ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 393, № 4, с. 453–455

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55+531.32

СПЕКТР ЛИНЕЙНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА АРТИНА

© 2003 г. Академик **В. В. Козлов**

Поступило 01.09.2003 г.

1. ЛАГРАНЖЕВЫ СИНГУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим линейную гамильтонову систему

$$\dot{x} = IAx, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{1}$$

где I – симплектическая единичная матрица ($I^2 = -E$), A – невырожденная симметричная матрица, задающая функцию Гамильтона

$$H = \frac{A(x, x)}{2}. \tag{2}$$

Систему (1) можно рассматривать в комплексном фазовом пространстве $\mathbb{C}^{2n}$, считая координаты $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ комплексными величинами.

Спектр линейной системы (1) инвариантен при отражении относительно вещественной и мнимой осей. Ввиду невырожденности квадратичной формы (2) спектр может содержать только вещественные пары, чисто мнимые пары и четверки комплексных чисел. В типичном случае, когда все собственные значения оператора IA простые, линейным каноническим преобразованием $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \to (p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ (вообще говоря, комплексным) система (1) приводится к гамильтоновой системе с функцией Гамильтона

$$H = \sum_1^n \lambda_j p_j q_j. \tag{3}$$

Числа $\pm\lambda_j$ ($1 \le j \le n$) составляют спектр системы (1). Ввиду предположения о невырожденности квадратичная форма (3) над полем $\mathbb{C}$ будет нейтральной. Следовательно, линейное пространство $\mathbb{C}^{2n} = \{x\}$ с квадратичной формой (2) в качестве метрики будет пространством Артина (относительно геометрии артиновых пространств см. [1]).

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Рассмотрим совокупность всех n-мерных плоскостей в $\mathbb{C}^{2n}$, проходящих через начало координат. Они образуют комплексное грассманово многообразие G размерности n^2. Сингулярные плоскости (целиком лежащие в изотропном конусе $\{H = 0\}$) составляют гладкое подмногообразие S, размерность которого равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Совокупность всех лагранжевых плоскостей (на которых симплектическая 2-форма (Ix', x'') обращается в нуль) также образует гладкое подмногообразие L размерности $\frac{n(n-1)}{2}$. Так как

$$\dim G = \dim S + \dim L,$$

то в типичной ситуации S и L пересекаются по конечному множеству точек. Оказывается, число точек пересечения S и L и структура сингулярных лагранжевых плоскостей тесно связаны со строением спектра системы (1).

Сначала отметим простое

Предложение 1. *Сингулярная лагранжева плоскость является инвариантной для системы* (1).

Точно так же инвариантные лагранжевы плоскости будут сингулярными плоскостями.

Теорема 1. *Если все собственные числа гамильтоновой системы* (1) *простые, то многообразия S и L пересекаются ровно в 2^n различных точках.*

В случаях кратных собственных значений пересечение $S \cap L$ может быть непрерывным континуумом (см. [2]).

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть Λ – сингулярная лагранжева плоскость. Она задается n линейно-независимыми (над $\mathbb{C}$) уравнениями

$$(a, x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_{2n} = 0, \quad a_j \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Векторы a из (4) с комплексными компонентами образуют n-мерное линейное пространство.

Совокупность векторов из этого пространства с вещественными компонентами, очевидно, является линейным подпространством (уже над полем $\mathbb{R}$). Размерность этого подпространства назовем вещественной коразмерностью плоскости Λ и обозначим его $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\Lambda$. Число $2n - \operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\Lambda = \dim_{\mathbb{R}}\Lambda$ назовем вещественной размерностью плоскости Λ в $\mathbb{C}^{2n}$. Ясно, что $\dim_{\mathbb{R}}\Lambda \geq n$.

Предположим, что собственные значения оператора IA простые. Пусть r – количество вещественных пар собственных значений $\pm a$, s – количество чисто мнимых пар $\pm ib$, u – количество комплексных четверок $\pm a \pm ib$. Ввиду невырожденности оператора IA

$$r + s + 2u = n. \tag{5}$$

Предложение 2. *Если Λ – лагранжева сингулярная плоскость, то*

$$n + s \leq \dim_{\mathbb{R}}\Lambda \leq n + s + 2u = 2n - r.$$

В частности, если спектр системы (1) не содержит комплексных четверок, то вещественная размерность всех лагранжевых сингулярных плоскостей одинаковая.

