В. В. Козлов*

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ**

§ 1. СРЕДНИЕ РИССА И ВОРОНОГО

Пусть M — пространство с конечной мерой μ ($\mu(M) < \infty$) и $T\colon M \to M$ — сохраняющее меру (не обязательно обратимое) преобразование: $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ для любой измеримой области A. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. С учетом *теоремы Пуанкаре о возвращении* можно утверждать, что последовательность $f(T^n x)$, $n = 1, 2, \ldots$, как правило, расходится. Однако, согласно *теореме Биркгофа—Хинчина*, для $f \in L_1$ при почти всех $x \in M$ последовательность $f(T^n x)$ сходится по Чезаро к инвариантной (относительно преобразования T) и интегрируемой функции $\bar{f}(x)$, причем

$$\int\limits_M f\, d\mu = \int\limits_M \bar{f}\, d\mu. \tag{1.1}$$

Этому замечательному результату предшествовала *статистическая эргодическая теорема фон Неймана*, утверждающая сходимость

$$f(T^n(x)) \to \bar{f}(x) \quad (C) \tag{1.2}$$

в среднем (знак (C) означает сходимость по Чезаро). Пусть L_2 — линейное пространство функций f на M, суммируемых с квадратом. Каждой функции f на M можно сопоставить функцию $g(x) = f(Tx)$, $x \in M$. Хорошо известно (см., например, [1]), что соответствие $f \to g = Uf$ определяет изометрический оператор U в L_2. Теорема фон Неймана утверждает, что

$$U^n f \to Pf \quad (C),$$

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (99-01-0196) и гранта «Ведущие научные школы» (00-15-96146).

где P — оператор, проектирующий L_2 на подпространство всех векторов, инвариантных относительно U.

Однако исторически первой эргодической теоремой была теорема Боля—Серпинского—Вейля (обсуждение см. в [2]). Здесь M — это n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$ со стандартной мерой, а T является сдвигом

$$x_s \mapsto x_s + \omega_s, \quad 1 \leqslant s \leqslant n, \quad \omega_s = \text{const}. \tag{1.3}$$

Оказывается, если функция $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то предельное соотношение (1.2) имеет место для всех $x \in \mathbb{T}^n$, причем предельная функция $\bar{f}$ также интегрируема по Риману и, конечно, выполнено (1.1).

Обычно рассматривают эргодические сдвиги (1.3), когда числа $\omega_1, \ldots, \omega_n, 1$ рационально несоизмеримы. Тогда $\bar{f}$ не зависит от x и

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)\, d^n x. \tag{1.4}$$

Общий случай легко сводится к анализу этого частного случая.

Сходимость по Чезаро — отнюдь не единственный метод суммирования расходящихся последовательностей и рядов. Эта область анализа сильно продвинута (см., например, классическую книгу Харди [3]). Обычно используют методы суммирования, обладающие свойствами *линейности, регулярности* и *естественности*. Наиболее распространенными являются *матричные методы* [3, 4].

Пусть $p_0 > 0$, $p_n \geqslant 0$ и $\sum p_n = \infty$. Средними Рисса последовательности s_n $(n = 0, 1, \ldots)$ называются отношения

$$\frac{p_0 s_0 + \ldots + p_n s_n}{p_0 + \ldots + p_n}.$$

Если $p_n = p_0$ для всех n, то получаем средние Чезаро (средние арифметические). Последовательность p_n задает метод суммирования Рисса [3]: если $t_n \to s$ при $n \to \infty$, то по определению

$$s_n \to s \quad (\mathrm{R}, p_n).$$

Этот метод регулярен: если $s_n \to s$, то $t_n \to s$.

Метод суммирования Рисса определен и в случае сходящегося ряда $\sum p_n$. Однако здесь свойство регулярности не выполнено.

Возможность усиления теоремы Боля—Серпинского—Вейля путем замены метода Чезаро более общим методом Рисса указана

Г. Вейлем в его классической работе по равномерному распределению [2]. Вейль доказывает эту теорему для метода Рисса (R, p_n) в двух случаях:

1) p_n монотонно убывает;

2) p_n монотонно возрастает вместе с n, причем

$$(n+1)p_n = o\left(\sum_{s=0}^{n} p_s\right). \tag{1.5}$$

На самом деле это утверждение не дает ничего нового, поскольку при сделанных предположениях относительно последовательности p_n имеет место следующее свойство: если $s_n \to s$ (C), то $s_n \to s$ (R, p_n). Другими словами, здесь метод Рисса *включает* метод Чезаро. С другой стороны, если $p_{n+1} \geqslant p_n$, то, наоборот, метод Чезаро включает метод Рисса [3, теорема 14]. Если, кроме того, выполнено условие (1.5), то эти методы равносильны.

Любопытно отметить, что общая теорема о включении методов суммирования Рисса была доказана Чезаро еще в 1888 г. (а работа Вейля опубликована в 1916 г., т. е. спустя почти 30 лет). Это обстоятельство ускользнуло от многих авторов (см., например, известную книгу Полиа и Сеге [5, разд. 2, задача 173].

Отметим, что при условии (1.5) p_n могут возрастать как степени n. С другой стороны, если p_n возрастают экспоненциально быстро, то метод Рисса теряет силу и становится эквивалентен обычной сходимости [3, теорема 15]. Поэтому реальный интерес представляют случаи, когда $p_n \sim \exp n^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Кроме сходимости по Риссу, мы будем использовать сходимость по Вороному [3]. Пусть снова $q_0 > 0$, $q_n \geqslant 0$. Для последовательности $\{s_n\}_0^{\infty}$ положим

$$u_n = \frac{q_n s_0 + q_{n-1} s_1 + \ldots + q_0 s_n}{q_0 + q_1 + \ldots + q_n}.$$

Ясно, что если $s_i = s_0$, то $u_n = s_0$. Если $u_n \to s$, то полагают $s_n \to s$ (W, q_n). Теория суммирования по Вороному подробно изложена в [3].

Критерий регулярности W-метода:

$$\frac{q_n}{q_0 + \ldots + q_n} \to 0.$$

Оказывается, всякие два регулярных метода Вороного *совместимы*: если $s_n \to s$ (W) и $s_n \to s'$ (W$'$), то $s = s'$.

Если W-метод регулярен и последовательность q_n не убывает, то метод (W, q_n) включает метод Чезаро. Больший интерес представляет условие обратного включения. Пусть $q_0 = 1$, $q_n > 0$. Если W-метод регулярен, q_n не возрастает и

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \geqslant \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

для всех $n > 0$, то C включает (W, q_n).

