УДК 530.1 + 532.5

© 2002 г. Н.В. Денисова, В.В. Козлов

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, РЕЗОНАНСЫ И ЛАГРАНЖЕВА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Развивается метод, который позволяет установить свойство нерегулярности движения частиц жидкости (называемое хаотической адвекцией или лагранжевой турбулентностью) для типичных стационарных течений. Метод основан на разложении решений уравнений движения сплошной среды в ряды по степеням малого параметра и использовании условия разрушения инвариантных резонансных торов при добавлении возмущения. Показано, что поле скоростей, определяемое как решение уравнений Бюргерса, в общем случае порождает нерегулярную динамическую систему. Для идеальной баротропной жидкости в потенциальном силовом поле предложенный метод дает известное необходимое условие хаотизации: поле скорости коллинеарно своему ротору. Особое внимание уделено исследованию хаотизации типичных стационарных течений теплопроводного совершенного газа.

1. Регулярные и хаотические стационарные течения. В области D трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$ рассмотрим стационарное течение жидкости. Ниже в основном рассматриваются течения, 2π-периодические по координатам x и y; в этом случае областью D служит прямое произведение $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ – двумерный тор. Стационарное поле скоростей $\mathbf{v}$ находится как не зависящее явно от времени t решение уравнений движения сплошной среды. Примеры конкретных моделей сплошных сред будут рассмотрены ниже.

Движение частиц жидкости описывается автономной динамической системой

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D. \tag{1.1}$$

Пусть g^t – ее фазовый поток. Действие группы g^t на области D – это *адвекция* (перенос частиц жидкости). Хаотическую адвекцию принято называть *лагранжевой турбулентностью*.

Строгое исследование лагранжевой турбулентности предполагает наличие точного определения свойства хаотичности динамической системы (1.1). Однако в силу ряда причин невозможно сформулировать универсальное свойство хаотичности. Хаотичность естественно противопоставляется регулярному поведению системы (1.1). Имеются различные неэквивалентные подходы к определению регулярной динамической системы (см., например, [1]). Их объединяет наличие нетривиальных тензорных инвариантов. Простейшие среди них – интегралы, поля симметрий и интегральные инварианты.

Напомним, что локально непостоянная функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *интегралом* системы (1.1), если

$$df / dt = (\partial f / \partial \mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$$

Область течения расслоена на инвариантные интегральные поверхности $N_c = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = c\}$. Если поверхность N_c компактна (т.е. ограничена) и на ней скорость $\mathbf{v}$ нигде не обращается в нуль, то эта поверхность топологически эквивалентна двумерному тору.

Поле $\mathbf{w}$ называется *полем симметрий*, если $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$, где $[\cdot, \cdot]$ – скобка Якоби. Интерес представляют нетривиальные поля симметрий, когда векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ не коллинеарны. Фазовый поток поля $\mathbf{w}$ переводит решения системы (1.1) в решения той же системы. Более общим является *вмороженное поле направлений* $\mathbf{w}$; оно определяется условием $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \lambda \mathbf{w}$, где λ – некоторая функция, заданная в области D. Поток g^t переводит семейство интегральных кривых поля $\mathbf{w}$ в себя (см. [2, 3]). Свойства симметрии течения жидкости играют существенную роль в теории турбулентности [4].

Дифференциальная 1-форма ω порождает *интегральный инвариант*, если

$$I(t) = \int_{g^t\gamma} \omega = \text{const}$$

для всех замкнутых циклов γ. Надо, конечно, еще предположить, что $d\omega \neq 0$ (ω не сводится к полному дифференциалу). Иначе $I(t) \equiv \text{const}$.

Выразительным примером регулярного течения служит стационарное течение баротропной невязкой жидкости в потенциальном силовом поле. Оно допускает интеграл (интеграл Бернулли), поле симметрий ($\mathbf{w} = \rho^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{v})$, где ρ – плотность жидкости) и интегральный инвариант (циркуляция жидкости по замкнутому жидкому контуру). Поле симметрий найдено в [5]; в случае однородной жидкости ($\rho \equiv \text{const}$) оно было отмечено ранее [6].

