(z(t, z_0, v_0), v(t, z_0, v_0))dt,$$

где z и v как функции времени являются решениями уравнений движения с начальными условиями z_0 и v_0. Эти результаты справедливы и в более общем случае, когда параллелепипед П заменяется произвольной областью в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-регулярной границей (см. [3, 4]).

Функцию $\bar{\rho}$ естественно считать плотностью распределения в состоянии статистического (теплового) равновесия системы. В рассматриваемой задаче $\bar{\rho}$ зависит лишь от квадратов скоростей $v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2$. Такие распределения порождают уравнение состояния типа уравнения Клапейрона–Менделеева (см. [2, 3, 5]).

Будем теперь медленно менять размеры параллелепипеда П, считая длины ребер l_s гладкими функциями "медленного" времени $\tau = \varepsilon t$, где ε – малый параметр. При $\varepsilon = 0$ размеры сосуда не меняются. В термодинамике считается, что бесконечно медленное изменение параметров приводит к обратимому квазистатическому процессу, когда в каждый момент времени состояние системы можно считать практически равновесным. Мы попытаемся строго обосновать эту гипотезу для рассматриваемой модельной системы, основываясь на теории адиабатических инвариантов. Более точно, будут рассмотрены следующие две задачи:

1) достигнет ли бесстолкновительный газ состояния, мало отличающегося от статистического равновесия, если параметры меняются медленно, а время t достаточно велико $\left(\sim\frac{1}{\varepsilon}\right)$?

2) предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ бесстолкновительный газ уже находился в статистическом равновесии и при $t \geq 0$ стенки сосуда начали медленно и плавно двигаться. Будет ли газ в последующие моменты времени практически оставаться в состоянии статистического равновесия и как долго такой процесс можно считать квазистатическим?

Начнем с рассмотрения второй задачи.

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

Пусть длины сторон параллелепипеда $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – гладкие функции от εt и ρ – начальная плотность распределения вероятностей. Тогда плотность ρ_t в момент времени t зависит (кроме фазовых переменных z, v) еще и от ε. Будем считать, что произведение $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (объем П) ограничено и нигде не обращается в нуль.

Теорема 1. *Если плотность $\rho \in L_p(\Gamma)$ зависит лишь от $v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2$, то найдется вероятностная мера*

$$\nu_t(v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2, \varepsilon)d^nzd^nv,$$

$$\nu_t \in L_p, \quad \nu_0 = \rho,$$

такая, что для любой $\varphi \in L_q(\Gamma)$ и любого $t \in \left[0, \frac{c}{\varepsilon}\right]$ (c – некоторая константа)

$$\left|\int_\Gamma \rho_t\varphi d^nzd^nv - \int_\Gamma \nu_t\varphi d^nzd^nv\right| \to 0 \qquad (2)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Согласно разделу 1, функции ν_t можно трактовать как стационарную плотность распределения вероятностей в момент времени t: среднее значение динамических величин вычисляется по тому же правилу, как и в правой части (1). Например, пусть $p = 1$ и φ – характеристическая функция измеримой области $\Phi \subset$ П. Тогда, согласно (2), интеграл

$$\int_\Gamma \rho_t\varphi d^nzd^nv \qquad (3)$$

при малых ε будет сколь угодно близок к отношению $\frac{\operatorname{mes}\Phi}{\operatorname{mes}\Pi}$. Значение интеграла (3) совпадает с долей частиц из ансамбля Гиббса, находящихся в момент времени t в области Ф. Следовательно, если ε мало, то на достаточно длинном интервале времени $\left(\sim\frac{1}{\varepsilon}\right)$ бесстолкновительный газ будет по-прежнему практически равномерно распределен по объему сосуда.

Для доказательства теоремы 1 положим

$$\nu_t(v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2, \varepsilon) = \rho\left(\frac{v_1^2 l_1^2}{l_1^2(0)}, \frac{v_2^2 l_2^2}{l_2^2(0)}, \ldots, \frac{v_n^2 l_n^2}{l_n^2(0)}\right). \qquad (4)$$

Ясно, что $\nu_t \in L_p$ (если $\rho \in L_p$), $\nu_0 = \rho$ и

$$\int_\Gamma \nu_t(v^2, \varepsilon)d^nzd^nv = 1$$

при всех значениях t. Как выглядит решение ρ_t уравнения Лиувилля с данным Коши ρ? Для этого надо обратить общее решение уравнений частицы

$$z = z(t, z_0, v_0), \quad v = v(t, z_0, v_0)$$

и подставить полученную формулу для $v_0 = v(0)$ в выражение $\rho(v_1^2(0), v_2^2(0), \ldots, v_n^2(0))$. Итак, $\rho_t(z, v) = \rho(v_0^2)$. К тому же произведения $v_k^2 l_k^2$ будут адиабатическими инвариантами [6]:

$$\left|v_k^2(t)l_k^2(\varepsilon t) - v_k^2(0)l_k^2(0)\right| \le c\varepsilon$$

при $0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon}$ ($c = \text{const} > 0$). Следовательно, $v_k^2(0) = \frac{v_k^2 l_k^2}{l_k^2(0)} + O(\varepsilon)$ и

$$\rho_t = \rho\left(\frac{v_1^2 l_1^2}{l_1^2(0)} + O(\varepsilon), \frac{v_2^2 l_2^2}{l_2^2(0)} + O(\varepsilon), \ldots, \frac{v_n^2 l_n^2}{l_n^2(0)} + O(\varepsilon)\right). \tag{5}$$

Из сопоставления (4) и (5) можно вывести требуемое соотношение (2).