Теорема 1. *Пусть функция $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, T — преобразование сдвига (1.3), причем числа $\omega_1, \ldots, \omega_n, 1$ рационально несоизмеримы.*

Тогда:

а) *если $q_{n+1} \leqslant q_n$ и $\sum q_n = \infty$, то*

$$f(T^n x) \to \bar{f} \quad (\mathrm{W}, q_n);$$

б) *если $p_{n+1} \geqslant p_n$ и $p_n \big/ \sum\limits_0^n p_s \to 0$, то*

$$f(T^n x) \to \bar{f} \quad (\mathrm{R}, p_n).$$

Здесь $\bar{f}$ — среднее значение (1.4). Эти два утверждения фактически эквивалентны и легко доказываются методом Вейля.

Теорема 1 фактически известна в теории равномерного распределения последовательностей по mod 1 (см. [6, 7]). Считается [8], что расширение теории Вейля с использованием методов суммирования Рисса впервые дано в работе Цудзи [9]. В связи с теоремой 1 укажем нерешенную задачу: описать все матричные методы суммирования, для которых справедливо заключение теоремы Боля—Серпинского—Вейля. В [10] указаны некоторые новые условия равномерного распределения для сходимости по Риссу и Вороному.

В предположениях *а* и *б* теоремы 1 относительно методов суммирования Вороного и Рисса можно доказать статистическую эргодическую теорему.

Теорема 2. *Пусть U — изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве, P — оператор, проектирующий это пространство на подпространство всех векторов, инвариантных относительно U.*

Тогда:

а) *если $q_{n+1} \leqslant q_n$ и $\sum q_n = \infty$, то для всех f*

$$U^n f \to Pf \quad (\mathrm{W}, q_n); \tag{1.6}$$

б) *если* $p_{n+1} \geqslant p_n$ *и* $p_n \Big/ \sum\limits_0^n p_s \to 0$, *то для всех* f

$$U^n f \to Pf \quad (\mathrm{R}, p_n).$$

Когда $q_n = 1$ или $p_n = 1$, получаем классическую теорему фон Неймана. Теорема 2 утверждает, что при $n \to \infty$ функции $f(T^n x)$ сходятся в среднем к инвариантной функции преобразования T в более сильном смысле, чем в теореме фон Неймана.

Теорему 2 можно вывести из результатов работы [11], в которой рассматривались более общие линейные методы суммирования, задаваемые бесконечной матрицей из неотрицательных чисел $a_{n,k}$ $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$$

для всех n. В [11] указан критерий, когда средние

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} U^k f$$

сходятся в среднем к Pf:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k\alpha+j} = 1/\alpha$ для всех $0 \leqslant j \leqslant \alpha$ и $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$,

(2) для любого иррационального γ последовательность $\{n\gamma\}$ равномерно распределена относительно этого метода суммирования.

Заметим, что условие (2) неконструктивно: как уже отмечалось, описание всех матричных методов, для которых последовательности $\{n\gamma\}$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, является пока нерешенной задачей (см. [8]).

В нашем случае свойство (1) вытекает из условия монотонности весовых коэффициентов q_n (соответственно p_n) при дополнительном условии, что $\sum q_n = \infty$ (соответственно $p_n \Big/ \sum\limits_0^n p_s \to 0$). Условие (2) вытекает из теоремы 1. В [11] указаны также достаточные условия на коэффициенты $a_{n,k}$, при которых статистическая эргодическая теорема имеет место для преобразований со слабым и сильным перемешиванием. Мы приведем простое доказательство теоремы 2 методом Рисса [1], которое раскрывает значение условий *а* и *б*. Для определенности рассмотрим среднее Вороного.

Если $Uf = f$, то утверждение (1.6) очевидно. Пусть $f = g - Ug$ для некоторого G. Тогда

$$\|q_0U^n f + \ldots + q_{n-1}Uf + q_n f\| =$$
$$= \| - q_0U^{n+1}g + (q_0 - q_1)U^n g + \ldots + (q_{n-1} - q_n)Ug + q_n g\| \leqslant 2q_0\|g\|,$$

поскольку $\|U^k g\| = \|g\|$ ввиду изометричности U. Так как $\sum q_n = \infty$, то рассматриваемые средние Вороного стремятся к нулю.

Оказывается [1], каждый элемент гильбертова пространства может быть представлен в виде суммы $f_1 + f_2$, где $Uf_1 = f_1$, а f_2 принадлежит замыканию линейного многообразия элементов вида $g - Ug$. Остается показать, что $W_n f \to 0$ для всякого f из замыкания этого многообразия. Здесь

$$W_n = \frac{q_0U^n + \ldots + q_nU^0}{q_0 + \ldots + q_n} \text{ —}$$

среднее Вороного. Прежде заметим, что $\|W_n f\| \leqslant \|f\|$. Далее, пусть $f_k \to f$ и если $W_n f_k \to 0$ при $n \to \infty$ для всех k, то $W_n f \to 0$. Действительно,

$$\|W_n f\| \leqslant \|W_n(f - f_k)\| + \|W_n f_k\| \leqslant \|f - f_k\| + \|W_n f_k\|.$$

Выберем k так, чтобы $\|f - f_k\|$ была мала. После этого выберем n так, чтобы была мала $\|W_n f_k\|$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 остается содержательной, если гильбертово пространство заменить комплексным пространством. В этом случае изометрический оператор представляется комплексным числом z, по модулю равным 1. Если $z = 1$, то средние Вороного, очевидно, равны 1. Если $z \neq 1$, то теорема 2 утверждает, что

$$z^n \to 0 \quad (\mathrm{W}, q_n).$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $q_n = (n + 1)^{-1}$. Ясно, что

$$W_n(z) = \frac{z^{n+1}\left[z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2} + \ldots + \frac{z^{-n-1}}{n+1}\right]}{\ln n + O(1)}.$$

Так как $z^{-1} \neq 1$, то при $n \to \infty$ выражение в квадратных скобках стремится к $\ln(1 - z^{-1})$. Это однозначная непрерывная функция на окружности с выколотой точкой $\{z\colon\ |z| = 1 \text{ и } z \neq 1\}$. Следовательно, $W_n(z) \to 0$ как $1/\ln n$.

Результаты другого характера, касающиеся обобщения теоремы фон Неймана для весовых средних, можно найти в [12].

§ 2. УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Можно ли усилить индивидуальную эргодическую теорему Биркгофа—Хинчина, заменив суммирование по Чезаро на более слабый метод суммирования Рисса или Вороного? Как мы видели в § 1, для сходимости в среднем ответ положительный (теорема 2). Однако не исключено, что для точечной сходимости в типичной ситуации ответ может оказаться отрицательным. Хотя в случае сдвигов тора метод Чезаро можно заменить более слабым методом Рисса или Вороного (теорема 1).