Теорема 2. *Количество различных лагранжевых сингулярных плоскостей с вещественной размерностью $n + s + 2j$, $0 \leq j \leq u$, равно*

$$C_u^j \cdot 2^{r+s+u}. \tag{6}$$

Ввиду (5)

$$\sum_{j=0}^{u} C_u^j \cdot 2^{r+s+u} = 2^n,$$

как и утверждается в теореме 1.

Укажем основную идею доказательства теоремы 2. Она использует теорию нормальных форм Вильямсона [3]. Фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$ распадается в прямую сумму кососортогональных (относительно стандартной симплектической структуры $\mathbb{R}^{2n}$) инвариантных подпространств так, что гамильтониан (2) представляется в виде суммы квадратичных форм на этих подпространствах. Такие формы называются вещественными частичными гамильтонианами. В подходящих канонических переменных простой вещественной паре собственных чисел $\pm a$ соответствует частичный гамильтониан

$$apq, \tag{7}$$

чисто мнимой паре $\pm ib$ – гамильтониан

$$\pm\frac{b(p^2 + q^2)}{2}, \tag{8}$$

а четверке собственных чисел $\pm a \pm ib$ – гамильтониан

$$-a(p_1q_1 + p_2q_2) + b(p_1q_2 - p_2q_1). \tag{9}$$

Сингулярная лагранжева плоскость для системы с гамильтонианом (7) имеет один из двух видов

$$p = 0 \quad \text{или} \quad q = 0. \tag{10}$$

Гамильтонова система с гамильтонианом (8) имеет две комплексные сингулярные лагранжевы плоскости

$$p = \pm iq, \tag{11}$$

а система с гамильтонианом (9) – четыре:

$$\begin{gathered} p_1 = p_2 = 0, \quad q_1 = q_2 = 0; \\ p_1 = ip_2, \quad q_1 = iq_2; \quad p_1 = -ip_2, \quad q_1 = -iq_2. \end{gathered} \tag{12}$$

Выбирая из каждой совокупности вида (10), (11) по одному уравнению, а из совокупности вида (12) по два парных уравнения, получаем систему n линейных уравнений в $\mathbb{R}^{2n}$ с комплексными коэффициентами, которые задают n-мерные сингулярные лагранжевы плоскости. Их общее количество, очевидно, 2^n. Теорема 1 утверждает, что других сингулярных лагранжевых плоскостей нет, если все собственные значения системы (1) простые. Вещественная коразмерность Λ равна сумме числа уравнений вида (10) и числа уравнений вида (12), не содержащих мнимой единицы. Элементарные комбинаторные соотношения приводят к искомой формуле (6).

Укажем одно из следствий развиваемого здесь подхода. Предположим, что нам известны все сингулярные лагранжевы n-мерные плоскости гамильтоновой системы (1). Тогда можно вычислить их вещественные размерности и тем самым найти количества вещественных пар, мнимых пар и комплексных четверок собственных значений. Действительно, согласно предложению 2, минимальное (максимальное) значение вещественной размерности равно $n + s$ $(2n - r)$. Следовательно, становятся известными числа s и r. Оставшееся число комплексных четверок u находится из формулы (5).

3. ПРИЛОЖЕНИЕ К СИСТЕМАМ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

Проиллюстрируем сказанное примером из теории линейных колебаний механических систем, которые описываются уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Px = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Здесь $\Gamma^T = -\Gamma$ – матрица гироскопических сил, P – симметричная матрица, задающая потенциальную энергию $V = \dfrac{(Px, x)}{2}$. Можно считать, что P имеет диагональный вид $\operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$.

Функция Гамильтона совпадает с полной энергией $\dfrac{(\dot{x}, \dot{x})}{2} + V$, канонические импульсы определяются по правилу $y = \dot{x} + \frac{\Gamma x}{2}$, а симплектическая структура фазового пространства $\mathbb{R}^{2n} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ имеет канонический вид $\sum dy_j \wedge dx_j$. Пусть $\Lambda = \{y = Dx\}$ – n-мерная плоскость, проходящая через начало координат. Условие того, что Λ является сингулярной и лагранжевой, сводится к квадратичному матричному уравнению

$$D^2 - \frac{D\Gamma - \Gamma D}{2} + P - \frac{\Gamma^2}{4} = 0, \tag{14}$$

причем $D^T = D$. Отметим, что (14) есть условие инвариантности плоскости Λ.

