СЛАБЫЕ ПРЕДЕЛЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2003 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 09.01.2003 г.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \omega, \quad \omega = f(t),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \mod 2\pi)$ — угловые координаты на $n$-мерном торе, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n, f$ — заданная вектор-функция $t$. Предположим, что функция $f$ дважды интегрируема (по Риману) по времени $t$. Уравнения (1) описывают движение механической системы с конфигурационным пространством $\mathbb{T}^n = \{ x \}$, кинетической энергией $T = \frac{(\omega, \omega)}{2}$ и находящейся под действием внешней силы $f$.

Если $f = 0$, то (1) является вполне интегрируемой гамильтоновой системой, причем координаты $x, \omega$ служат переменными действия—угол. Такой же вид будет иметь возмущения вполне интегрируемых гамильтоновых систем в общем ненормированном случае.

Следуя Гиббсу, в фазовом пространстве $\Gamma = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ зададим вероятностную меру $\rho(x, \omega) d^n x d^n \omega$ с суммируемой плотностью $\rho$. Поток системы (1) переносит эту меру, так что плотность $\rho(x, \omega)$ становится функцией времени. Поскольку дивергенция правой части системы (1) равна нулю, то плотность распределения вероятностей удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} , \omega \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \omega} , f \right) = 0$$

с начальным условием $\rho_0 = \rho$.

Пусть $\phi: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — измеримая ограниченная функция. Поскольку $\rho_t \in L_1(\Gamma)$ при всех $t$, то интеграл

$$K(t) = \int_{\Gamma} \rho_t(x, \omega) \phi(x) d^n x d^n \omega$$

будет корректно определенной функцией времени. Если $\phi$ — характеристическая функция измеримой области $D \subset \mathbb{T}^n$, то $K(t)$ — это доля гамильтоновых систем из ансамбля Гиббса, которые в момент времени $t$ находятся в области $D$.

Согласно эргодической теореме, для почти всех $x, \omega$ предел

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \rho(x - \omega t, \omega) dt$$

существует, почти всюду совпадает с интегрируемой функцией $\bar{\rho}(\omega) \geq 0$ и

$$\int_{\mathbb{T}^n} \bar{\rho} d^n x d^n \omega = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\rho}(\omega) d^n \omega = 1.$$

Таким образом, функцию $\bar{\rho}$ можно трактовать как плотность предельной (в слабом смысле) вероятностной меры, которая отвечает статистическому равновесию рассматриваемой системы.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. В указанных предположениях

$$\lim_{t \to +\infty} K(t) = \int_{\Gamma} \bar{\rho}(\omega) \phi(x) d^n x d^n \omega =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \phi(x) d^n x.$$

Следствие. Пусть $\phi$ — характеристическая функция измеримой области $D$. Тогда

$$\lim_{t \to +\infty} K(t) = \frac{\text{mes} D}{\text{mes} \mathbb{T}^n}.$$

Таким образом, при неограниченном возрастании времени системы из ансамбля Гиббса равномерно распределены на $n$-мерном конфигурационном торе $\mathbb{T}^n$. При $f = 0$ этот результат установлен ранее в [1].

Доказательство теоремы 1 следует методу работы [1]. Основной момент заключается

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук, Москва
в рассмотрении случая, когда \( \varphi(x) = \exp(i(m, x)) \), \( m \in \mathbb{Z}^n \). Надо показать, что при \( m \neq 0 \)
\[
\int_\Gamma \rho_t(x, \omega) e^{i(m, x)} d^n x d^n \omega \to 0,
\]
(5)
когда \( t \to \pm \infty \). Для этого свернем уравнение Лиувилля (2):
\[
\rho_t(x, \omega) = \rho(x - \omega t + h(t), \omega - g(t)),
\]
(6)
где \( \rho \) — данное Коши, \( g(t) = f(t), g(0) = 0, a h(t) = t f(t) \), причем \( h(0) = 0 \). Формула (6) проверяется прямыми вычислениями.

