ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 389, № 5, с. 605–607

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 531.19

СЛАБЫЕ ПРЕДЕЛЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2003 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 09.01.2003 г.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \omega, \quad \dot{\omega} = f(t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \bmod 2\pi)$ – угловые координаты на n-мерном торе, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, f – заданная вектор-функция t. Предположим, что функция f дважды интегрируема (по Риману) по времени t. Уравнения (1) описывают движение механической системы с конфигурационным пространством $\mathbb{T}^n = \{x\}$, кинетической энергией $T = \frac{(\omega, \omega)}{2}$ и находящейся под действием внешней силы f.

Если $f = 0$, то (1) является вполне интегрируемой гамильтоновой системой, причем координаты x, ω служат переменными действие–угол. Такой же вид будут иметь возмущения вполне интегрируемых гамильтоновых систем в общем невырожденном случае.

Следуя Гиббсу, в фазовом пространстве $\Gamma = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ зададим вероятностную меру $\rho(x, \omega)d^nxd^n\omega$ с суммируемой плотностью ρ. Поток системы (1) переносит эту меру, так что плотность $\rho_t(x, \omega)$ становится функцией времени. Поскольку дивергенция правой части системы (1) равна нулю, то плотность распределения вероятностей удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho_t}{\partial x}, \omega\right) + \left(\frac{\partial \rho_t}{\partial \omega}, f\right) = 0 \tag{2}$$

с начальным условием $\rho_0 = \rho$.

Пусть φ: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – измеримая ограниченная функция. Поскольку $\rho_t \in L_1(\Gamma)$ при всех t, то интеграл

$$K(t) = \int_\Gamma \rho_t(x, \omega)\varphi(x)\, d^n x\, d^n\omega$$

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва

будет корректно определенной функцией времени. Если φ – характеристическая функция измеримой области $D \subset \mathbb{T}^n$, то $K(t)$ – это доля гамильтоновых систем из ансамбля Гиббса, которые в момент времени t находятся в области D.

Согласно эргодической теореме, для почти всех x, ω предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \rho(x - \omega t, \omega)\, dt \tag{3}$$

существует, почти всюду совпадает с интегрируемой функцией $\bar{\rho}(\omega) \ge 0$ и

$$\int_\Gamma \bar{\rho}\, d^n x\, d^n\omega = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\rho}(\omega) d^n\omega = 1.$$

Таким образом, функцию $\bar{\rho}$ можно трактовать как плотность предельной (в слабом смысле) вероятностной меры, которая отвечает статистическому равновесию рассматриваемой системы.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *В указанных предположениях*

$$\lim_{t \to \pm\infty} K(t) = \int_\Gamma \bar{\rho}(\omega)\varphi(x)\, d^n x\, d^n\omega = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(x) d^n x. \tag{4}$$

Следствие. *Пусть φ – характеристическая функция измеримой области D. Тогда*

$$\lim_{t \to \pm\infty} K(t) = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \mathbb{T}^n}.$$

Таким образом, при неограниченном возрастании времени системы из ансамбля Гиббса равномерно распределены на n-мерном конфигурационном торе $\mathbb{T}^n$. При $f = 0$ этот результат установлен ранее в [1].

Доказательство теоремы 1 следует методу работы [1]. Основной момент заключается в рассмотрении случая, когда $\varphi(x) = \exp i(m, x)$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Надо показать, что при $m \neq 0$

$$\int_\Gamma \rho_t(x, \omega) e^{i(m, x)} d^n x\, d^n \omega \to 0, \qquad (5)$$

когда $t \to \pm\infty$. Для этого сперва решим уравнение Лиувилля (2):

$$\rho_t(x, \omega) = \rho(x - \omega t + h(t), \omega - g(t)), \qquad (6)$$

где ρ – данное Коши, $\dot{g}(t) = f(t)$, $g(0) = 0$, а $\dot{h}(t) = tf(t)$, причем $h(0) = 0$. Формула (6) проверяется прямыми вычислениями.