Чтобы интеграл Бернулли и указанное поле симметрий не были тривиальными, надо потребовать, чтобы поле $\mathbf{v}$ не было коллинеарно своему ротору. Это условие существенно. Например, для известного ABC-течения оно не выполнено, и это течение в общем случае не регулярно.

Было показано [7], что типичные стационарные течения вязкой жидкости не регулярны и обладают хаотическими свойствами. С другой стороны, как известно, турбулентность возникает при больших числах Рейнольдса. При фиксированных характерных масштабах и скорости течения это эквивалентно уменьшению вязкости. Однако, как указано выше, при нулевой вязкости типичные стационарные течения жидкости становятся регулярными.

2. Условия существования тензорных инвариантов. В малой окрестности любой неособой точки система (1.1) имеет все тензорные инварианты: непостоянный интеграл, нетривиальное поле симметрий и интегральный инвариант. Ситуация резко меняется, когда рассматривается задача о существовании инвариантов в целом (заданных во всей области течения D). Оказывается, динамические системы общего вида не имеют нетривиальных глобальных инвариантов. Это обстоятельство имеет существенное значение в механике сплошной среды.

Пример. Пусть жидкость несжимаемая. Тогда из уравнения неразрывности вытекает, что плотность ρ – первый интеграл. Если уравнения (1.1) не допускают непостоянных интегралов, то $\rho \equiv \text{const}$ (т.е. жидкость будет однородной). В случае регулярных течений, вообще говоря, $\rho \not\equiv \text{const}$.

Поиск конструктивных условий регулярности или хаотичности динамической системы (1.1) представляет весьма сложную задачу. Она обсуждалась [8] для динамических систем классической динамики.

Ограничимся рассмотрением в области $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ автономных систем следующего вида:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \ldots; \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad \mathbf{v}_i = (u_i, v_i, w_i), \quad i = 0, 1, \ldots, \quad w_0 \equiv 0 \tag{2.1}$$

Здесь u_i, v_i и w_i – аналитические функции, 2π-периодически зависящие от x и y; u_0 и v_0 зависят лишь от "медленной" переменной z; ε – малый параметр. Системы такого вида часто встречаются в теории линейных колебаний. При $\varepsilon = 0$ будем иметь вполне интегрируемую (следовательно, регулярную) динамическую систему: ее фазовое пространство расслоено на инвариантные торы z = const, заполненные условно-периодическими траекториями с частотами $u_0(z)$ и $v_0(z)$.

Тензорные инварианты системы (2.1) естественно искать в виде рядов по степеням ε, коэффициенты которых однозначны и аналитичны в области $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Например, интеграл имеет вид $f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots$, где f_k – аналитические функции, 2π-периодически зависящие от x и y.

Пусть $\Sigma W_{mn}(z)e^{i(mx+ny)}$ – ряд Фурье функции w_1. *Множеством Пуанкаре* $\mathbb{P}$ назовем совокупность точек $z \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$mu_0(z) + nv_0(z) = 0, \quad W_{mn}(z) \neq 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0) \tag{2.2}$$

В общем случае множество $\mathbb{P}$ всюду плотно заполняет числовую прямую $\mathbb{R} = \{z\}$. Соотношения вида (2.2) с целыми m, n называются *резонансами*. Невозмущенную систему (когда $\varepsilon = 0$) назовем *невырожденной*, если $mu_0(z) + nv_0(z) \not\equiv 0$ для всех целых m, n, не равных одновременно нулю.

Укажем простое достаточное условие невырожденности: $u_0'v_0 - u_0v_0' \not\equiv 0$. Штрих означает производную по z.

