Математика

УДК 511.3

УСЛОВИЯ РАЦИОНАЛЬНОСТИ ОТНОШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И БОЛЬШАЯ ТЕОРЕМА ПОНСЕЛЕ

В. В. Козлов

1. Введение. Пусть $\Phi(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ — многочлен третьей степени, причем вещественные числа a, b, c связаны неравенством

$$a < b < c < 0.$$

Рассмотрим отношение эллиптических интегралов

$$2\Gamma = \int\limits_c^0 \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} \Big/ \int\limits_a^b \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}. \tag{1}$$

Ясно, что Γ — функция от a, b, c. Так как

$$\int\limits_c^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} = \int\limits_a^b \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}, \tag{2}$$

то $\Gamma < \frac{1}{2}$.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma = \frac{p}{q}$ — несократимая правильная дробь. Тогда числа $u = \frac{c}{a}$, $v = \frac{c}{b}$ удовлетворяют диофантову уравнению $F(u,v) = 0$. Вид этого уравнения определяется лишь знаменателем q, причем степень многочлена F не превосходит $\frac{(q^2-1)}{4}$, если q нечетно, и $\frac{q^2}{4} - 1$, если q четно.*

В частности, если отношение Γ рационально, то корни многочлена Φ удовлетворяют *однородному* диофантову уравнению. Например, пусть числа a, b и Γ рациональные. Тогда c — алгебраическое число.

Пример. При $q = 3$

$$F(u,v) = (u-v)^2 + 2(u+v) - 3.$$

Степень этого многочлена равна $\frac{(q^2-1)}{4} = 2$.

Ниже будет указан алгоритм, позволяющий конструктивно получить диофантовы уравнения $F = 0$ для всех $q \geqslant 3$.

Рассмотрим предельный частный случай, когда $a = b$ (точнее, когда $a \to b$). Тогда (как легко проверить)

$$\int\limits_c^0 \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} \to \frac{2}{\sqrt{c-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-c}{c-a}}, \qquad \int\limits_a^b \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} \to \frac{\pi}{\sqrt{c-a}}.$$

Пусть $\Gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-c}{c-a}}$ рационально. Тогда отношение $\frac{c}{a}$ должно быть алгебраическим числом. Действительно, если $\Gamma = \frac{p}{q}$, то $r = \sqrt{\frac{-c}{c-a}} = \operatorname{tg} \frac{\pi p}{q}$. Из элементарной геометрии хорошо известно, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi p}{q}\right)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (одному и тому же для всех p) с целыми коэффициентами, содержащему лишь четные степени. Но тогда r^2 (а также отношение $\frac{c}{a}$) будет алгебраическим числом.

Теорему 1 можно переформулировать в несколько ином виде. Пусть

$$F(k,\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}},\qquad 0<k<1,$$

— неполный эллиптический интеграл I рода с модулем k, $K(k)=F(k,\frac{\pi}{2})$.

Теорема 2. *Пусть отношение* $\frac{K(k,\varphi)}{2K}$ *рационально. Тогда числа* $k^2\sin^2\varphi$ *и* $\sin^2\varphi$ *удовлетворяют диофантову уравнению.*

Следствие. *Пусть* $\varphi=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}$ *или* $\frac{\pi}{3}$ *и* $\frac{F}{2K}\in\mathbb{Q}$. *Тогда модуль* k *будет алгебраическим числом.*

Например, трансцендентная функция, обратная к функции

$$k\mapsto\frac{F(k,\frac{\pi}{4})}{2K(k)},$$

в рациональных точках принимает алгебраические значения.