Чтобы лучше понять возникающие здесь трудности, рассмотрим более детально случай, когда M — единичный отрезок $[0,1]$, а T — *преобразование Бернулли*

$$x \to 2x \bmod 1.$$

Это преобразование необратимое, но сохраняет обычную меру на $[0,1]$: $\operatorname{mes} L = \operatorname{mes}(T^{-1}L)$, где L — любое измеримое множество на $[0,1]$, а $T^{-1}L$ — полный прообраз L. Поскольку преобразование Бернулли эргодическое, то для любой интегрируемой функции f и для почти всех x

$$f(T^n x) \to \int\limits_0^1 f(x)\,dx \quad (\mathrm{C}). \tag{2.1}$$

Зададим кусочно-постоянную функцию f следующим образом: $f(x) = 1$ при $0 \leqslant x < 1/2$ и $f(x) = -1$ при $1/2 \leqslant x \leqslant 1$. Функции $r_{n+1}(x) = f(T^n x)$, $n \geqslant 0$, называются ***функциями Радемахера***. Они образуют ортонормированную систему. В частности, их средние равны нулю, а дисперсии равны единице. Соотношение (2.1) переходит в ***усиленный закон больших чисел*** (по Борелю, см. [13]):

$$r_n(x) \to 0 \quad (\mathrm{C}) \tag{2.2}$$

для почти всех x.

Пусть теперь (W, q_n) – метод суммирования Вороного. Если

$$\frac{q_0^2+\ldots+q_n^2}{(q_0+\ldots+q_n)^2} \to 0, \tag{2.3}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\left\{\frac{q_n r_1(x)+\ldots+q_0 r_{n+1}(x)}{q_0+\ldots+q_n} > \varepsilon\right\} = 0. \tag{2.4}$$

Это обобщение *слабого закона больших чисел* для испытаний Бернулли. Равенство (2.4) сразу же выводится из (2.3) с использованием неравенства Чебышёва.

С помощью теоремы Коши—Штольца можно показать, что если последовательность q_n не возрастает и $\sum q_n = \infty$ (условие *a* теорем 1 и 2), то выполнено условие (2.3). Впрочем, здесь нет ничего неожиданного, поскольку из сходимости в среднем вытекает сходимость по мере (2.4).

Теорема 3. *Если для некоторого целого* $k > 0$

$$\sum_{n+1}^{\infty}\left[\frac{q_0^2+\ldots+q_n^2}{(q_0+\ldots+q_n)^2}\right]^k < \infty, \tag{2.5}$$

то

$$r_n(x) \to 0 \quad (\mathrm{W}, q_n) \tag{2.6}$$

для почти всех x.

Доказательство основано на теореме Леви: если $\xi_n(x)$ — последовательность неотрицательных интегрируемых функций, то из сходимости

$$\sum \int_0^1 \xi_n(x)\,dx$$

вытекает сходимость почти всюду ряда

$$\sum \xi_n(x).$$

В частности, $\xi_n(x) \to 0$ для почти всех x.

Введем случайные величины

$$\eta_n(x) = \frac{q_n r_1(x)+\ldots+q_0 r_{n+1}(x)}{q_0+\ldots+q_n}$$

и получим сначала формулы для их моментов

$$m_k(n) = \int\limits_0^1 \eta_n^k(x)\,dx.$$

Ясно, что все m_k с нечетными k равны нулю. Далее, полагая

$$\sigma_s = q_0^s + \ldots + q_n^s, \tag{2.7}$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}, \\ m_4 &= \frac{3\sigma_2^2 - 2\sigma_4}{\sigma_1^4}, \\ m_6 &= \frac{15\sigma_2^3 - 30\sigma_4\sigma_2 + 16\sigma_6}{\sigma_1^6}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нетрудно понять, что $\sigma_1^{2k} m_{2k}$ — симметричные многочлены от $q_0^2, \ldots, q_n^2$. Как известно из алгебры, их можно представить в виде многочленов от сумм степеней (2.7).

Воспользуемся очевидными неравенствами

$$\sigma_{2k} \leqslant \sigma_2^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда можно утверждать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_k(n)$$

сходится, коль скоро сходится ряд (2.5). Полагая теперь $\xi_n = \eta_n^k$, приходим к заключению теоремы 3. Что и требовалось доказать.

Заключение (2.6) — *усиленный закон больших чисел* — гораздо содержательнее (2.4). Заметим, что условие (2.3) вытекает из (2.5). Однако обратное неверно. Вот простой пример: $q_n = (n+1)^{-1}$. В этом случае соотношение (2.3) убывает как $\ln^{-2} n$, но все ряды (2.5) расходятся. Задача: верно ли соотношение (2.6), если $q_n = (n+1)^{-1}$?

§ 3. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ СРЕДНИХ РИССА

Все сказанное в § 2 переносится с очевидными изменениями на суммирование по Риссу. Однако для средних Рисса можно продвинуться несколько дальше. В отличие от § 2, здесь мы будем рассматривать случайные величины более общего вида.

Будем предполагать, что последовательность p_n, $n \geqslant 0$, задающая метод суммирования Рисса, удовлетворяет условиям

$$p_{n+1} \geqslant p_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

и

$$\frac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n} \to 0 \tag{3.2}$$

при $n \to \infty$ (условие *б* теорем 1 и 2). Напомним, что условие (3.1) означает, что метод (R, p_n) не сильнее метода Чезаро.

Предложение 1. *Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots$ — одинаково распределенные независимые случайные величины с нулевыми средними значениями. Если выполнены условия* (3.1) *и* (3.2), *то имеет место слабый закон больших чисел: для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathrm{P}\left\{\left|\sum_0^n p_s\xi_s \Big/ \sum_0^n p_s\right| < \varepsilon\right\} \to 0,$$

когда $n \to \infty$.

Это утверждение доказывается стандартным приемом с использованием характеристических функций. Подчеркнем, что (в отличие от § 2) здесь не предполагается существование дисперсии случайных величин ξ_s.

Имеются работы, в которых для матричных методов суммирования оценивается скорость убывания вероятности из предложения 1 с использованием свойств функции распределения случайной величины ξ (см., например, [14, 15]).

Теорема 4. *Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — одинаково распределенные независимые случайные величины с нулевыми средними, имеющие конечные моменты порядков не более $2k$, а числа $p_0, p_1 \ldots$ таковы, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p_0^2 + \ldots + p_n^2}{(p_0 + \ldots + p_n)^2}\right]^k < \infty. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\mathrm{P}\{\xi_n \to 0\ (\mathrm{R}, p_n)\} = 1.$$

Следствие 1. *Пусть ξ_n имеют конечные моменты всех порядков. Тогда*

$$\xi_n \to 0 \quad (\mathrm{R}, \exp(n+1)^\alpha) \quad \text{п. н.}$$

для всех $0 \leqslant \alpha < 1$.