Теорема 1. Предположим, что невозмущенная система невырождена, а множество Пуанкаре имеет хотя бы одну конечную предельную точку. Тогда система (2.1) не допускает нетривиальных интегралов и вмороженных полей направлений, аналитических по ε. Если, кроме того, $W_{00}(z) \neq 0$, то система (2.1) не допускает нетривиальных интегральных инвариантов.

Отсутствие интегралов вытекает из более общих результатов [8], являющихся обобщением теории Пуанкаре о препятствиях к интегрируемости гамильтоновых систем, мало отличающихся от вполне интегрируемых [9]. Были установлены [3, 7] случаи несуществования вмороженных полей направлений и интегральных инвариантов. Отметим существенный момент: условия теоремы 1 гарантируют отсутствие нетривиальных инвариантов, которые можно представить в виде *формальных* (не обязательно сходящихся) рядов по ε.

Механизм хаотизации системы (2.1) состоит в том, что типичные резонансные торы разрушаются при добавлении возмущения: на месте таких торов возникают "островки" с хаотическим поведением траекторий, причем при малых значениях ε их размеры, как правило, увеличиваются с ростом ε; кроме того, типичный размер "островков" неустойчивости уменьшается по мере увеличения порядка резонанса $|m| + |n|$. При некоторых дополнительных условиях на месте разрушающихся резонансных торов появляются пары *невырожденных* периодических траекторий; одно из них – эллиптическое, а другое – гиперболическое. Сепаратрисы гиперболических периодических траекторий в пересечении образуют запутанную сеть, в окрестности которой имеются квазислучайные траектории (см. примеры из гидродинамики [7]).

Укажем более простое достаточное условие отсутствия первых интегралов невырожденной системы (2.1), аналитически зависящих от параметра ε:

$$\langle w_1 \rangle = W_{00}(z) \not\equiv 0 \tag{2.3}$$

Действительно, пусть $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$ – непостоянный первый интеграл. Ввиду предположения о невырожденности системы (2.1) при $\varepsilon = 0$, функция f_0 не зависит от угловых координат x, y [8]. В первом приближении по ε условие $df/dt = 0$ принимает вид

$$f_0'w_1 + u_0\partial f_1/\partial x + v_0\partial f_1/\partial y = 0$$

После усреднения по угловым координатам x, y получаем уравнение $f_0'W_{00} = 0$. Поскольку в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то из условия (2.3) получаем $f_0' = 0$. Следовательно, $f_0 \equiv \mathrm{const}$ и функция $(f - f_0)/\varepsilon = f_1 + \varepsilon f_2 + \ldots$ будет первым интегралом системы (2.1). Снова получаем, что $f_1 \equiv \mathrm{const}$. Продолжая этот процесс, приходим к равенствам $f_n \equiv \mathrm{const}$, $n \geqslant 0$. Следовательно, $f \equiv \mathrm{const}$.

Отметим, что условие (2.3) носит формальный характер и не связано с хаотизацией траекторий системы (2.1). Если система (2.1) получена из гамильтоновой после понижения порядка по Уиттекеру, то условие (2.3) заведомо не выполнено [8].

Приведем простой пример системы, удовлетворяющей условию (2.3), и которая имеет интегралы, неаналитически зависящие от параметра ε:

$$dx/dt = 1,\quad dy/dt = v_0(z) + \varepsilon v_1 + \ldots,\quad dz/dt = \varepsilon \tag{2.4}$$

Здесь $\langle w_1 \rangle = 1$ и поэтому эта система не допускает однозначных первых интегралов, аналитических по ε. Однако при всех $\varepsilon \neq 0$ она имеет интеграл $\sin(x - z/\varepsilon)$, который 2π-периодически зависит от x и неаналитичен по ε при $\varepsilon = 0$.

Отметим, что система (2.4) допускает аналитическую инвариантную 1-форму $\omega = \varepsilon dx - dz$. Этот факт не противоречит теореме 1, поскольку здесь множество Пуанкаре пусто.