Таким образом,
\[
K(t) = \int_\Gamma \rho(x - \omega t + h, \omega - g) \varphi(x) d^n x d^n \omega = \rho_m(\omega)
\]
\[
= \int_\Gamma \rho(x, \omega) \varphi(x + \omega t + \lambda(t)) d^n x d^n \omega,
\]
(7)
где \( \lambda(t) = g(t), \lambda(0) = 0 \). Легко проверить, что \( \lambda = -h \).

Полагая теперь \( \varphi = \exp(i(m, x)) \), получаем явную формулу для интеграла из (5)
\[
\int_\Gamma \rho(x, \omega) e^{i(m, x)} d^n x d^n \omega = \int_\Gamma \rho(x, \omega) e^{i(m, \omega)} d^n x d^n \omega,
\]
(7)
где \( \rho_m(\omega) = \int_{T^n} \rho(x, \omega) e^{i(m, x)} d^n x \).

Поскольку \( \rho_m \) — интегрируемая функция, то для \( m \neq 0 \) интеграл (7) стремится к нулю при \( t \to \pm \infty \) (согласно теории преобразования Фурье). Что и требовалось.

З а м е ч а н и е. Наличие силы \( f \) приводит к появлению дополнительного ограниченного и осциллирующего множителя \( \exp(i(m, \lambda(t))) \) в (7).

Теорему 1 можно расширить в разных направлениях. Пусть, например, начальная плотность \( \rho \) принадлежит \( L_1(\Gamma) \) (следовательно, \( \rho_t \in L_1(\Gamma) \) для всех \( t \)) и \( \varphi \) — некоторая функция из \( L_1(\Gamma) \). Тогда корректно определена функция времени
\[
K(t) = \int_\Gamma \rho_t(\omega) d^n x d^n \omega.
\]
(8)
Оказывается,
\[
\lim_{t \to \pm \infty} K(t) = \int_\Gamma \rho(\omega) d^n x d^n \omega,
\]
(9)
где \( \rho \) определяется пределом (3). Таким образом, \( \rho \) — слабый предел плотности \( \rho_t \) при неограниченном возрастании времени. Состояние системы с плотностью распределения вероятностей \( \rho \) можно назвать статистическим (телловым) равновесием. Подчеркнем, что наличие нестационарной возмущающей силы \( f(t) \) не влияет на стремление системы к тепловому равновесию.

Пусть
\[
S_t = -\int_\Gamma \rho_t \ln \rho_t d^n x d^n \omega
\]
есть энтропия рассматриваемой системы в момент времени \( t \). Легко показать, что \( S_t \equiv \text{const.} \) Это обобщение наблюдения Пуанкаре о постоянстве тонкой энтропии автономных динамических систем (см. [2]). Можно ввести энтропию системы в состоянии статистического равновесия
\[
S_\infty = -\int_\Gamma \bar{\rho} \ln \bar{\rho} d^n x d^n \omega.
\]
(10)
Имеет место простое неравенство
\[
S_t \leq S_\infty.
\]
(10)
которое отвечает второму началу термодинамики для необратимых процессов. Формула для приращения энтропии \( S_\infty - S_0 \) находится в соответствии с феноменологической термодинамикой (обсуждение см. в [1]). Правда, в общем случае неравенство (10) справедливо лишь для аднабатических процессов, когда нет притока тепла. Для рассматриваемой системы \( T = (\omega, f) \neq 0 \).

Заметим, что интеграл (8) определен и в том случае, когда \( \rho \in L_p(\Gamma), \varphi \in L_q(\Gamma), \) где \( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \).

Здесь также справедливо предельное соотношение (9). В теореме 1 \( p = 1 \), а \( q = \infty \) (напомним, что класс \( L_\infty \) составляет существенно ограниченные измеримые функции).

С И Н Г У Л Я Р Н Ы Е П Р Е Д Е Л Ь Н Ы Е РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим простую задачу о колебаниях шарика единичной массы между двумя стенками \( 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon \leq a \); предположим, что на шарик действует сила \( f(t) \). Например, можно считать, что шарик заражен и находится в переменном электрическом поле. На первый взгляд эта система относится к типу (1) — внешнее возмущение интегрируемой системы. Однако это не так и задача сводится к анализу параметрических возмущений.