В частности, это утверждение имеет место для функций Радемахера из § 2.

Для доказательства следствия положим $p_n = \exp(n+1)^\alpha$. Если $k = 2$, то условие (3.3) выполняется при $0 \leqslant \alpha < 1/2$. При $k = 3$ ряд (3.3) сходится в большем интервале: $0 \leqslant \alpha < 2/3$ и т. д.

Теорема 4 доказывается точно так же, как теорема 3. Только формулы (2.8) заменяются более общими:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 m_2 &= \mu_2\sigma_2, \\
\sigma_1^4 m_4 &= 3\mu_2^2\sigma_2^2 + (\mu_4 - 3\mu_2^2)\sigma_4, \\
\sigma_1^6 m_6 &= 15\mu_2^3\sigma_2^3 + 15(\mu_2\mu_4 - 3\mu_2^3)\sigma_2\sigma_4 + \\
&\quad + 10\mu_3^2\sigma_3^2 + (\mu_6 + 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3 - 15\mu_2\mu_4)\sigma_6, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Здесь μ_k — момент k-го порядка случайной величины ξ_k, $\sigma_s = p_0^s + \ldots + p_n^s$.

Замечание 1. Положим теперь

$$p_{n-1} = \exp\frac{n}{\ln^\alpha n}, \quad \alpha > 0. \tag{3.4}$$

Нетрудно показать, что условия (3.1) и (3.2) выполнены. Далее,

$$\sum p_k^2 \Big/ \Big(\sum p_k\Big)^2$$

асимптотически убывают с ростом n как $\ln^{-\alpha} n$. Следовательно, для всех k ряды (3.3) расходятся и поэтому теорема 4 не применима, хотя имеет место слабый закон больших чисел (ср. с § 2).

К усиленному закону больших чисел можно подойти несколько с другой стороны, воспользовавшись идеей вывода классического *критерия Колмогорова* [16, 17]: если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — независимые случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots$, причем

$$\sum \frac{\sigma_s^2}{s^2} < \infty, \tag{3.5}$$

то

$$\mathrm{P}\{\xi_n \to 0\ (\mathrm{C})\} = 1.$$

Этот результат можно перенести на средние по Риссу.

Лемма Кронекера. *Если ряд*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j x_j}{p_0 + \ldots + p_j}$$

сходится, $p_j > 0$ *и* $\sum p_j = \infty$, *то*

$$x_n \to 0 \quad (\mathrm{R}, p_n)$$

при $n \to \infty$.

Условие $\sum p_j = \infty$ означает регулярность метода суммирования Рисса (R, p_n). Заметим, что обычно лемму Кронекера формулируют в другом виде (см., например, [17, гл. VII]).

Теорема 5. *Пусть* $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — *независимые случайные величины с нулевыми значениями и дисперсиями* $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots$ *Если*

$$\sum \frac{p_j^2 \sigma_j^2}{(p_0 + \ldots + p_j)^2} < \infty, \tag{3.6}$$

то

$$\xi_n \to 0 \quad (\mathrm{R}, p_n) \quad \textit{п. н.}$$

Действительно, согласно (3.6), сумма независимых случайных величин

$$\frac{p_j \xi_j}{p_0 + \ldots + p_j}$$

ограничена. Следовательно, по известной теореме Хинчина—Колмогорова, ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j \xi_j}{(p_0 + \ldots + p_j)}$$

сходится почти наверное. Применяя к этому ряду лемму Кронекера, получаем требуемое.

Ясно, что при $p_0 = p_1 = \ldots$ условие (3.6) переходит в условие Колмогорова (3.5).

Применим теорему 5 к случаю одинаково распределенных случайных величин. Тогда условие (3.6) примет вид

$$\sum \frac{p_n^2}{(p_0 + \ldots + p_n)^2} < \infty. \tag{3.7}$$

Пусть, например, $p_n = \exp(n+1)^\alpha$, $0 \leqslant \alpha$. Для этого случая ряд (3.7) сходится лишь при $\alpha < 1/2$, что является более слабым результатом по сравнению с теоремой 4. Правда, следует иметь в виду, что теорема 5 установлена при более слабых ограничениях на случайные величины ξ_n.

В заключение этого параграфа приведем пример, показывающий целесообразность расширения суммируемости по Чезаро. Собственно, этот пример указал А. Н. Колмогоров [16] (см. также [18, гл. IX]) для демонстрации принципиальной невозможности ослабления условия (3.5). Речь идет о последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_n^2 = n$. Их можно построить таким образом, чтобы

$$\mathrm{P} = \{\xi_n = n\} = \mathrm{P}\{\xi_n = -n\} = \frac{1}{2n}, \quad \mathrm{P}\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ясно, что для этой последовательности ряд (3.5) расходится и усиленный закон больших чисел не имеет места.

С другой стороны, поскольку ряд

$$\sum \frac{\sigma_n^2}{n^2 \ln^2 n}$$

сходится, то (по теореме 5).

$$\mathrm{P}\left\{\xi_n \to 0 \ \left(\mathrm{R}, \frac{1}{n}\right)\right\} = 1.$$

Отметим, что метод Рисса $(\mathrm{R}, 1/n)$, конечно, сильнее метода Чезаро.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

Для вывода усиленного закона больших чисел можно использовать *закон повторного логарифма Хинчина—Колмогорова*. С этой целью введем новые случайные величины $\eta_n = p_n \xi_n$. Ясно, что $\eta_1, \eta_2, \ldots$ будут снова независимыми случайными величинами с нулевыми средними значениями.

Пусть σ_1^2, σ_2^2 — дисперсии $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Тогда дисперсии η_k будут $p_k^2 \sigma_k^2, \ldots$ Положим

$$B_n = \sum_1^n p_k^2 \sigma_k^2, \quad S_n = \sum_1^n \eta_k = \sum_1^n p_k \xi_k.$$

Согласно [19], если

$$B_n \to \infty, \tag{4.1}$$

$$|\eta_n| \leqslant M_n = o\left(\sqrt{\frac{B_n}{\ln\ln B_n}}\right), \tag{4.2}$$

то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}} = 1 \quad \text{п. н.} \tag{4.3}$$

Из (4.3) вытекает, в частности, что

$$S_n = (\sqrt{B_n \ln\ln B_n}) \quad \text{п. н.}$$

Следовательно, если

$$\frac{B_n}{\left(\sum\limits_1^n p_k\right)^2} = \frac{\varphi(n)}{\ln\ln B_n}, \tag{4.4}$$

где $\varphi(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\xi_n \to 0 \quad (\mathrm{R}, p_n) \quad \text{п. н.}$$

Правда, при этом условие (4.4) должно быть согласовано с условиями (4.1) и (4.2). Условие (4.4) сильнее условия

$$\frac{\sum p_k^2 \sigma_k^2}{\left(\sum p_k\right)^2} \to 0,$$

которое гарантирует справедливость слабого закона больших чисел. Это и понятно: сходимость почти всюду влечет сходимость по мере.