Доказательство теоремы 2 основано на приведении эллиптического интеграла I рода

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

подстановкой $x=\frac{1}{\sqrt{z}}$ к интегралу

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}},\qquad \Phi(z)=z(z-l)(z-k^2)$$

из (1). Нас интересует отношение интегралов

$$2\Lambda=\int\limits_{æ^{-2}}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}\Bigg/\int\limits_1^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}},\qquad æ=\sin\varphi.$$

Ввиду (2) оно равно

$$1-\int\limits_1^{æ^{-2}}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}\Bigg/\int\limits_0^{k^2}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}.$$

Следовательно, $\Lambda=\frac{1}{2}-\Gamma$. Так как $0<\Gamma<\frac{1}{2}$, то $0<\Lambda<\frac{1}{2}$ (и наоборот). Если $\Lambda\in\mathbb{Q}$, то Γ также представляется правильной дробью и, согласно теореме 1, числа $-\frac{1}{æ^{-2}}$, $\frac{k^2-1}{æ^{-2}}$, $1-\frac{1}{æ^{-2}}$ удовлетворяют однородному диофантову уравнению. Что и требовалось.

В свою очередь теорема 2 является следствием теоремы сложения эллиптических функций. Действительно, пусть $\frac{F}{2K}=\frac{p}{q}$. Тогда $\mathrm{sn}\,(qF)=\mathrm{sn}\,(2Kp)=0$. С другой стороны, $\sin\varphi=\mathrm{sn}\,F$. Используя теоремы сложения эллиптических функций Якоби sn, cn и dn, можно получить рекуррентные формулы, выражающие $\mathrm{sn}\,mz$ через $\mathrm{sn}\,z$. Анализ этих формул приводит в итоге к диофантову уравнению, связывающему числа $k^2\sin^2\varphi$ и $\sin^2\varphi$.

Мы дадим другое доказательство теоремы 1, основанное на свойстве полной интегрируемости некоторой динамической системы, имеющей отношение к большой теореме Понселе.

2. Доказательство теоремы 1 (по Понселе и Кэли). Рассмотрим движение частицы по инерции в области евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2=\{x,y\}$, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1,\qquad a\geqslant b. \tag{3}$$

Предполагается, что удары о границу являются абсолютно упругими: угол падения равен углу отражения. Эта динамическая система, называемая эллиптическим биллиардом, вполне интегрируемая: имеются два независимых первых интеграла (закона сохранения)

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2\quad\text{и}\quad\frac{\dot{x}^2}{a}+\frac{\dot{y}^2}{b}-\frac{(\dot{x}y-x\dot{y})^2}{ab}. \tag{4}$$

Точка обозначает производную по времени.

Как в каждой вполне интегрируемой системе, здесь также можно перейти к переменным *действие-угол*. Проще всего это можно сделать с помощью эллиптических координат Якоби, в которых уравнения движения разделяются [1]. Переход к эллиптическим координатам λ_1, λ_2 осуществляется по формулам

$$x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b}, \qquad y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a}.$$

Координатные линии $\lambda_k = \mathrm{const}$ составляют конфокальные семейства эллипсов и гипербол.

Как показано в [2], переменные λ_1 и λ_2 удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\dot\lambda_k = \frac{\pm 4\sqrt{\Phi(\lambda_k)}}{(\lambda_1-\lambda_2)}, \qquad k=1,2;$$

$$\Phi(z) = (z+a)(z+b)(hz+c),$$

где h — полная энергия движения частицы (половина значения первого интеграла (4)), а c — константа, которая является некоторой комбинацией значений интегралов (4). Без ущерба для общности можно положить $h=1$.

Переменные λ_1 и λ_2 изменяются в интервалах, где $\Phi(\lambda_k) \geqslant 0$. Возможны два основных случая:

(A) $-b < -c < 0$,

(B) $-a < -c < -b$.

В первом из них

$$-a \leqslant \lambda_2 \leqslant -b, \quad -c \leqslant \lambda_1 \leqslant 0,$$

во втором

$$-a \leqslant \lambda_2 \leqslant -c, \quad -b \leqslant \lambda_1 \leqslant 0.$$

В этих предположениях частица движется в криволинейных областях, ограниченных софокусными кониками (в случае A — эллипсами, а в случае B — эллипсом и гиперболой; подробности см. в [2]). В случае A, который будет рассматриваться, софокусная коника является эллипсом $\lambda_1 = -c$ и траектория после отражения от границы ($\lambda_1 = 0$) касается этого эллипса ("малая теорема Понселе").