Таким образом,

$$K(t) = \int_\Gamma \rho(x - \omega t + h, \omega - g)\varphi(x)\, d^n x\, d^n \omega =$$

$$= \int_\Gamma \rho(x, \omega)\varphi(x + \omega t + \lambda(t))\, d^n x\, d^n \omega,$$

где $\dot{\lambda}(t) = g(t)$, $\lambda(0) = 0$. Легко проверить, что $\lambda = -h$.

Полагая теперь $\varphi = \exp i(m, x)$, получаем явную формулу для интеграла из (5)

$$e^{i(m, \lambda)} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \rho(x, \omega) e^{i(m, x)} e^{i(m, \omega)t} d^n x\, d^n \omega =$$

$$= e^{i(m, \lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_m(\omega) e^{i(m, \omega)t} d^n \omega, \qquad (7)$$

где

$$\rho_m(\omega) = \int_{\mathbb{T}^n} \rho(x, \omega) e^{i(m, x)} d^n x.$$

Поскольку ρ_m – интегрируемая функция, то для $m \neq 0$ интеграл (7) стремится к нулю при $t \to \pm\infty$ (согласно теории преобразования Фурье). Что и требовалось.

З а м е ч а н и е. Наличие силы f приводит к появлению дополнительного ограниченного и осциллирующего множителя $\exp i(m, \lambda(t))$ в (7).

Теорему 1 можно расширить в разных направлениях. Пусть, например, начальная плотность ρ принадлежит $L_2(\Gamma)$ (следовательно, $\rho_t \in L_2$ при всех t) и φ – некоторая функция из $L_2(\Gamma)$. Тогда корректно определена функция времени

$$K(t) = \int_\Gamma \rho_t \varphi\, d^n x\, d^n \omega. \qquad (8)$$

Оказывается,

$$\lim_{t \to \pm\infty} K(t) = \int_\Gamma \bar{\rho}\varphi\, d^n x\, d^n \omega, \qquad (9)$$

где $\bar{\rho}$ определяется пределом (3). Таким образом, $\bar{\rho}$ – слабый предел плотности ρ_t при неограниченном возрастании времени. Состояние системы с плотностью распределения вероятностей $\bar{\rho}$ можно назвать статистическим (тепловым) равновесием. Подчеркнем, что наличие нестационарной возмущающей силы $f(t)$ не влияет на стремление системы к тепловому равновесию.

Пусть

$$S_t = -\int_\Gamma \rho_t \ln \rho_t\, d^n x\, d^n \omega$$

есть энтропия рассматриваемой системы в момент времени t. Легко показать, что $S_t \equiv \text{const}$. Это обобщение наблюдения Пуанкаре о постоянстве тонкой энтропии автономных динамических систем (см. [2]). Можно ввести энтропию системы в состоянии статистического равновесия

$$S_\infty = -\int_\Gamma \bar{\rho} \ln \bar{\rho}\, d^n x\, d^n \omega.$$

Имеет место простое неравенство

$$S_t \leq S_\infty, \qquad (10)$$

которое отвечает второму началу термодинамики для необратимых процессов. Формула для приращения энтропии $S_\infty - S_0$ находится в соответствии с феноменологической термодинамикой (обсуждение см. в [1]). Правда, в общем случае неравенство (10) справедливо лишь для адиабатических процессов, когда нет притока тепла. Для рассматриваемой системы $\dot{T} = (\omega, f) \not\equiv 0$.

Заметим, что интеграл (8) определен и в том случае, когда $\rho \in L_p(\Gamma)$, $\varphi \in L_q(\Gamma)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Здесь также справедливо предельное соотношение (9). В теореме 1 $p = 1$, а $q = \infty$ (напомним, что класс L_∞ составляют существенно ограниченные измеримые функции).

СИНГУЛЯРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим простую задачу о колебаниях шарика единичной массы между двумя стенками $0 \leq z \leq a$; предположим, что на шарик действует сила $f(t)$. Например, можно считать, что шарик заряжен и находится в переменном электрическом поле. На первый взгляд эта система относится к типу (1) – внешнее возмущение интегрируемой системы. Однако это не так и задача сводится к анализу параметрических возмущений.

Перейдем к двулистному накрытию отрезка окружностью $\mathbb{T}^1 = \{x \bmod 2\pi\}$, вводя угловую переменную по правилу: $x = \frac{\pi z}{a}$, когда z возрастает от 0 до a, и $x = 2\pi - \frac{\pi z}{a}$, когда z убывает от a до 0. Уравнение движения шарика принимает вид

$$\ddot{x} = -f(t)V'_x, \tag{11}$$

где $V(x) = -\frac{\pi x}{a}$, когда $0 < x < \pi$, и $V(x) = \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi^2}{a}$, когда $\pi < x < 2\pi$. Задача об эволюции вероятностей меры уравнения (11) более сложная (по сравнению с изучением системы (1)). Она решается лишь при некоторых дополнительных условиях.

Пусть, например, $f(t)$ = const. Тогда уравнение (11) явно интегрируется и нетрудно показать, что слабый предел плотности вероятностной меры – функция от полной энергии $\frac{\dot{x}^2}{2} + fV(x)$. Интегрируя по скорости, получаем плотность распределения в конфигурационном пространстве, которая, вообще говоря, не будет постоянной (см. [1]).

Предположим, что функция $f(t)$ монотонно возрастает при $t \to +\infty$ и

$$\ddot{f}f \le \frac{3}{2}\dot{f}^2. \tag{12}$$

Используя метод работы [3], можно показать, что при $t \to +\infty$ все решения $x(t)$ уравнения (11) стремятся к точке минимума потенциала $V(x)$. Следовательно, в этих предположениях предельная плотность распределения положений шарика на отрезке совпадает с дельта-функцией $\delta(z - a)$.

Эти наблюдения можно обобщить. Пусть $M^n = \{x\}$ – компактное конфигурационное пространство механической системы с n степенями свободы, T – кинетическая энергия – положительно-определенная квадратичная форма по импульсам $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $V: M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, а произведение $f(t)V$ – потенциальная энергия. Фазовое пространство Γ – кокасательное расслоение M, а функция Гамильтона $H = T + f(t)V$. Пусть ρ_t – плотность вероятностного распределения в фазовом пространстве Γ, переносимая потоком гамильтоновой системы, и $\rho_0 = \rho$ – данное Коши.

Теорема 2. *Пусть мера $\rho d^n x d^n \omega$ абсолютно непрерывна относительно меры Лиувилля на Γ, функция V имеет лишь невырожденные критические точки на M, функция $t \mapsto f(t)$ монотонно возрастает с увеличением t и выполнено* (12). *Если φ: $M \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция измеримой области на M, не содержащей точек локального минимума V, то*

$$\int_{\Gamma} \rho_t(x, y)\varphi(x)\, d^n x\, d^n\omega \to 0$$

при $t \to +\infty$.

Таким образом, предельное распределение ансамбля Гиббса на конфигурационном пространстве M будет сингулярным: эта мера сосредоточена в конечном числе точек – локальных минимумов функции V. Теорема 2 выводится из результата работы [3]: при указанных условиях почти все решения уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H = T + fV$ таковы, что $x(t)$ стремится к одному из локальных минимумов функции V при неограниченном увеличении времени. При этом (в соответствии с теоремой Лиувилля о сохранении фазового объема гамильтоновых систем) импульсы $y(t)$ будут неограниченными. Поэтому при стремлении системы к устойчивому равновесию частоты малых колебаний неограниченно возрастают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (99–01–01096 и 01–01–22004) и INTAS (00–221).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kozlov V.V.* // Reg. and Chaot. Dyn. 1999. V. 4. № 2. P. 44–54.
2. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1974. Т. 3.
3. *Козлов В.В.* // ПММ. 1991. Т. 55. В. 1. С. 12–19.