Требование согласованности условия (4.4) с предположениями (4.1) и (4.2) накладывает дополнительные ограничения на случайные величины ξ_n. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями. Если $|\xi_n| \leqslant M$ (п. н.), $M = \mathrm{const}$, а числа p_n таковы, что*

$$\frac{p_n^2}{\sum\limits_1^n p_k^2} = \frac{\psi(n)}{\ln\ln \sum\limits_1^n p_k^2}, \tag{4.5}$$

$\psi(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\xi_n \to 0 \quad (\mathrm{R}, p_n) \quad \textit{п. н.} \tag{4.6}$$

Доказательство. Поскольку дисперсии ξ_n одинаковы, то $B_n \to \infty$ согласно (3.1). Таким образом, условие (4.1) применимости закона повторного логарифма выполнено. Далее, так как $\eta_n = p_n\xi_n$ и $|\xi_n| \leqslant M$, то

$$|\eta_n| \leqslant MP_n \leqslant M\left(\frac{B_n\psi(n)}{\ln\ln B_n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.7}$$

согласно (4.5). Поскольку $\psi(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то правая часть (4.7), очевидно, есть

$$o\left(\sqrt{\frac{B_n}{\ln\ln B_n}}\right).$$

Следовательно, выполнено условие (4.2).

Положим

$$\frac{\sum\limits_1^n p_k^2}{\left(\sum\limits_1^n p_k\right)^2} = \frac{\varphi(n)}{\ln\ln\sum\limits_1^n p_k^2}. \tag{4.8}$$

Согласно (3.1)

$$\frac{p_n\sum\limits_1^n p_k}{\sum\limits_1^n p_k^2} \geqslant 1.$$

Следовательно, из (4.5) и (4.8) вытекает неравенство

$$\varphi(n) \leqslant \psi(n). \tag{4.9}$$

В частности, $\varphi(n) \to 0$, когда $n \to \infty$. В итоге мы получаем усиленный закон больших чисел (4.6). Теорема доказана.

На первый взгляд, условия (4.5) и (4.4) (для равных дисперсий) кажутся различными. Более того, если $p_{n+1} \geqslant p_n$, то из (4.5) всегда вытекает (4.4). Однако во многих практически важных случаях эти условия на самом деле эквивалентны.

Пусть, например, $p_n = f(n)$, где $f(x)$ — монотонно возрастающая к ∞ гладкая функция из класса Харди порядка нуль относительно экспоненты (см., например, [20, гл. V]). Сюда относятся, в частности, функции

$$\exp x^\gamma \ (0 < \gamma < 1) \quad \text{и} \quad \exp\frac{x}{\ln^\alpha x} \ (\alpha > 0).$$

Можно показать, что при условии (3.2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = \frac{1}{4}$$

(ср. с (4.9)).

В частности, если $p_n = \exp n^\gamma$, $\gamma < 1$, то функции φ и ψ убывают как

$$\frac{\ln n}{n^{1-\gamma}}.$$

Отсюда вновь вытекает следствие из теоремы 4.

Положим теперь

$$p_n = \exp \frac{n}{\ln^\alpha n}, \quad \alpha > 0. \tag{4.10}$$

С помощью формулы суммирования Эйлера—Маклорена нетрудно убедиться, что

$$\frac{\sum p_k^2}{\left(\sum p_k^2\right)^2}$$

асимптотически убывает с ростом n как $1/\ln^\alpha n$. Следовательно, для всех k ряды (3.3) расходятся и поэтому теорема 4 не применима.

Однако в этом случае

$$\psi(n) \sim \ln^{1-\alpha} n.$$

Таким образом, если $\alpha > 1$, то (по теореме 6) для коэффициентов p_n вида (4.10) справедлив усиленный закон больших чисел.

Стоит, наверное, подчеркнуть, что в теореме 6 по сравнению с теоремой 4 накладываются более сильные условия на случайные величины ξ_n.

В связи с этим результатом возникает вопрос о справедливости предельного соотношения

$$r_n(x) \to 0 \quad \left(\mathrm{R}, \exp \frac{n}{\ln n}\right) \quad \text{п. н.}$$

для функций Радемахера. Подчеркнем, что последовательность $p_n = \exp(n/\ln n)$, конечно, удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2): отношения

$$\frac{p_n}{\sum\limits_{1}^{n} p_k}$$

убывают с ростом n как $1/\ln n$.

Замечание 2. Для вывода условий справедливости усиленного закона больших чисел можно было бы применить преобразование Абеля к сумме $p_1\xi_1 + \ldots + p_n\xi_n$, а затем воспользоваться обычным законом повторного логарифма Хинчина, который устанавливает асимптотическое поведение сумм одинаково распределенных случайных величин $\xi_1 + \ldots + \xi_n$. Однако таким способом получается более слабое утверждение по сравнению с теоремой 6. Например, получается, что

$$\mathrm{P}\{\xi_n \to 0\ (\mathrm{R}, \exp n^\alpha)\} = 1$$

лишь при $0 \leqslant \alpha < 1/2$.

Итак, результаты § 2—4 демонстрируют серьезные сомнения по поводу возможности усиления теоремы Биркгофа—Хинчина путем замены сходимости по Чезаро более слабым методом Вороного или Рисса, удовлетворяющим соответственно условиям *а* или *б* теорем 1—2. Однако все еще сохраняется надежда доказать, что

$$f(T^n x) \to \bar{f}(x) \quad (\mathrm{R}, \exp n^\alpha)$$

для почти всех x при некотором $\alpha > 0$. Выяснение этого вопроса является существенной задачей эргодической теории.

Похожая задача рассматривалась в работах Бакстера [21, 22] (см. также [23]) для метода Рисса (R, p_n), когда весовые коэффициенты p_n определяются из рекуррентного соотношения

$$p_n = f_1 p_{n-1} + \ldots + f_n p_0, \quad p_0 = 1,$$

где f_k $(k \geqslant 1)$ — последовательность неотрицательных чисел, для которых $\sum f_k = 1$. Ясно, что все p_n принадлежат отрезку $[0, 1]$ и p_n стремится к конечному пределу, когда $n \to \infty$. При некоторых дополнительных условиях в [21, 22] доказана индивидуальная эргодическая теорема для (R, p_n)-метода. В частности, если $f_1 = 1$, а остальные $f_k = 0$ $(k \geqslant 2)$, то получаем обычную теорему Биркгофа—Хинчина.