Как хорошо известно [1], энтропия Гиббса всегда постоянна:

$$S_t = -\int_\Gamma \rho_t \ln\rho_t d^n z d^n v = \text{const}. \tag{6}$$

Интересно отметить, что энтропия квазистатических состояний

$$\bar{S}_t = -\int_\Gamma \nu_t \ln\nu_t d^n z d^n v \tag{7}$$

также не меняется со временем. Таким образом, рассматриваемый квазистатический процесс будет адиабатическим. Это наблюдение интересно сравнить с результатом о возрастании энтропии при необратимом расширении бестолкновительного газа: если в выражении (6) заменить плотность ρ_t ее слабым пределом $\bar{\rho}$, то энтропия, как правило, увеличивается [2].

В отличие от энтропии при адиабатических процессах внутренняя энергия e идеального газа (пропорциональная абсолютной температуре τ) может меняться. Положим

$$e(t) = \int_\Gamma \frac{v^2}{2}\rho_t d^n z d^n v \tag{8}$$

(в предположении сходимости этого интеграла). Рассмотрим случай, когда $n = 3$ и $l_1 = l_2 = l_3 = l$ (сосуд имеет форму куба). По теореме 1 при медленном движении стенок сосуда интеграл (8) мало отличается от интеграла

$$\bar{e}(t) = \int_\Gamma \frac{v^2}{2}\nu_t d^n z d^n v = \frac{w_0^{2/3}}{w^{2/3}}\bar{e}_0, \quad \bar{e}_0 = \bar{e}(0), \tag{9}$$

где w – объем сосуда П. Формула (8) просто выводится с использованием (4). Поскольку $e = c\tau$ ($c = \text{const}$), то из (9) получается известное уравнение адиабаты для идеального одноатомного газа:

$$\tau w^{2/3} = \text{const}. \tag{10}$$

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ К СТАТИСТИЧЕСКОМУ РАВНОВЕСИЮ

Обсудим теперь первую задачу о "нулевом" начале термодинамики при медленно меняющихся граничных условиях. Пусть $\rho \in L_p(\Gamma)$, а $\varphi \in L_q(\Gamma)$ – пробная функция. Более точно, мы предполагаем, что φ – функция от $\frac{z_1}{l_1}, \frac{z_2}{l_2}, \ldots, \frac{z_n}{l_n}, l_1 v_1, l_1 v_2, \ldots, l_n v_n$;, которая при каждом значении t принадлежит L_q. Положим

$$K(t) = \int_\Gamma \rho_t \varphi d^n z d^n v.$$

Т е о р е м а 2. *Если l_s – гладкие функции от εt, то найдется такая функция $\bar{\rho}(l_1^2 v_1^2, l_2^2 v_2^2, \ldots, l_n^2 v_n^2)$, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K\left(\frac{c}{\varepsilon}\right) = \int_\Gamma \bar{\rho}\varphi d^n z d^n v, \quad c = \text{const} \ne 0. \tag{11}$$

Пусть, в частности, $p = 1$, а φ – характеристическая функция измеримой области $\Phi_t \subset П$. Эта область медленно меняется подобно деформации объемлющего параллелепипеда П. Теорема 2 утверждает, что при малых значениях ε (независимо от начального распределения) доля бесстолкновительного газа, расположенного в области Φ_t, по истечении достаточно большого промежутка времени $\left(\sim\frac{1}{\varepsilon}\right)$ практически равна доле этой области в параллелепипеде П (см. формулу (11)). Например, если П поделить перегородкой на две равные половины, то через время $\sim\frac{1}{\varepsilon}$ газ распределится между этими областями практически поровну.

Если принять функцию $\bar{\rho}$ за начальную плотность распределения, то в течение большого промежутка времени $\left(\sim\frac{1}{\varepsilon}\right)$ бесстолкновительный газ будет практически оставаться в состоянии статистического равновесия (теорема 1).

Теорема 2 доказывается с использованием регуляризации (переход к 2^n-листному накрытию П n-мерным тором), техники работы [2] и теории адиабатических инвариантов.