Перейдем от переменных λ_1, λ_2 к новым угловым переменным $\psi_1, \psi_2 \bmod 2\pi$ по формулам

$$\begin{aligned} &\psi_1 = \frac{\pi}{\tau_1}\int_{-c}^{\lambda_1} \frac{dz}{\pm\sqrt{\Phi(z)}}, \qquad &&\psi_2 = \frac{\pi}{2\tau_2}\int_{-a}^{\lambda_2} \frac{dz}{\pm\sqrt{\Phi(z)}}, \\ &\tau_1 = \int_{-c}^{0} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}, &&\tau_2 = \int_{-a}^{-b} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}; \end{aligned} \tag{5}$$

знаки $\pm$ перед радикалами выбираются в зависимости от направления изменения координат λ_k.

В новых переменных $\psi_k \bmod 2\pi$ уравнения (5) принимают следующий вид:

$$\dot\psi_k = \frac{\omega_k}{f_1 - f_2}, \quad k=1,2,$$

где $\omega_1 = \frac{4\pi}{\tau_1}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau_2}$, а f_k — 2π-периодические функции от ψ_k, получающиеся в результате обращения эллиптических интегралов (5). Коэффициент $\frac{1}{2}$ во второй формуле (5) учитывает то обстоятельство, что только после двукратного полного колебания координаты λ_2 в интервале $[-a,-b]$ частица оказывается в прежнем положении на евклидовой плоскости.

Двумерные торы $\mathbb{T}^2 = \{\psi_1, \psi_2 \bmod 2\pi\}$ — это "лиувиллевы" торы, которые высекают поверхности уровня законов сохранения (4) в фазовом пространстве эллиптического биллиарда как динамической системы. В переменных ψ_k интегральные траектории на торе выпрямляются, и число вращения Пуанкаре $\Gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ становится равным отношению эллиптических интегралов

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\tau_1}{2\tau_2} = \int\limits_{-c}^{0} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} \Big/ 2 \int\limits_{-a}^{-b} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}. \tag{6}$$

Если это отношение рационально, то все траектории на торе замкнуты. Поскольку положение софокусного эллипса, которого касаются прямолинейные отрезки траектории частицы, определяется постоянными интегралов (4), то отсюда сразу же выводится "большая теорема Понселе" в интерпретации Шаля [3] (обсуждение этого круга вопросов см. в [4, 5]).

Важно отметить следующее. Если $\Gamma = \frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты, то, прежде чем замкнуться, частица ровно q раз ударится об эллипс (3). В этом случае координата λ_1 сделает q полных колебаний по отрезку $[-c, 0]$.

Воспользуемся теперь известным условием Кэли, которое является критерием существования n-угольника, описанного около коники K_2 и вписанного в конику K_1. Пусть $(Az, z) = 0$ и $(Bz, z) = 0$ — проективные уравнения коник K_1 и K_2 соответственно. Тогда условия Кэли имеют вид (см. [3, 6])

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots c_{s+1} \\ c_3 & c_4 & \dots c_{s+2} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ c_{s+1} & c_{s+2} & \dots \; c_{2s} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{если} \quad n = 2s + 1,$$

и

$$\begin{vmatrix} c_3 & c_4 & \dots c_{s+1} \\ c_4 & c_5 & \dots c_{s+2} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ c_{s+1} & c_{s+2} & \dots c_{2s-1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{если} \quad n = 2s,$$

где $\sqrt{\det(\lambda A + B)} = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots$. Уравнение эллипса $\lambda_1 = -c$ (которого касается траектория частицы) в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1. \tag{7}$$

Поэтому проективные уравнения коник (3) и (7) задаются матрицами

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(a-c)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(b-c)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, числа c_k, $k \geqslant 0$, из условия Кэли определяются из разложения

$$\left[-(1+\lambda)\left(\frac{1}{a-c} + \frac{\lambda}{a}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{\lambda}{b}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

в ряд по степеням λ. Коэффициенты $\sqrt{-(a-c)(b-c)}c_k$ — многочлены относительно $\frac{(a-c)}{a}$ и $\frac{(b-c)}{b}$ с рациональными коэффициентами степени k. Поэтому условия Кэли переходят в диофантовы уравнения для чисел $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$.