Если p_n стремятся к конечному пределу, то (R, p_n)-метод может оказаться эквивалентен обычному методу Чезаро (такую возможность не исключает сам Бакстер). Поэтому наибольший интерес (согласно [22]) представляет случай, когда $p_n \to 0$. Однако если при этом p_n убывают монотонно, то (R, p_n)-метод включает метод Чезаро и поэтому обобщенная индивидуальная эргодическая теорема сразу вытекает из обычной теоремы Биркгофа—Хинчина. Укажем еще работу [24], в которой рассматривалась сходимость средних Рисса последовательности случайных величин с невозрастающими весами p_n.

Обзоры новых подходов и результатов, связанных с обобщением эргодических теорем, можно найти в работах [25—27].

§ 5. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ

Вновь вернемся к рассмотрению общего сохраняющего меру преобразования $T\colon M \to M$. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция с *нулевым средним* значением:

$$\int_M f\,d\mu = 0.$$

Если $f \not\equiv 0$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(T^n x), \tag{5.1}$$

как правило, расходится. Будем считать T эргодическим преобразованием.

При исследовании расходящихся рядов полезно ввести *множители суммируемости* (см., например, [3]). В нашем случае это невозрастающая последовательность положительных чисел α_n, такая, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(T^n x) \tag{5.2}$$

сходится для почти всех x. Особый интерес представляют медленно убывающие последовательности α_n.

В некоторых случаях в качестве множителей суммируемости можно взять любую невозрастающую последовательность $\alpha_n > 0$, причем $\alpha_n \to 0$. Так, если $f \in C^2$, то для почти всех поворотов окружности частичные суммы ряда (5.1) ограничены (см., например, [28]). Следовательно, по теореме Абеля—Дирихле, ряд (5.2) будет сходящимся.

Однако это редкое исключение. Например, для обеспечения сходимости ряда (5.2), где $f(T^n x)$ — функции Радемахера $r_{n+1}(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, требуется, чтобы α_n убывали с ростом n быстрее $1/\sqrt{n}$. Действительно, по теореме Хинчина—Колмогорова о рядах, ряд (5.2) будет сходиться для почти всех x тогда и только тогда, когда

$$\sum \alpha_n^2 < \infty.$$

Особый интерес представляет случай, когда $\alpha_n = 1/n$. Если ряд (5.2) сходится для почти всех $x \in M$, то (по лемме Кронекера) получаем теорему Биркгофа—Хинчина:

$$f(T^n x) \to 0 \quad (C) \tag{5.3}$$

почти всюду. Таким образом, если бы для интегрируемых функций f ряд (5.2) сходился почти всюду с $\alpha_n = 1/n$, то мы имели бы замечательное усиление теоремы Биркгофа—Хинчина (хотя бы для эргодических преобразований).

Положив $\alpha_n = 1/n$, применим к ряду (5.2) преобразование Абеля. Тогда ряд (5.2) перейдет в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n(n+1)}, \tag{5.4}$$

где S_n — частичная сумма ряда (5.1). Согласно (5.3), $S_n(x) = o(n)$ для почти всех x. Следовательно, сходимость ряда (5.4) зависит от того, насколько быстро убывает отношение S_n/n: быстрее или медленнее (по порядку убывания) $1/\ln n$.

Например, если T — сдвиг Бернулли единичного отрезка, а $f = r_1(x)$ — функция Радемахера, то

$$S_n = O(\sqrt{n \ln\ln n}) \quad \text{п. н.}$$

(закон повторного логарифма Хинчина). Следовательно, ряд (5.4) сходится с большим запасом.

Однако примеры показывают, что S_n может расти быстрее $n/\ln n$, что приводит к расходимости ряда (5.4). Рассмотрим случай, когда $M = \{x \bmod 2\pi\}$ — окружность со стандартной мерой, а T — сдвиг

$$x \mapsto x + \alpha$$

на угол α, несоизмеримый с π.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $\varphi(z)$, $z > 0$, — непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi' < 0$ и $\varphi(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Найдется такая непрерывная 2π-периодическая функция $f(x)$ с нулевым средним, что для некоторого x_0*

$$\begin{gathered} S_n(x_0) = f(x_0) + \ldots + f(x_0 + \alpha(n-1)) \geqslant cn\varphi(n) - \gamma, \\ c, \gamma = \text{const} > 0. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Это утверждение представляет самостоятельный интерес как дополнение к классической теореме Боля—Серпинского—Вейля. Оно показывает, что значения суммы S_n могут расти как произвольная функция $o(n)$. Отметим, что функция f, как правило, недифференцируема ни в одной точке (ср. с [28, гл. VII]). Если же $f \in C^2$, то $S_{n_k} \to 0$ по некоторой подпоследовательности $n_k \to \infty$ равномерно по x [28, 29]. Как позже показал Е. А. Сидоров [30], это утверждение справедливо для абсолютно непрерывных функций.

Отметим еще, что таких точек x_0 (фигурирующих в оценке (5.5)) на самом деле существенно больше: они образуют (по меньшей мере) счетное всюду плотное множество. Действительно, вместо x_0 можно взять точки вида $x_0 + m\alpha$, m — целое. В связи с этим замечанием возникает вопрос: справедливы ли оценки вида (5.5) для точек x_0, составляющих множество положительной меры? Положительный ответ на этот вопрос делает невозможным упомянутое выше усиление теоремы Биркгофа—Хинчина. Во всяком случае таким путем нельзя усилить теорему Боля—Серпинского—Вейля (достаточно положить в теореме 7 $\varphi(z) = 1/\ln z$). Однако, как доказано в [31], для почти всех x последовательность $S_n(x)$ частичных сумм ряда (5.1) бесконечно много раз меняет знак и поэтому не может стремиться к бесконечности при $n \to \infty$.

В основе доказательства теоремы 7 лежит конструкция, восходящая к Пуанкаре [32]. Пример Пуанкаре [33], показывающий возможность возрастания к бесконечности суммы S_n с точными оценками (и с исправлением некоторых неточностей, содержавшихся в [33]), рассмотрен в книге [28]. Так, разобран частный случай теоремы 7, когда $n\varphi(n) = cn^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Мы докажем теорему 7 для условно-периодического потока на двумерном торе. С помощью сечения Пуанкаре легко получить соответствующий пример для поворота окружности (см., например, [28, гл. VIII]).