4. РАССЕИВАЮЩИЕ БИЛЛИАРДЫ

Статистическое равновесие бесстолкновительного газа имеет место внутри любого замкнутого сосуда с кусочно-регулярной поверхностью. Любое начальное распределение с плотностью $\rho \in L_p$ порождает решение уравнения Лиувилля ρ_t, которое слабо сходится к некоторой функции $\bar{\rho} \in L_p$. Эта функция является биркгофовским средним ρ, инвариантна относительно фазового потока рассматриваемой динамической системы с ударами и имеет смысл плотности стационарного распределения вероятностей (см. [3, 4]).

В связи с этим результатом возникает возможность обобщения задач 1 и 2 из раздела 1 на области произвольной формы. Если очень медленно и плавно менять границу сосуда, то будет ли бесстолкновительный газ демонстрировать квазистатическое поведение? Анализ этой ситуации в общем случае требует развития теории адиабатических инвариантов. Эта теория создана для двух крайних случаев: когда возмущаются вполне интегрируемые системы, а также когда на почти всех поверхностях уровня интеграла энергии невозмущенная система эргодична (см. [6]). Первый случай встречается как раз в условиях применимости теорем 1 и 2. Второй случай охватывается известной теоремой Касуги [7].

Пусть сосуд $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ теперь ограничен кусочно-гладкой и строго выпуклой внутрь П поверхностью. Частица, двигающаяся по инерции внутри П и упруго отражающаяся от границы, порождает динамическую систему, которая называется рассеивающим бильярдом (или бильярдом Синая). Эта система заведомо эргодическая при положительных значениях энергии h частицы [8, 9]. Слабый предел решения уравнения Лиувилля с данными Коши $\rho \in L_p$ будет функцией $\bar{\rho} \in L_p$, зависящей лишь от энергии h.

Предположим теперь, что форма сосуда зависит от параметра, который, в свою очередь, гладко зависит от "медленного" времени εt, ε – малый параметр. В частности, объем w сосуда П также гладко зависит от εt.

Т е о р е м а 3. *Если начальная плотность* ρ *зависит лишь от энергии* $h = \frac{(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)}{2}$, *то вероятностная мера*

$$\nu_t d^n z d^n v = \rho\left(h\frac{w^\alpha}{w_0^\alpha}\right) d^n x d^n v, \quad \alpha = \frac{2}{n}, \quad w_0 = w(0)$$

задает квазистатический обратимый процесс, т.е.

1) *выполнено* (2),

2) *энтропия* (7) *постоянна*,

3) *справедливо уравнение адиабаты* (10) (*при* $n = 3$).

Теорема 3 доказывается так же, как и теорема 1. Существенную роль играет теорема Касуги о том, что адиабатическим инвариантом является объем фазового пространства, заключенного внутри изоэнергетической гиперповерхности [7] (при этом результаты [7] надо слегка модифицировать, поскольку они относятся к гладким гамильтоновым системам). Легко понять, что этот объем пропорционален произведению $h^{n/2}w$.

Теорема Касуги (после ее надлежащего уточнения) позволяет дать положительный ответ в задачах 1 и 2 применительно к "реальному" газу Больцмана–Гиббса, заключенному в прямоугольном ящике с зеркальными стенками. Этот газ представляет собой большое число маленьких одинаковых шариков, упруго сталкивающихся друг с другом и со стенками ящика. Если размеры ящика не меняются со временем, то независимо от начального распределения этих шаров по пространственным координатам и скоростям газ Больцмана–Гиббса необратимо стремится к состоянию статистического (теплового) равновесия. Согласно [8], рассматриваемая биллиардная система эргодична на энергетических поверхностях. В частности, в состоянии статистического равновесия все возможные положения шаров в прямоугольном сосуде равновероятны (предельная плотность $\bar{\rho}$ зависит лишь от энергии системы).

Будем теперь медленно и плавно перемещать одну из стенок ящика. Если газ Больцмана–Гиббса находился в состоянии статистического равновесия, то на достаточно большом временном интервале состояние газа будет мало отличаться от его соответствующего равновесного состояния. Если же газ не был в статистическом равновесии, то через достаточно большое (но конечное) время он придет в состояние, близкое к состоянию статистического равновесия.

Автор благодарен А.И. Нейштадту и Д.В. Трещеву за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02–01–01059) и гранта поддержки ведущих научных школ (НШ–136.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А.* В кн.: Избранные труды. М.: Наука, 1974. Т. 3. С. 385–412.
2. *Kozlov V.V.* // Reg. and Chaot. Dyn. 2001. V. 6. № 3. P. 235–251.
3. *Козлов В.В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М.; Ижевск: ИКИ, 2002.
4. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* // ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 388–400.
5. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
6. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002.
7. *Kasuga T.* // Proc. Jap. Acad. 1961. V. 37. № 7. P. 366–371.
8. *Синай Я.Г.* // УМН. 1970. Т. 25. № 2. С. 141–192.
9. *Gallavotti G., Ornstein D.* // Communs Math. Phys. 1974. V. 38. № 2. P. 83–101.