Замечания. 1. Известные доказательства условий Кэли используют (прямо или косвенно) абелеву группу сдвигов на кубической кривой. Эта групповая структура порождает теоремы сложения для эллиптических функций.

2. В работах [7, 8] получены модифицированные условия Кэли для замкнутых n-звенных траекторий эллиптических биллиардов. Они также имеют алгебраический характер и допускают естественное обобщение на многомерный случай.

3. Теорема Понселе в пространствах постоянной кривизны. Большая теорема Понселе (в интерпретации Шаля) справедлива и в n-мерном евклидовом пространстве: если есть замкнутая траектория внутри эллипсоида, касающаяся $n-1$ заданных конфокальных квадрик в $\mathbb{R}^n$, то таких траекторий на самом деле бесконечно много [9]. Однако имеется (даже более естественное) обобщение теоремы Понселе на поверхности постоянной кривизны.

Для определенности рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}$ единичного радиуса

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{8}$$

Коникой на $\mathbb{S}$ назовем пересечение (8) с конусом

$$(Au, u) = 0, \qquad u = (x, y, z)^T. \tag{9}$$

Прямые на $\mathbb{S}$ — это ее большие круги. Пусть имеются две непересекающиеся коники K_1 и K_2 на $\mathbb{S}$. Справедлива "большая теорема Понселе": если имеется замкнутый n-угольник, вписанный в K_1 и описанный около K_2, то таких n-угольников бесконечно много (в действительности через каждую точку K_1 и K_2 проходит один из таких n-угольников). Простое доказательство использует проектирование сферы $\mathbb{S}$ на плоскость P из центра сферы (рис. 1). При таком проектировании коники K_1 и K_2 на сфере перейдут в коники $\widetilde{K}_1$ и $\widetilde{K}_2$ на плоскости, а большие круги на $\mathbb{S}$ — в прямые на P.

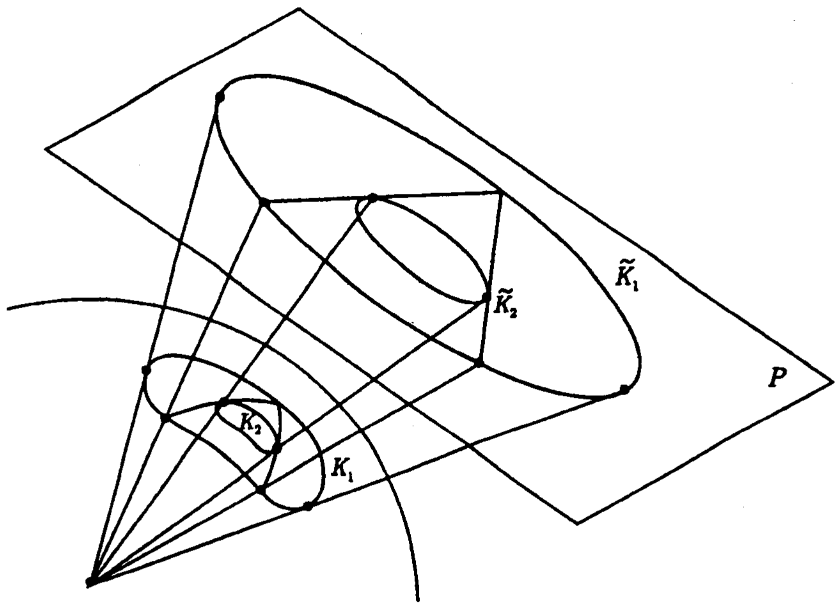

Рис. 1

Пусть (9) — уравнение конуса, пересекающегося со сферой $\mathbb{S}$ (8) по конике K_1. Пусть

$$(Bu, u) = 0 \tag{10}$$

— конус, задающий другую конику K_2. Ясно, что (9) и (10) — проективные уравнения коник $\widetilde{K}_1$ и $\widetilde{K}_2$ на плоскости P. Поэтому условие существования замкнутого вписанного и описанного n-угольника имеет вид упомянутого выше условия Кэли.