Итак, рассмотрим на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ динамическую систему

$$\dot\varphi_1 = 1, \quad \dot\varphi_2 = \sqrt{2}.$$

Ее решениями будут линейные функции

$$\varphi_1 = t + \varphi_1^0, \quad \varphi_2 = \sqrt{2}t + \varphi_2^0, \tag{5.6}$$

$\varphi_s^0 = \mathrm{const}$. Ввиду иррациональности $\sqrt{2}$ каждая такая траектория всюду плотна на $\mathbb{T}^2$.

Далее введем последовательность целых чисел u_n, v_n, заданную соотношением

$$(\sqrt{2} - 1)^n = u_n + v_n\sqrt{2}.$$

Таким образом, $u_1 = -1$, $u_2 = 3$, $\ldots$, $v_1 = 1$, $v_2 = -2, \ldots$

Введем теперь функцию $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, определяемую лакунарным тригонометрическим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\cos(u_n\varphi_1 + v_n\varphi_2), \tag{5.7}$$

где $\psi(n)$ — убывающая последовательность положительных чисел, такая, что

$$\sum \psi(n) < \infty. \tag{5.8}$$

Функция f непрерывна, и ряд (5.7) является ее рядом Фурье. Кроме того, среднее f по тору равно нулю.

Положим в (5.6) начальные фазы φ_s^0 равными нулю. На решении (5.6) f будет функцией t. Интеграл от этой функции имеет следующий вид:

$$I(t) = \int\limits_0^t \sum \psi(n) \cos \frac{t}{\Lambda^n}\, dt, \quad \Lambda = \sqrt{2} + 1. \tag{5.9}$$

Ввиду сходимости ряда (5.8) операции интегрирования и суммирования можно переставить:

$$I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^n \psi(n) \sin \frac{t}{\Lambda^n}.$$

Следуя [28], оценим рост этой функции. Пусть

$$\frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\Lambda^n, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Тогда

$$0 < \frac{\pi}{2\Lambda^{k+1}} \leqslant \frac{t}{\Lambda^{n+k}} \leqslant \frac{\pi}{2\Lambda^k} < \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Следовательно,

$$\sin \frac{t}{\Lambda^{n+k}} \geqslant \frac{2t}{\pi \Lambda^{n+k}} \geqslant \frac{1}{\Lambda^{k+1}},$$

и поэтому

$$I(t) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{n+k} \psi(n+k) \sin \frac{t}{\Lambda^{n+k}} - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^k \psi(k) \sin \frac{t}{\Lambda^k} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \Lambda^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \psi(n+k) - \sum_{k=0}^{n-1} \psi(k). \tag{5.9$'$}$$

При оценке последнего слагаемого использовалось очевидное неравенство $\sin x < x$ $(x > 0)$. Ввиду условия (5.8) второе слагаемое в оценке (5.9) не превосходит некоторой постоянной γ.

По предположению, функция $\psi(x)$ монотонно убывает. Значит,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(n+k) \geqslant \int_{n}^{\infty} \psi(x)\, dx.$$

Итак, мы получим в интервале $[\pi\Lambda^{n-1}/2, \pi\Lambda^{n}/2]$ следующую оценку:

$$I(t) \geqslant \Lambda^{n-1} \int_{n}^{\infty} \psi(x)\, dx - \gamma. \tag{5.10}$$

Ясно, что в этом интервале

$$\Lambda^{n-1} \geqslant \frac{2t}{\pi\Lambda}, \quad n \leqslant \frac{1}{\ln\Lambda} \ln\frac{2t}{\pi} + 1.$$

С учетом этих неравенств можно уточнить оценку (5.10):

$$I(t) \geqslant \frac{2t}{\pi\Lambda} \int_{\xi(t)}^{\infty} \psi(x)\, dx - \gamma, \tag{5.11}$$

где

$$\xi(t) = \frac{1}{\ln\Lambda} \ln\frac{2t}{\pi} + 1.$$

Ввиду условия (5.8) и предположения о монотонном убывании $\psi(x)$ функция

$$\int_{\xi(t)}^{\infty} \psi(x)\, dx \tag{5.12}$$

стремится к нулю при $t \to \infty$. Пусть $\varphi(t) > 0$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi'(t) < 0$ и $\varphi(t) \to 0$, когда $t \to \infty$. Положим $\varphi(t) = \zeta(\ln t)$ и приравняем ζ интегралу (5.12):

$$\int_{\xi(t)}^{\infty} \psi(x)\, dx = \zeta(\ln t).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t, получаем

$$\psi(\xi(t)) = -\zeta' \ln\Lambda,$$

или

$$\psi\left(\frac{z}{\ln\Lambda} + \frac{\ln(2/\pi)}{\ln\Lambda} + 1\right) = -\zeta'(z)\ln\Lambda.$$

Так как $\zeta' < 0$, то это равенство определяет функцию ψ, удовлетворяющую условию (5.8). В итоге оценка (5.11) принимает искомый вид:

$$I(t) \geqslant ct\varphi(t) - \gamma, \quad c = \frac{2}{\pi\Lambda}.$$

§ 6. ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Продолжим обсуждение круга вопросов, связанных с суммированием расходящегося ряда (5.1). Снова будем считать, что интегрируемая функция f имеет нулевое среднее. Однако (в отличие от § 5) преобразование T не обязано быть эргодическим.

В эргодической теории существенное значение имеет *гомологическое уравнение*

$$g(Tx) - g(x) = f(x). \tag{6.1}$$

В качестве примера рассмотрим *цилиндрический каскад* — дискретную динамическую систему на прямом произведении $M \times \mathbb{R} = \{x, y\}$, заданную отображением

$$x \mapsto Tx, \quad y \mapsto y + f(x). \tag{6.2}$$

Нетрудно понять, что каждое решение g гомологического уравнения (6.1) определяет инвариантное множество $\{y = g(x)\}$ отображения (6.2). Гомологическое уравнение часто встречается в задачах приведения и сопряжения динамических систем (см., например, [34]).

Решением уравнения (6.1) будем называть интегрируемую по Лебегу функцию $g\colon M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (6.1) для почти всех $x \in M$. Интегрируя обе части (6.1) по множеству M и учитывая инвариантность меры μ при преобразовании T, получаем необходимое условие разрешимости гомологического уравнения:

$$\int\limits_M f\, d\mu = 0. \tag{6.3}$$

ТЕОРЕМА 8. *Гомологическое уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда ряд (5.1) сходится по Чезаро почти всюду к интегрируемой функции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g — интегрируемое решение (6.1). Итерируя гомологическое уравнение, получаем цепочку равенств

$$g(T^{n+1}x) - g(T^n x) = f(T^n x), \quad n = 0, 1 \ldots,$$

откуда

$$S_n = g(T^n x) - g(x),$$

где $S_n (n \geqslant 1)$ — частичные суммы ряда (5.1). Следовательно,

$$\frac{S_1 + \ldots + S_n}{n} = \frac{g(Tx) + \ldots + g(T^n x)}{n} - g(x).$$

По теореме Биркгофа—Хинчина для почти всех $x \in M$

$$S_n(x) \to \bar{g}(x) - g(x) \quad (\mathrm{C}),$$

где функция $\bar{g}$ интегрируема и инвариантна относительно T.