По-видимому, наличие конечных предельных точек множества Пуанкаре влечет несуществование непостоянных аналитических инвариантов при малых фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$. Однако это пока не доказано.

3. Приложение к уравнениям Бюргерса. Был предложен [7] общий метод исследования свойства регулярности типичных стационарных течений несжимаемой вязкой жидкости. Ищутся решения уравнений Навье–Стокса в форме рядов по степеням параметра ε вида (2.1) и затем применяется теорема 1. Оказалось, что типичные стационарные течения хаотичны (в смысле, отмеченной в разд. 2), хотя некоторые течения (например, течение Гагена–Пуазейля в цилиндре) могут быть регулярными. Этот результат показывает, что классические результаты Бернулли, Гельмгольца и Томсона об инвариантах течений идеальной жидкости не могут быть распространены на случай вязкой жидкости.

Было показано [7], что этот вывод справедлив и для упрощенных уравнений Навье–Стокса, когда пренебрегается инерционными слагаемыми (приближение Стокса).

Продемонстрируем возможности применения указанного метода к *уравнениям Бюргерса*, которые также являются упрощением системы Навье–Стокса (жидкость без давления). Они имеют вид [10]

$$d\mathbf{v}/dt = \nu\Delta\mathbf{v} \tag{3.1}$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0$ – коэффициент кинематической вязкости. Эти уравнения имеют решение в виде ряда

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1 + \ldots,\quad \mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0),\quad \mathbf{v}_1 = (u_1, v_1, w_1)$$

где

$$u_0 = \alpha z + \beta,\quad v_0 = \gamma z + \delta \tag{3.2}$$

α, β, γ, δ – произвольные постоянные. Функция $\mathbf{v}_1$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$L\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\alpha} w_1 = \nu\Delta\mathbf{v}_1;\quad L = u_0\frac{\partial}{\partial x} + v_0\frac{\partial}{\partial y},\quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \gamma, 0)$$

Оно легко решается методом Фурье. Пусть U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} – коэффициенты Фурье компонент скорости u_1, v_1, w_1 соответственно; они являются функциями z. Эти коэффициенты удовлетворяют линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую запишем в векторном виде

$$i(mu_0 + nv_0)\mathbf{V}_{mn} + \boldsymbol{\alpha} W_{mn} = \nu[-(m^2 + n^2)\mathbf{V}_{mn} + \mathbf{V}_{mn}''],\quad \mathbf{V}_{mn} = (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}). \tag{3.3}$$

Каждое из решений этой системы определено на всей числовой оси $\mathbb{R} = \{z\}$ и однозначно задается значениями U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} и их производных в некоторой точке z_{mn}. Положим

$$z_{mn} = -(m\beta + n\delta)/(m\alpha + n\gamma) \tag{3.4}$$

Эта точка – корень уравнения $mu_0 + nv_0 = 0$.

Пусть

$$\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0 \tag{3.5}$$

Это – условие невырожденности невозмущенной системы. Кроме того, учитывая условие (3.5), заключаем, что множество точек вида (3.4) всюду плотно заполняет ось $\mathbb{R} = \{z\}$. Если $W_{mn}(z_{mn}) \neq 0$ (типичный случай), то множество Пуанкаре всюду плотно и поэтому (по теореме 1) типичное стационарное течение жидкости в модели Бюргерса не имеет непостоянных интегралов и нетривиальных вмороженных полей направлений. Далее, при $m = n = 0$ система уравнений (3.3) не вырождается и поэтому в общем случае можно считать, что $W_{00} \neq 0$. Следовательно, в общем случае отсутствуют и нетривиальные интегральные инварианты.

Положим теперь $\nu = 0$. Тогда уравнения Бюргерса (3.1) перейдут в *уравнения Хопфа*, описывающие движение бесстолкновительной сплошной среды по инерции

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}\partial \mathbf{v}/\partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Согласно условию (3.5), одно из чисел α или γ отлично от нуля. Следовательно, из (3.3) вытекает, что $W_{mn}(z) = 0$ при $z = z_{mn}$. Поэтому в рассматриваемом случае множество Пуанкаре пусто и теорема 1 не применима.