Плоскость Лобачевского $\mathbb{L}$ с кривизной -1 можно реализовать как поверхность в $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1, \tag{11}$$

а риманова метрика на $\mathbb{L}$ определяется как ограничение псевдоевклидовой метрики $dx^2+dy^2-dz^2$ на поверхность (11). Легко проверить, что геодезические на $\mathbb{L}$ — это сечения поверхности (11) плоскостями, проходящими через начало координат. Кониками на $\mathbb{L}$ назовем пересечения поверхности (11) конусами вида (9) и (10). После этих замечаний становится очевидной справедливость "большой теоремы Понселе" в пространстве Лобачевского.

Для софокусных коник условие Кэли можно представить как условие рациональности отношения эллиптических интегралов некоторого специального вида. Чтобы показать это, введем на сфере (8) ортогональные сфероконические координаты λ_1 и λ_2 по формулам

$$x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a}, \quad y^2 = -\frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b}, \quad z^2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{ab}. \tag{12}$$

Здесь $a > 0$, $b < 0$ и $a - b = 1$. При фиксированных значениях a, b линии $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}$ задают семейства софокусных коник с фокусами в точках $(\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{-b}, 0)$. Эти коники совпадают с пересечениями конусов

$$\frac{x^2}{a+\lambda_k} + \frac{y^2}{b+\lambda_k} + \frac{z^2}{\lambda_k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{13}$$

и сферы (8).

Из (12) легко получить формулу для кинетической энергии частицы единичной массы

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2} = \frac{1}{8}\left[\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\dot{\lambda}_1^2}{\lambda_1(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)} - \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\dot{\lambda}_2^2}{\lambda_2(\lambda_2+a)(\lambda_2+b)}\right].$$

Переходя к каноническим координатам, получим явное выражение для функции Гамильтона:

$$H = \frac{1}{8}\left[\frac{\lambda_1(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)}{\lambda_2-\lambda_1}p_1^2 - \frac{\lambda_2(\lambda_2+a)(\lambda_2+b)}{\lambda_2-\lambda_1}p_2^2\right].$$

Видно, что переменные разделяются: уравнения допускают два независимых первых интеграла

$$\lambda_k(\lambda_k+a)(\lambda_k+b)p_k^2 = -h\lambda_k - c, \qquad k = 1, 2. \tag{14}$$

Здесь $h = \frac{H}{8}$, c — постоянная интегрирования. Без ущерба для общности положим $b = 1$.

С учетом (14) уравнения Гамильтона $\dot{\lambda}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ примут вид уравнений (с точностью до несущественного постоянного множителя)

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{\Psi(\lambda_1)}}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad \dot{\lambda}_2 = \frac{\sqrt{\Psi(\lambda_2)}}{\lambda_2-\lambda_1},$$

где $\Psi(z) = -z(z+a)(z+b)(z+c)$. В предположении $c > 0$ график этого многочлена изображен на рис. 2.

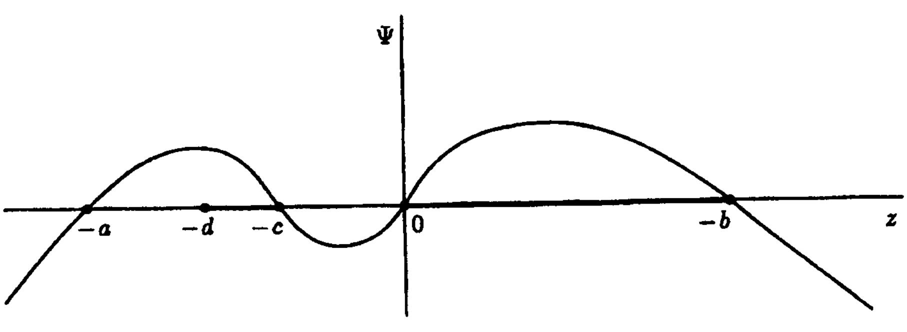

Рис. 2

Пусть переменная λ_1 изменяется в интервале $[0, -b]$, а λ_2 — в интервале $[-a, -c]$. Значение $\lambda_2 = -c$ отвечает "внутренней" конике K_2, которой касаются дуги больших кругов. Выделим "внешнюю" софокусную конику $\lambda_2 = -d$ $(d > c)$, которую обозначим K_1: движущаяся по инерции частица упруго отражается от K_1.

