Математические заметки

том 74 выпуск 2 август 2003

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЧИСЛА ВРАЩЕНИЯ ПУАНКАРЕ И СРЕДНИЕ РИССА И ВОРОНОГО

В. В. Козлов, Т. Мадсен

1. Пусть T – гомеоморфизм окружности $\{x \bmod 2\pi\}$, сохраняющий ориентацию. Ясно, что $Tx = x + f(x)$, где f – непрерывная 2π-периодическая функция. Как доказал Пуанкаре [1],

$$f(T^n x) \to \lambda \quad (C) \tag{1}$$

при $n \to \infty$ для всех x. Символ C обозначает сходимость по Чезаро. Число $\mu = \lambda/(2\pi)$ называется *числом вращения* гомеоморфизма T.

Мы дополним это утверждение двумя замечаниями, которые будут использоваться ниже:

1) соотношение (1) справедливо и при $n \to -\infty$,
2) сходимость (1) равномерна по x.

Первое утверждение очевидно, а второе легко вытекает из доказательства теоремы Пуанкаре (см. [1], [2]).

2. Пусть $p_0 > 0$, $p_n \geqslant 0$ и $\sum p_n = \infty$. *Средними Рисса* последовательности $\{s_n\}_0^\infty$ называются отношения

$$t_n = \frac{p_0 s_0 + \dots + p_n s_n}{p_0 + \dots + p_n}.$$

Если $p_n = p_0$, то получаем средние Чезаро (средние арифметические). Последовательность p_n задает *метод суммирования Рисса*: если $t_n \to s$ при $n \to \infty$, то (по определению) $s_n \to s$ (R, p_n). Этот метод регулярен: если $s_n \to s$, то $t_n \to s$. Пусть $p_{n+1} \geqslant p_n$. Тогда метод Чезаро включает метод Рисса: из $s_n \to s \ (R, p_n)$ вытекает $s_n \to s \ (C)$. Если p_n возрастают экспоненциально с ростом n, то метод Рисса теряет силу и становится эквивалентным обычной сходимости.

Кроме сходимости по Риссу, мы будем использовать *сходимость по Вороному*. Пусть снова $q_0 > 0$, $q_n \geqslant 0$. Положим

$$u_n = \frac{q_n s_0 + \dots + q_0 s_n}{q_0 + \dots + q_n}.$$

Если $u_n \to s$, то (по определению) $s_n \to s \ (W, q_n)$. Критерий регулярности W-метода:

$$\frac{q_n}{q_0 + \dots + q_n} \to 0.$$

Теория суммирования по Риссу и Вороному подробно изложена в [3].

3. Теорему Пуанкаре можно усилить, заменив метод Чезаро более слабым методом Рисса или Вороного.

Работа выполнена при поддержке гранта “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96146.

Теорема 1. *Если* $q_{n+1} \leqslant q_n$ *и* $\sum q_n = \infty$, *то*

$$f(T^n x) \to \lambda \quad (W,\, q_n).$$

Теорема 2. *Если* $p_{n+1} \geqslant p_n$ *и* $p_n / \bigl(\sum_0^n p_s\bigr) \to 0$, *то*

$$f(T^n x) \to \lambda \quad (R,\, p_n). \tag{2}$$

Эти два утверждения фактически эквивалентны. Докажем, например, теорему 2. Полагая $x = T^{-n} z$ (z зависит от n), имеем

$$\frac{p_0 f(x) + \dots + p_n f(T^n x)}{p_0 + \dots + p_n} = \frac{p_n f(z) + \dots + p_0 f(T^{-n} z)}{p_0 + \dots + p_n}.$$

В правой части этого равенства теперь фигурируют средние Вороного. Второе условие теоремы 2 – это критерий регулярности $(W,\, p_n)$-метода. Так как еще $p_{n+1} \geqslant p_n$, то по теореме Харди (теорема 23 из [3]), $(W,\, p_n)$-метод включает метод Чезаро. Следовательно, по теореме Пуанкаре (с учетом дополнений 1 и 2 из п. 1) средние Рисса (2) при всех x стремятся к λ при $n \to \infty$, что и требовалось.

Теоремы 1 и 2 действительно усиливают теорему Пуанкаре, поскольку фигурирующие там методы Рисса и Вороного включены в метод Чезаро. Например, последовательность

$$p_n = \exp\biggl(\frac{n}{\ln^\alpha n}\biggr), \qquad \alpha > 0,$$

удовлетворяет условиям теоремы 2, и $(R,\, p_n)$-метод существенно слабее метода Чезаро. Более того, при малых значениях α этот метод практически эквивалентен обычной сходимости.

4. В связи с теоремами 1 и 2 возникает интересная задача: описать все матричные методы суммирования S, для которых $f(T^n x) \to \lambda(S)$.

Для метода Рисса $S = (R,\, p_n)$ можно указать более слабое достаточное условие справедливости (2).

Теорема 3. *Если* $p_n / \bigl(\sum_0^n p_s\bigr) \to 0$ *и*

$$p_0(n+1) + |p_1 - p_0| n + |p_2 - p_1|(n-1) + \dots + |p_n - p_{n-1}| \leqslant H(p_0 + \dots + p_n) \tag{3}$$

для некоторого $H > 0$, *то* $f(T^n x) \to \lambda(R,\, p_n)$.

Доказательство. Действительно, если метод $(W,\, p_n)$ регулярен и выполнено условие (3), то $(W,\, p_n)$ включает метод Чезаро (это следствие теоремы 19 из [3]). После этого замечания остается воспользоваться идеей доказательства теоремы 2.

Теорема 2 – следствие теоремы 3, поскольку из условия $p_{k+1} \geqslant p_k$ вытекает неравенство (3) с константой $H = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. **2**. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. **3**. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

(В. В. Козлов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
(Т. Мадсен) University of Aalborg (Danmark)
E-mail: `kozlov@pran.ru; tatiana@cpk.auc.dk`

Поступило 30.10.2002