Это, конечно, не случайно: для системы Хопфа уравнения (1.1) допускают интеграл $f = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$, поле симметрий $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ и интегральный инвариант

$$\int (\mathbf{v}, d\mathbf{x}) = \text{const}$$

4. Необходимое условие хаотичности течений идеальной жидкости. Развиваемый метод поучительно применить к уравнениям Эйлера, описывающим движение идеальной жидкости. В этом случае теорема 1 приводит к условию хаотизации стационарных течений: поле скорости коллинеарно своему ротору.

Для простоты записи ограничимся случаем однородной жидкости ($\rho \equiv \text{const}$). Уравнения движения в потенциальном поле имеют вид

$$d\mathbf{v}/dt = -\partial f/\partial \mathbf{x}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $f = p/\rho + V$, где p – давление, а V – потенциал внешних массовых сил.

Ищем решение уравнений (4.1) в виде рядов

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \ldots, \quad w_0 = 0, \quad f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots, \quad f_0 = \text{const}$$

Здесь u_0, v_0 – произвольные аналитические функции z.

В первом приближении по ε имеем следующую систему уравнений в частных производных (штрих означает производную по z):

$$L\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0' w_1 = -\partial f_1 / \partial \mathbf{x}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0$$

Решая ее методом Фурье, получаем уравнения

$$i(mu_0 + nv_0)U_{mn} + u_0' W_{mn} + imF_{mn} = 0$$
$$i(mu_0 + nv_0)V_{mn} + v_0' W_{mn} + inF_{mn} = 0$$
$$i(mu_0 + nv_0)W_{mn} + F_{mn}' = 0 \tag{4.2}$$
$$i(mU_{mn} + nV_{mn}) + W_{mn}' = 0$$

Предположим, что выполнены условия теоремы 1 и стационарное течение заведомо не допускает инвариантов в виде рядов по степеням параметра ε. Тогда множество Пуанкаре $\mathbb{P}$ содержит бесконечно много различных точек z_{mn}, накапливающихся в некотором конечном интервале числовой оси $\mathbb{R} = \{z\}$. Поскольку в этих точках $mu_0 + nv_0 = 0$, а $W_{mn} \neq 0$, то из первых двух уравнений системы (4.2) имеем равенство $nu'_0 - mv'_0 = 0$. Следовательно, на множестве $\mathbb{P}$ справедливо соотношение

$$u_0 u_0' + v_0 v_0' = 0 \tag{4.3}$$

Так как множество $\mathbb{P}$ имеет конечные предельные точки, а функции u_0, v_0 предполагаются аналитическими, то равенство (4.3) справедливо всюду. Остается заметить, что соотношение (4.3) эквивалентно условию коллинеарности векторных полей rot $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}$ при $\varepsilon = 0$.

На самом деле из системы (4.2) можно получить коллинеарность этих полей в первом приближении по ε. Например, условие коллинеарности в проекции на ось z имеет вид

$$\partial v_1 / \partial x - \partial u_1 / \partial y = \lambda_0 w_1, \quad \lambda_0 = \lambda_0(z)$$

Оно эквивалентно бесконечной цепочке алгебраических соотношений для коэффициентов Фурье

$$i(mV_{mn} - nU_{mn}) = \lambda_0 W_{mn} \tag{4.4}$$

С другой стороны, из соотношения (4.3) вытекает, что $u'_0 = \mu v_0$, $v'_0 = -\mu u_0$, где μ – некоторая функция z. Подставляя эти соотношения в уравнения (4.2) и используя невырожденность невозмущенной системы, а также отсутствие делителей нуля в кольце аналитических функций, получаем соотношение (4.4), в котором $\lambda_0 = \mu$.