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s > 0$, а $\mu_{s+1}, \mu_{s+2}, \ldots, \mu_n < 0$. Число $r = n - s$ называется степенью неустойчивости (по Пуанкаре) системы (13). Будем предполагать, что среди чисел μ_j нет равных.

Положим сначала $\Gamma = 0$. Тогда матричное уравнение (14) имеет 2^n различных решений

$$D_0 = \operatorname{diag}(\pm i\sqrt{\mu_1}, \ldots, \pm i\sqrt{\mu_s}, \pm\sqrt{-\mu_{s+1}}, \ldots, \pm\sqrt{-\mu_n}).$$

Эти матрицы отличаются комбинациями знаков + и –. Ясно, что здесь $u = 0$ и вещественная размерность плоскости $\{y = D_0x\}$ равна $2n - r = n + s$.

Будем искать решения квадратного уравнения (14) в виде ряда по степеням параметра ε, заменяя Γ на $\varepsilon\Gamma$ и полагая затем $\varepsilon = 1$:

$$D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots \tag{15}$$

Коэффициенты D_j, $j \geq 1$, последовательно находим из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} D_0D_1 + D_1D_0 + \frac{\Gamma D_0 - D_0\Gamma}{2} = 0, \\ D_0D_2 + D_2D_0 + D_1^2 + (\Gamma D_1 - D_1\Gamma) - \frac{\Gamma^2}{4} = 0, \\ D_0D_3 + D_3D_0 + D_1D_2 + D_2D_1 + \frac{\Gamma D_2 - D_2\Gamma}{2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{16}$$

Итак, пусть $D_0 = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, причем $d_j^2 = -\mu_j$.

Лемма 1. *Если $d_i + d_j \neq 0$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, то уравнение $D_0X + XD_0 = Y$ разрешимо относительно X в классе комплексных симметричных матриц, причем*

$$\|X\| \leq c\|Y\|,$$

где $\|\cdot\|$ – любая матричная норма, а

$$c \leq \max_{i,j}|d_i + d_j|^{-1}.$$

Отметим, что условия леммы заведомо выполнены, если среди чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ нет равных. Это утверждение гарантирует разрешимость цепочки соотношений (16) относительно $D_1, D_2, \ldots$ Положим

$$\left\|D_1 - \frac{\Gamma}{2}\right\| = d^-, \quad \left\|D_1 + \frac{\Gamma}{2}\right\| = d^+, \quad 2d = d^- + d^+.$$

Теорема 3. *Ряд* (15) *сходится при всех* $|\varepsilon| \leq 1$, *если*

$$cd < \frac{1}{4}. \tag{17}$$

Отметим, что если при изменении параметра ε пары вещественных или чисто мнимых собственных значений системы (13) сталкиваются и превращаются в комплексные четверки, то нарушается свойство аналитичности матричной функции $\varepsilon \to D(\varepsilon)$.

Теорема 4. *Предположим, что среди чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ нет равных и выполнены все 2^n условий* (17).

Тогда линейная система (13) *имеет ровно r вещественных пар и $s = n - r$ чисто мнимых пар собственных значений.*

Доказательство теоремы 4 использует теорему 2 и тот факт, что в интервале аналитичности матричной функции $D(\varepsilon)$ вещественная размерность плоскостей $\{y = D(\varepsilon)x\}$ не меняется. Кроме того, для почти всех ε из этого интервала спектр системы (13) будет простым.

В качестве примера рассмотрим случай $n = 2$, и пусть

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix},$$

причем $a > b > 0$. Если $\gamma = 0$, то система (13) имеет две пары $\pm\sqrt{a}$, $\pm\sqrt{b}$ вещественных собственных значений. При увеличении $|\gamma|$ эти пары движутся навстречу друг другу и сливаются при $|\gamma| = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Теорема 4 дает достаточное условие вещественности собственных значений системы (13):

$$|\gamma| < \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{4\sqrt{a}}.$$

Ясно, что правая часть этого неравенства не превосходит $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a \geq b$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта "Ведущие научные школы" (НШ–136.2003.1) и INTAS (00–221).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984.
2. *Козлов В.В.* // ПММ. 1992. Т. 56. В. 6. С. 900–906.
3. *Williamson J.* // Amer. J. Math. 1936. V. 58. № 1. С. 141–163.