Перейдем к двумиству накрыть отрезка окружностью \( T^n = \{x \mod 2\pi\}, \) вводя угловую пе-
ременную по правилу: \( x = \frac{\pi z}{a} \), когда \( z \) возрастает от 0 до \( a \), и \( x = 2\pi - \frac{\pi z}{a} \), когда \( z \) убывает от \( a \) до 0.
Уравнение движения шарика принимает вид

\[
\dot{x} = -f(t)V_x,
\]  
(11)

где \( V(x) = \frac{\pi x}{a} \), когда \( 0 < x < \pi \), и \( V(x) = \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi^2}{a} \), когда \( \pi < x < 2\pi \). Задача об эволюции вероятностей меры уравнения (11) более сложная (по сравнению с изучением системы (1)). Она решается лишь при некоторых дополнительных условиях.

Пусть, например, \( f(t) = \text{const} \). Тогда уравнение (11) явно интегрируется и нетрудно показать, что слабый предел плотности вероятности - функция от полной энергии \( \frac{\dot{x}^2}{2} + fV(x) \). Интегрируя по скорости, получаем плотность распределения в конфигурационном пространстве, которая, вообще говоря, не будет постоянной (см. [1]).

Предположим, что функция \( f(t) \) монотонно возрастает при \( t \to +\infty \) и

\[
f f \leq \frac{3}{2} f_x^2.
\]  
(12)

Используя метод работы [3], можно показать, что при \( t \to +\infty \) все решения \( x(t) \) уравнения (11) стремятся к точке минимума потенциала \( V(x) \). Следовательно, в этих предположениях предельная плотность распределения положений шарика на отрезке совпадает с дельта-функцией \( \delta(z - a) \).

Эти наблюдения можно обобщить. Пусть \( M^a = \{ x \} \) - компактное конфигурационное пространство механической системы с n степенями свободы, \( T \) - кинетическая энергия - положительно-определенная квадратичная форма по импульсам \( y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \); \( V: M \to \mathbb{R} \) - гладкая функция, а произведение \( f(t)V \) - потенциальная энергия. Фазовое пространство \( \Gamma \) - кокасательное расслоение \( M \), а функция Гамильтона \( H = T + f(t)V \). Пусть \( \rho \) - плотность вероятностного распределения в фазовом пространстве \( \Gamma \), переносимая потоком гамильтоновой системы, и \( \rho_0 \) = \( \rho \) - данное Коши.

Теорема 2. Пусть меру \( pdx\omega \) абсолютно непрерывна относительно меры Линьвилля на \( \Gamma \), функция \( V \) имеет лишь невырожденные критические точки на \( M \), функция \( t \to f(t) \) монотонно возрастает с увеличением \( t \) и выполнено (12).
Если \( \Phi: M \to \mathbb{R} \) - характеристическая функция измеримой области на \( M \), не содержащей точек локального минимума \( V \), то

\[
\int_{\Gamma} \rho,(x, y) \phi(x) d^nxd^\omega \to 0
\]

при \( t \to +\infty \).

Таким образом, предельное распределение ансамбля Гиббса на конфигурационном пространстве \( M \) будет сингулярным: эта мера сосредоточена в конечном числе точек - локальных минимумов функции \( V \). Теорема 2 выводится из результаты работы [3]: при указанных условиях почти все решения уравнений Гамильтона с гамильтоианом \( H = T + fV \) таковы, что \( x(t) \) стремится к одному из локальных минимумов функции \( V \) при неограниченном увеличении времени. При этом (в соответствии с теоремой Линьвилля о сохранении фазового объема гамильтоновых систем) импульсы \( y(t) \) будут неограниченными. Поэтому при стремлении системы к устойчивому равновесию частоты малых колебаний неограниченно возрастают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (99-01-01096 и 01-01-22004) и INTAS (00-221).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