5. Стационарные течения совершенного газа. Применим предлагаемый метод в случае совершенного газа, динамика которого описывается следующей замкнутой системой уравнений:

$$\rho d\mathbf{v} / dt = -\partial p / \partial \mathbf{x} + \rho \mathbf{F}, \quad d\rho / dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad p = b\rho\tau$$
$$\rho a d\tau / dt = b\tau d\rho / dt + \varkappa \Delta \tau \tag{5.1}$$

Здесь первое уравнение – уравнение Эйлера ($\mathbf{F}$ – внешняя сила), второе – уравнение неразрывности, третье – уравнение состояния (τ – абсолютная температура, b – газовая постоянная), четвертое – уравнение притока тепла (a, $\varkappa$ = const – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности соответственно).

Рассмотрим сначала простой случай, когда $\varkappa = 0$. Тогда из четвертого уравнения (5.1) сразу следует интеграл

$$g = \tau / \rho^{\lambda}, \quad \lambda = b / a \tag{5.2}$$

Если внешние силы потенциальны ($\mathbf{F} = -\partial V/\partial \mathbf{x}$), то имеет место обобщенный интеграл Бернулли

$$f = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) / 2 + (a + b)\tau + V$$

Это показывает, что при $\varkappa = 0$ типичные стационарные течения совершенного газа регулярны. Более того, если область течения D компактна и функции f и g почти всюду независимы, то траектории почти всех частиц жидкости замкнуты: частицы движутся по замкнутым орбитам, вообще говоря, с разными периодами.

Ситуация резко меняется, когда $\varkappa \neq 0$: типичное стационарное течение газа в произвольном непотенциальном силовом поле вообще не допускает непостоянных интегралов.

Пусть X, Y, Z – компоненты векторного поля $\mathbf{F}$: это – функции x, y, z, 2π-периодически зависящие от x, y. Рассмотрим случай, когда они представляются в виде ряда по степеням параметра ε

$$X = \varepsilon X_1 + \ldots, \quad Y = \varepsilon Y_1 + \ldots, \quad Z = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \ldots$$

где Z_0 – аналитическая функция z. При $\varepsilon = 0$ это силовое поле потенциально.

Ищем решения системы (5.1) в форме степенных рядов

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \ldots, \quad \rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \ldots, \quad \tau = \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \ldots \tag{5.3}$$

$$\mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{v}_1 = (u_1, v_1, w_1)$$

Функция τ_0 линейно зависит от z, u_0 и v_0 – произвольные функции z, а ρ_0 как функция высоты z находится из равенства

$$Z_0 = b(\rho_0 \tau_0)' / \rho_0$$

Ограничимся рассмотрением частного случая, когда u_0 и v_0 – линейные функции z вида (3.2), причем $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Снова определим числа z_{mn} по формуле (3.4).

Пусть X_{mn} и Y_{mn} – коэффициенты Фурье функций X_1 и Y_1 соответственно.

Теорема 2. Если $nX_{mn} - mY_{mn} \neq 0$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$ при $z = z_{mn}$, то указанные стационарные течения совершенного газа не допускают нетривиальных инвариантов, аналитических по ε.

Ясно, что непотенциальные силовые поля общего вида удовлетворяют условию теоремы 2. Доказательство теоремы 2 опирается на теорему 1.