Числа вращения на лиувиллевых торах вполне интегрируемой биллиардной системы равны отношениям эллиптических интегралов

$$\Gamma = \int_{-d}^{-c} \frac{dz}{\sqrt{\Psi(z)}} \Big/ 2 \int_{0}^{-b} \frac{dz}{\Psi(z)}. \tag{15}$$

Множитель $\frac{1}{2}$ появляется по тем же причинам, что и в формуле (6).

С другой стороны, проективные уравнения коник K_1 и K_2 суть

$$\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} - \frac{z^2}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a-d} + \frac{y^2}{b-d} - \frac{z^2}{d} = 0$$

соответственно (см. (13)). Применяя теорему Кэли, получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Если отношение* Γ *рационально, то числа*

$$\frac{a-d}{a-c}, \qquad \frac{b-d}{b-c}, \qquad \frac{d}{c} \tag{16}$$

удовлетворяют однородному диофантову уравнению.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Интегрируемые биллиарды внутри коник и их возмущения на поверхностях постоянной кривизны изучались в работах [10–12].

2. Полагая $z = \frac{1}{x}$, приходим к тождеству

$$\int \frac{dz}{\Psi(z)} = -\frac{1}{\sqrt{-abc}} \int \frac{dx}{\Phi(x)},$$

где $\Phi(x) = (x + \frac{1}{a})(x + \frac{1}{b})(x + \frac{1}{c})$; напомним, что $abc < 0$. Тогда отношение интегралов (15) будет иметь вид (1), но с несколько иным расположением чисел $\{0, a, b, c\}$. Однако в этом случае теорема 1 дает тот же результат о свойствах чисел (16).

3. Как уже отмечалось, условия Кэли для многомерных квадрик обобщены в работах [7, 8]. Это дает возможность получить алгебраические условия *полной* рациональной зависимости гиперэллиптических интегралов определенного вида.

4. Результат работы [9] о многомерном аналоге большой теоремы Понселе легко распространяется на многомерные пространства постоянной кривизны. Только здесь речь уже должна идти о геодезических, которые касаются заданных *софокусных* квадрик (ср. с [10]).

Автор благодарит Ю.П. Соловьева за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 02–01–01059 и 01–01–22004), INTAS (00-221) и гранта поддержки ведущих научных школ (НШ-136.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: Гостехиздат, 1936.
2. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
3. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984.
4. *Веселов А.П.* Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы // Функц. анализ и его прилож. 1988. **22**, вып. 2. 1–13.
5. *Chang S.-J., Friedberg R.* Elliptical billiards and Poncelet's theorem // J. Math. Phys. 1988. **29**. 1537–1550.
6. *Lebesgue H.* Les Coniques. Paris: Gauthier-Villars, 1942.
7. *Dragović V., Radnovic M.* Conditions of Cayley's type for ellipsoidal billiard // J. Math. Phys. 1998. **39**. 355–362.
8. *Dragović V., Radnovic M.* On periodical trajectories of the billiard systems within an ellipsoid in $\mathbb{R}^d$ and generalized Cayley's condition // J. Math. Phys. 1998. **39**. 5866–5869.
9. *Crespi B., Chang S.-J., Shi K.-J.* Elliptical billiard systems and the full Poncelet's theorem in n dimension // J. Math. Phys. 1993. **34**. 2242–2256.

10. *Veselov A.P.* Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in the Lobachevsky spaces // J. Geom. Phys. 1990. **7**. 81–107.
11. *Абдрахманов А.М.* Интегрируемые биллиарды // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 6. 28–33.
12. *Jovanovic B.* Integrable perturbations of billiards on constant curvature surfaces // Phys. Lett. A. 1977. **231**. 353–358.

Поступила в редакцию
18.02.03