Обратно, пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(T^n x) = G(x) \quad (\mathrm{C}) \tag{6.4}$$

почти всюду на M и G — интегрируемая функция. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(T^n x) = G(Tx) \quad (\mathrm{C}). \tag{6.5}$$

Хорошо известно [3, гл. I], что метод Чезаро обладает свойством *естественности*: если $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = a$ (С), то $a_1 + a_2 + \ldots = a - a_0$ (С), и обратно. Используя это свойство и соотношения (6.4) и (6.5), получаем равенство

$$f(x) = G(x) - G(Tx).$$

Следовательно, интегрируемая функция $-G$ является решением гомологического уравнения (6.1). Что и требовалось доказать.

В качестве простого примера рассмотрим гомологическое уравнение для сдвига Бернулли единичного отрезка, полагая f равным функции Радемахера $r_1(x)$. Ясно, что необходимое условие разрешимости (6.3) выполнено. Если уравнение имеет интегрируемое по Лебегу решение, то (по теореме 8) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6.6}$$

должен сходиться по Чезаро для почти всех x. Однако, как показал Зигмунд [35] (см. также [36]), если ряд (6.6) почти всюду суммируем некоторым матричным методом (например, методом Чезаро), то он должен почти всюду сходиться. Однако это не так, и поэтому соответствующее гомологическое уравнение не допускает суммируемых решений. Впрочем, этот вывод легко доказать непосредственно.

Как видно из доказательства теоремы 8, метод Чезаро можно заменить любым более сильным методом, который обладает свойством естественности. Например, методом Абеля.

В качестве иллюстрации вычислим решение уравнения (6.1) для поворота окружности $x \mapsto x + \alpha$. Пусть функция f представляется рядом Фурье

$$\sum{}' c_m e^{imx},$$

причем

$$\sum{}' |c_m| < \infty. \tag{6.7}$$

Штрих означает, что $m \neq 0$. Из (6.7) вытекает, в частности, что f непрерывна.

Воспользуемся методом Абеля и сопоставим ряду (5.1) степенной ряд

$$\sum_n \Big[\sum_m{}' c_m e^{imx} e^{imn\alpha} \Big] z^n.$$

Ввиду условия (6.7) суммирование по m и n можно переставить:

$$\sum_m{}' c_m e^{imx} \sum_n (e^{im\alpha} z)^n.$$

При $|z| < 1$ последняя сумма равна

$$\sum_m{}' \frac{c_m}{1 - ze^{im\alpha}} e^{imx}. \tag{6.8}$$

Если предположить, что

$$\sum{}' \left| \frac{c_m}{1 - e^{im\alpha}} \right| < \infty,$$

то при $z \to 1$ функция (6.8) имеет пределом функцию

$$\sum{}' \frac{c_m}{1 - e^{im\alpha}} e^{imx}, \tag{6.9}$$

которая со знаком минус является непрерывным решением гомологического уравнения

$$g(x + \alpha) - g(x) = f(x).$$

Конечно, формулу (6.9) можно сразу получить, решая это уравнение методом Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халмош П.* Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1959.
2. *Вейль Г.* Избранные труды. М.: Наука, 1984.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 19[illegible].
4. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: ИЛ, 1960.
5. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978.
6. *Cigler J.* Methods of summability and uniform distribution mod 1 // Composito Math. 1964. V. 16. P. 44—51.
7. *Doroidar A. F.* A note on the generalired uniform distribution (mod 1) // J. Natur. Sci. and Math. 1971. V. 11. P. 185—189.
8. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
9. *Tsuji M.* On the uniform distribution of numbers mod 1 // J. Math. Soc. Japan. 1952. V. 4. P. 313—322.
10. *Козлов В. В.* О равномерном распределении // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 96—99.
11. *Hanson D. L., Pledger G.* On the mean ergodic theorem for weighted averages // Z. Wahrscheinlichkeitsteorie und verw. Geb. 1969. Bd 13, N 13. S. 141—149.
12. *Cohen L. W.* On the mean ergodic theorem // Ann. Math. II Ser. 1940. V. 41. P. 505—509.
13. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: ИЛ, 1963.
14. *Frank W. E., Hanson D. L.* Some results giving rates of convergence in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124, N 2. P. 347—359.
15. *Hanson D. L., Wright F. T.* Some convergence results for weighted sums of independent random variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. 1971. Bd 19. S. 81—89.
16. *Колмогоров А. Н.* Об усиленном законе больших чисел // А. Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 59—60.
17. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
18. *Халмош П.* Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
19. *Колмогоров А. Н.* О законе повторного логарифма // А. Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 34—44.
20. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.

21. *Baxter G.* An ergodic theorem with weighted averages // J. Math. and Mech. 1964. V. 13, N 3. P. 481—488.
22. *Baxter G.* A general ergodic theorem with weighted averages // Ibid. 1965. V. 14, N 2. P. 277—288.
23. *Chacon R. V.* Ordinary means imply recurrent means // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 796—797.
24. *Гапошкин В. Ф.* О суммировании стационарных последовательностей методами Рисса // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 653—662.
25. *Каток А. Б. Синай Я. Г. Степин А. М.* Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой // Мат. анализ. М., 1975. С. 129—262. (Итоги науки и техники / ВИНИТИ; Т. 13).
26. *Krengel U.* Recent progress in ergodic theorems // Astériaque. 1977. N 50. P. 151—192.
27. *Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г.* Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой // Современные проблемы математики, фундаментальные направления. М., 1985. С. 5—111. (Итоги науки и техники / ВИНИТИ; Т. 2).
28. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
29. *Козлов В. В.* Об одной задаче Пуанкаре // ПММ. 1976. Т. 40, вып. 2. С. 325—355.
30. *Сидоров Е. А.* Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем // УМН. 1979. Т. 34, вып. 6. С. 184—188.
31. *Halász G.* Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1976. V. 28, N 3—4. P. 389—395.
32. *Poincaré H.* Sur les séries trigonométriques // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, 1885. V. 101, N 2. P. 1131—1134.
33. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: Гостехиздат, 1974.
34. *Арнольд В. И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск, 1999.
35. *Zygmund A.* On the convergence of lacunary trigonometric series // Fund. Mathematicae. 1930. V. 16. P. 90—107.
36. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир. 1973.