Подставляя разложения (5.3) в систему (5.1), получаем цепочку уравнений в частных производных для последовательного отыскания коэффициентов. В первом приближении по ε получим линейную систему относительно $u_1, \ldots \rho_1, \tau_1$, которая легко решается методом Фурье. Коэффициенты Фурье $U_{mn}, \ldots \mathcal{P}_{mn}$, $\mathcal{T}_{mn}$ удовлетворяют следующей системе алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&i(mu_0 + nv_0)U_{mn} + u_0' W_{mn} = -ibm\Delta_{mn} + X_{mn} \\
&i(mu_0 + nv_0)V_{mn} + v_0' W_{mn} = -ibn\Delta_{mn} + Y_{mn} \\
&i(mu_0 + nv_0)W_{mn} = -b\Delta_{mn}' - b\rho_0'\rho_0^{-1}\mathcal{T}_{mn} + b\tau_0'\rho_0^{-1}\mathcal{P}_{mn} + Z_{mn} \\
&i(mu_0 + nv_0)\mathcal{P}_{mn} + \rho_0' W_{mn} + \rho_0(imU_{mn} + inV_{mn} + W_{mn}') = 0 \\
&a[i(mu_0 + nv_0)\mathcal{T}_{mn} + \tau_0' W_{mn}] = b\tau_0\rho_0^{-1}[i(mu_0 + nv_0)\mathcal{P}_{mn} + \rho_0' W_{mn}] + \\
&+\varkappa\rho_0^{-1}[\mathcal{T}_{mn}'' - (m^2 + n^2)\mathcal{T}_{mn}]
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\Delta_{mn} = \mathcal{T}_{mn} + \rho_0^{-1}(\tau_0 \mathcal{P}_{mn})$.

Из первых двух уравнений однозначно находятся коэффициенты U_{mn} и V_{mn}. Для того чтобы эти функции были аналитическими на прямой $\mathbb{R} = \{z\}$, необходимо и достаточно, чтобы при $z = z_{mn}$ были выполнены соотношения

$$\alpha W_{mn} + m(ib\Delta_{mn}) = X_{mn}, \quad \gamma W_{mn} + n(ib\Delta_{mn}) = Y_{mn}$$

В силу условия невырожденности определитель этой системы отличен от нуля при $m^2 + n^2 \neq 0$. Следовательно, значения W_{mn} и Δ_{mn} в точке z_{mn} находятся однозначно, причем (согласно предположению теоремы 2) $W_{mn}(z_{mn}) \neq 0$.

Подставляя найденные выражения для U_{mn} и V_{mn} в остальные уравнения (5.4), получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно W_{mn}, $\mathcal{P}_{mn}$ и $\mathcal{T}_{mn}$, которые имеют порядки 1,1 и 2 соответственно. Ее решения, аналитические на всей оси $\mathbb{R} = \{z\}$, однозначно выделяются, например, заданием значений $\mathcal{T}_{mn}$ и $\mathcal{T}'_{mn}$ в точках $z = z_{mn}$.

Поскольку множество Пуанкаре $\mathbb{P} = \{z_{mn}\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, то остается применить теорему 1.

Интересно рассмотреть с этой точки зрения случай, когда $\varkappa = 0$. Из последнего уравнения (5.4) получаем, что при $z = z_{mn}$ выполнено равенство

$$[a\tau_0' - b\tau_0\rho_0^{-1}\rho_0']W_{mn} = 0$$

Нули выражения, заключенного в квадратные скобки, совпадают с критическими точками функции (5.2). В общем случае эта функция не постоянна. Поскольку критические точки аналитической функции не могут накапливаться в конечной области, то в этом случае теорема 1, очевидно, не применима.

6. Добавление. Некоторые интегральные соотношения. Будем считать, что область течения D компактна, а ее граница ∂D – гладкая регулярная поверхность. Пусть $\mathbf{n}$ – орт внутренней нормали к граничной поверхности.

Если теплопроводящая среда неподвижна ($\mathbf{v} = 0$) и $\partial\tau/\partial\mathbf{n} = 0$ на границе ∂D, то $\tau = \mathrm{const}$ во всей области D. Действительно, согласно уравнению притока тепла, в этом случае температура будет гармонической функцией в области D. Остается воспользоваться известным свойством решений внутренней задачи Неймана (см., например, [11]).

Оказывается, этот результат справедлив и для стационарных течений совершенного газа. Доказательство использует прием, который может оказаться полезным и в других задачах подобного рода. Ввиду свойства непроницаемости поле скоростей $\mathbf{v}$ касается границы ∂D.

Лемма. Пусть $f: D \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Тогда

$$\int_D \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{v}\right) d^3\mathbf{x} = 0 \tag{6.1}$$

Действительно,

$$(\partial f / \partial \mathbf{x}, \rho\mathbf{v}) = \mathrm{div}(f\rho\mathbf{v}) - f\,\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})$$

Ввиду уравнения неразрывности $\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$. После этого формула (6.1) вытекает из теоремы Гаусса.

Приведем другое доказательство леммы, основанное на применении эргодической теории. Ввиду компактности D функция f ограничена. Следовательно, временное среднее функции $df/dt = (f'_{\mathbf{x}}, \mathbf{v})$ равно нулю. Динамическая система (1.1) имеет инвариантную меру $\rho d^3\mathbf{x}$. Остается применить к функции df/dt индивидуальную эргодическую теорему Биркгофа – Хинчина (см., например, [12]).

Уравнение притока тепла (четвертое уравнение системы (5.1)) можно представить в следующем виде:

$$d(a\ln\tau - b\ln\rho)/dt = \varkappa\Delta\tau(\rho\tau)^{-1}$$

Согласно лемме,

$$\int_D \frac{\Delta\tau}{\tau} d^3\mathbf{x} = 0 \tag{6.2}$$

Теорема 3. Если

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \ln\tau}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0 \tag{6.3}$$

то $\tau = \mathrm{const}$ в области D.

Следствие. Если $\partial\tau/\partial\mathbf{n} = 0$, то $\tau = \text{const}$.

Доказательство. Применяя к интегралу в левой части (6.2) подготовительную формулу Грина, получаем соотношение

$$\int_{\partial D} \frac{1}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\mathbf{n}} d\sigma = \int_{D} \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\mathbf{x}}\right)^2 d^3\mathbf{x} \tag{6.4}$$

Ввиду предположения (6.3) левая часть этого равенства обращается в нуль. Так как подынтегральная функция в правой части (6.4) неотрицательна, а сам интеграл равен нулю, то $\partial\tau/\partial\mathbf{x} = 0$. Откуда получаем, что $\tau = \text{const}$.

Рассмотрим частный случай, когда течение газа периодично по всем координатам x, y, z. Такое течение можно рассматривать как течение по трехмерному "плоскому" тору $\mathbb{T}^3$. Так как $\partial\mathbb{T}^3$ – пустое множество, то условие (6.3), очевидно, выполнено. Следовательно, по теореме 3, $\tau = \text{const}$. Из трех последних уравнений системы (5.1) вытекает, что такой газ будет баротропной несжимаемой жидкостью. Было показано в [5], что если поле скоростей не коллинеарно своему ротору, то такое стационарное течение в потенциальном силовом поле будет регулярным. Отметим, что течения газа из теоремы 2 считаются периодическими только по двум координатам x и y.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01059) и Государственной программы "Ведущие научные школы" (00-15-96146).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozlov V.V.* Symmetries and regular behavior of Hamiltonian systems // Chaos. 1996. V. 6. № 1. P. 1–5.
2. *Фридман А.А.* Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 368 с.
3. *Козлов В.В.* Условие вмороженности поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 237–244.
4. *Frisch U.* Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Univ. Press., 1996. = *Фриш У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.: ФАЗИС, 1998. 343 с.
5. *Козлов В.В.* Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 341–342.
6. *Арнольд В.И.* О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 183–185.
7. *Kozlov V.V.* Dynamical systems determined by the Navier-Stokes equations // Rus. J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 1. P. 57–69.
8. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 429 с.
9. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1892 = *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
10. *Burgers J.M.* The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht: D. Reidel, 1974. 173 p.
11. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. N. Y., L.: Intersci. Publ., 1953 = *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 544 с.
12. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.

Москва
e-mail: ndenis@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
22.VIII.2001